10. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Τι ονομάζεται εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο;

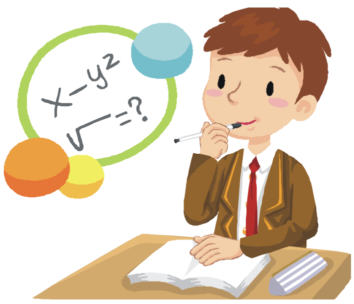
- Ονομάζεται εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής $\alpha x+\beta=0$ με $\alpha \neq 0$.
- Ο α λέγεται **συντελεστής του αγνώστου** και ο β **σταθερός όρος** (ή γνωστός).

2. Τι ονομάζεται ρίζα ή λύση της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$;

- **Ρίζα** της εξίσωσης ονομάζεται ο αριθμός που αν αντικαταστήσει τον x στην εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ προκύπτει ισότητα που αληθεύει.
- Επίλυση μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την οποία βρίσκουμε τη λύση της.

3. Πότε η εξίσωση αx + β = 0 έχει μία λύση πότε είναι αδύνατη και πότε αόριστη;

- Αν $\alpha \neq 0$, η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ έχει **μοναδική λύση** την $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha=0$, και $\beta \neq 0$ η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ γράφεται $0 \cdot x=-\beta$ και δεν έχει λύση (**αδύνατη**),
- Αν $\alpha=0$, και $\beta=0$, η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ γράφεται $0 \cdot x=0$ οπότε κάθε αριθμός είναι λύση της (**ταυτότητα** ή **αόριστη**).



Β. ΣΧΟΛΙΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Επίλυση εξισώσεων 1ου βαθμού.

Παράδειγμα 1

Να λύσετε την εξίσωση: $1-3(4x-2)+(2x-1)(-3)=5-(55-12x)$

$$1-3(4x-2)+(2x-1)(-3)=5-(55-12x)$$
$$1-12x+6+(-3)(2x-1)=5-55+12x$$
$$1-12x+6-6x+3=5-55+12x$$
$$-12x-6x-12x=5-55-1-6-3$$
$$-30x=-60$$
$$\frac{-30x}{-30}=\frac{-60}{-30}$$
$$x=2$$

- Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις
- Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους
- Κάνουμε τις αναγωγές όμοιων όρων
- Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

Αδύνατη

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η εξίσωση: $2x+21=5x+3-3x$

$$2x+21=5x+3-3x$$
$$2x-5x+3x=3-21$$
$$0\cdot x=-18$$

Ποιος αριθμός πολλαπλασιάζεται με το 0 και δίνει -18; **Κανένας**!!!

Η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν η εξίσωση πάρει την μορφή 0x=**α**,
λέμε ότι είναι **αδύνατη**.
Δεν έχει λύσεις.

Ταυτότητα

Παράδειγμα 3

Να λυθεί η εξίσωση: $3(x+1)=3x+3$

$$3(x+1)=3x+3$$
$$3x+3=3x+3$$
$$0\cdot x=0$$

Ποιος αριθμός πολλαπλασιάζεται με το 0 και δίνει 0; **Όλοι**!!!

Η εξίσωση είναι αόριστη ή ταυτότητα.

Αν η εξίσωση πάρει την μορφή 0x=0,
λέμε ότι είναι **ταυτότητα**.
Έχει άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα 4

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}=2+\frac{3x-1}{15}$

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το ΕΚΠ των παρονομαστών: ΕΚΠ(3,5,15)=15

$$15\frac{x+4}{3}-15\frac{x-4}{5}=15\cdot2+15\frac{3x-1}{15}$$

Κάνουμε τις απλοποιήσεις(**Απαλειφή παρονομαστών**) και όχι τους πολλαπλασιασμούς

$$^{5}\cancel{15}\frac{x+4}{\cancel{3}}-{}^{3}\cancel{15}\frac{x-4}{\cancel{5}}=15\cdot2+{}^{1}\cancel{15}\frac{3x-1}{\cancel{15}}$$

$5(x+4)-3(x-4)=30+(3x-1)$ Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις

5x+20–3x+12=30+3x−1 Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους

5x–3x–3x=30–1–20–12 Κάνουμε τις αναγωγές όμοιων όρων

–1x=–3 Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

$$\frac{-1x}{-1}=\frac{-3}{-1}$$

x=3

Εξισώσεις που...το παίζουν δευτέρου βαθμού

Παράδειγμα 4

Να λυθεί η εξίσωση $(x+1)^2+(x-2)^2=2(x-3)^2$

Αναπτύσσουμε τις ταυτότητες.

$$x^2+2x+1+\ x^2-4x+4=2\left(x^2-6x+9\right)$$

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος

$$x^2+2x+1+x^2-4x+4-2x^2+12x-18=0$$

Οι όροι x^2 **απλοποιούνται**.

$10x=13$

x=1,3.

Εύρεση παραμέτρων

Παράδειγμα 5

Δίνεται η εξίσωση $\left(\lambda^2-2\lambda\right)x=\lambda^2-4$ **με παράμετρο** $\lambda\in\mathbb{R}$.

i. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $\lambda=2$.

ii. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $\lambda=0$.

iii. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $\lambda=3$.

iv. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 3.

i. Για $\lambda=2$, έχουμε $\left(2^2-2\cdot 2\right)x=2^2-4\Rightarrow(4-4)x=4-4\Rightarrow 0\cdot x=0$, που είναι ταυτότητα.

ii. Για $\lambda=0$, έχουμε $\left(0^2-2\cdot 0\right)x=0^2-4\Rightarrow(0-0)x=0-4\Rightarrow 0\cdot x=-4$, που είναι αδύνατη.

iii. Για $\lambda=3$, έχουμε

$$\left(3^2-2\cdot 3\right)x=3^2-4\Rightarrow(9-6)x=9-4\Rightarrow 3x=5\Rightarrow\frac{3}{3}x=\frac{5}{3}\Rightarrow x=\frac{5}{3},$$ άρα έχει μοναδική λύση την $x=\frac{5}{3}$.

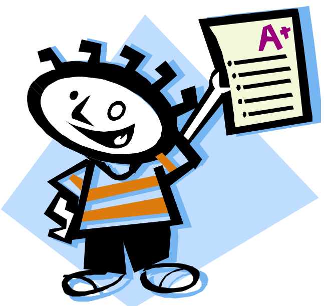
iv. Η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 3, όταν την επαληθεύει. Δηλαδή

$$\left(\lambda^2-2\lambda\right)\cdot 3=\lambda^2-4\Rightarrow 3\lambda^2-6\lambda=\lambda^2-4\Rightarrow 3\lambda^2-\lambda^2-6\lambda+4=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\lambda^2-6\lambda+4=0\Rightarrow 2\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)=0\Rightarrow\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lambda^2-2\lambda-\lambda+2=0\Rightarrow\lambda(\lambda-2)-(\lambda-2)=0\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda-1)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda-2=0\ \text{ή}\ \lambda-1=0\Rightarrow\lambda=2\ \text{ή}\ \lambda=1.$$

Για $\lambda=2$, η εξίσωση όπως είδαμε στο i. ερώτημα γίνεται $0\cdot x=0$ που είναι ταυτότητα και έχει άπειρες λύσεις.

Για $\lambda=1$ έχει μοναδική λύση την χ=3. Πράγματι:

$$\left(1^2-2\cdot 1\right)x=1^2-4\Rightarrow(1-2)x=1-4\Rightarrow -x=-3\Rightarrow\frac{-1}{-1}x=\frac{-3}{-1}\Rightarrow x=3.$$



Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $3(x + 2) - 4x = -3(1 - 2x) + 5$ **β.** $\frac{x-5}{3} = \frac{x}{2}$

γ. $\frac{7-2x}{3} + \frac{5x}{4} = 1$ **δ.** $\frac{x-2}{3} + 1 = \frac{4x-7}{4} - 5$

2. Να βρείτε τον αριθμό α ώστε η εξίσωση: $(\alpha - 1)x + 21 = 2x + 5\alpha$ να έχει ως λύση τον αριθμό 2.

3. Δίνεται η εξίσωση: $\mu^2 x + 2 = 4x + \mu$

α. Να την φέρετε στη μορφή $(\mu^2 - 4)x = \mu - 2$

β. Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση είναι αόριστη και για ποιες τιμές είναι αδύνατη;

4. Αν $\alpha \neq \beta$, να λύσετε την εξίσωση: $(x+\alpha)^2 - (x+\beta)^2 = 2\alpha^2 - 2\beta^2$.

5. Αν $\kappa \neq \mu$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x+\kappa}{\mu} - \frac{x+\mu}{\kappa} = \frac{\kappa}{\mu} - 1, \quad \kappa, \mu \neq 0$

6. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1$ με παράμετρο $\lambda \in R$.

i. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $\lambda = 1$.

ii. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $\lambda = -1$.

iii. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $\lambda = 2$.

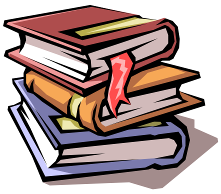
iv. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 3.

Προβλήματα

7. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, ώστε να έχουν άθροισμα 63.

8. Το άθροισμα της ηλικίας ενός πατέρα και της κόρης του είναι 50 έτη. Πριν από 5 χρόνια η ηλικία του πατέρα ήταν τριπλάσια από την ηλικία της κόρης του. Να βρεθεί η σημερινή τους ηλικία.

9. Να βρείτε τα ζεύγη των λύσεων της εξίσωσης: $3x + 2y = 15$, όταν ο x παίρνει ακέραιες τιμές στο διάστημα από 1,5 έως 4,2 .



Δ. ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. **α.** $x=\frac{4}{7}$ **β.** $x=-10$ **γ.** $x=-\frac{16}{7}$ **δ.** $x=\frac{85}{8}$

2. $\alpha=5$

3. β) μ=2 ταυτότητα, μ=-2 αδύνατη

4. $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

5. $x=-\mu$

6. i.ταυτότητα ii.αδύνατη iii. $x=\frac{1}{3}$ iv. $x=-\frac{2}{3}$

7. 20, 21, 22.

8. 15, 35

9. $\left(2,\ \frac{9}{2}\right),(3,\ 3),\left(4,\ \frac{7}{2}\right)$