8. Ε.Κ.Π. ΚΑΙ Μ.Κ.Δ. - ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Τι ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

2. Τι ονομάζεται Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

3. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή όταν είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα.

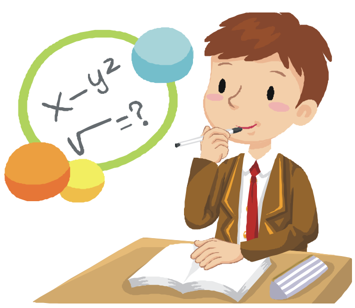
π.χ. $\frac{x^2+5}{2x-1}$.

4. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται;

Μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχει εκτός απ' αυτές που μηδενίζουν τον παρανομαστή αφού όπως γνωρίζουμε δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

5. Πότε μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί;

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.



B. ΣΧΟΛΙΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των παρακάτω παραστάσεων:

$$12\alpha^2-12\beta^2,\ 6\alpha-6\beta,\ 3\alpha^2-6\alpha\beta+3\beta^2$$

Καταρχάς, παραγοντοποιούμε τις παραστάσεις:

$$12\alpha^2-12\beta^2=12\left(\alpha^2-\beta^2\right)=12(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

$$6\alpha-6\beta=6(\alpha-\beta)$$

$$3\alpha^2-6\alpha\beta+3\beta^2=3\left(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\right)=3(\alpha-\beta)^2$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που υπάρχουν και αριθμητικοί παράγοντες, υπολογίζουμε ξεχωριστά το ΕΚΠ και το ΜΚΔ αυτών. Στο παράδειγμά μας είναι: ΕΚΠ (12, 6, 3) = 12 και ΜΚΔ (12, 6, 3) = 3.

Άρα, σύμφωνα με τους κανόνες:

ΕΚΠ = $12\cdot(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)^2$

ΜΚΔ = $3\cdot(\alpha-\beta)$

2. Ποιο είναι το ΕΚΠ και ο ΜΚΔ των παραστάσεων:

$$A=12x^3y-12xy^3$$
$$B=16x^4-16y^4$$
$$\Gamma=20x^3(x-y)^2$$

Μετατρέπουμε τις παραστάσεις σε γινόμενο (και τους συντελεστές επίσης).

$$A=12x^3y-12xy^3=2^2\cdot3xy(x-y)(x+y)$$

$$B=16x^4-16y^4=2^4\left(x^2+y^2\right)(x-y)(x+y)$$

$$\Gamma=20x^3(x-y)^2=2^2\cdot5x^3(x-y)^2$$

Το ΕΚ**Π** αποτελείται από τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με τον μεγαλύτερο εκθέτη.

Ο ΜΚ**Δ** αποτελείται από τους κοινούς παράγοντες με τον μικρότερο εκθέτη.

ΕΚΠ = $2^4\cdot3\cdot5x^3y(x-y)^2\left(x^2+y^2\right)(x+y)$

ΜΚΔ = $2^2(x-y)$.

Πότε ορίζεται μια ρητή αλγεβρική παράσταση;

Η ερώτηση θα μπορούσε να είναι «**ποιους αριθμούς επιτρέπεται να βάλουμε στις μεταβλητές χωρίς να υπάρχει πρόβλημα;**» ή ακόμα καλύτερα (γιατί οι αριθμοί που επιτρέπονται συνήθως είναι άπειροι) «**ποιους αριθμούς απαγορεύεται να βάλουμε στις μεταβλητές, ώστε να μην υπάρχει πρόβλημα;**».

Στις ρητές αλγεβρικές παραστάσεις, υπάρχει πρόβλημα ακριβώς επειδή υπάρχουν μεταβλητές στον παρονομαστή. Αν στη θέση των μεταβλητών μπουν κάποιοι αριθμοί και κάνουμε τις πράξεις, το αποτέλεσμα μπορεί να βγει... **μηδέν!** Γνωρίζουμε όμως, ότι απαγορεύεται να εμφανιστεί αυτός ο αριθμός στον παρονομαστή. Έτσι, πρέπει να βρούμε ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί και να τους απορρίψουμε!

Πολύ χρήσιμη είναι η παρακάτω σχέση, η οποία μας λέει πως για να είναι ένα γινόμενο διαφορετικό του μηδενός, θα πρέπει κάθε παράγοντας να είναι διαφορετικός απ' το μηδέν:

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

3. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

i) $\frac{x^2+1}{2x-4}$ και *ii)* $\frac{x-2021}{4x-20}$

Το σύμβολο $\neq$ διαβάζεται «διάφορο» ή «διαφορετικό».

i. Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει: $2x-4 \neq 0$.

Όμως $2x-4=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$.

Άρα $x \neq 2$.

Είναι πιο βολικό να λύνουμε πρώτα την εξίσωση και μετά να παίρνουμε τον περιορισμό.

ii. Πρέπει: $4x-20 \neq 0$.

Όμως: $4x-20=0 \Leftrightarrow 4x=20 \Leftrightarrow x=5$

Άρα $x \neq 5$.

4. Να βρείτε πότε ορίζονται οι παραστάσεις: $A=\frac{x-2}{x^2-9}$ και $B=\frac{7}{x^3-4x}$.

Όταν η σχέση δεν είναι 1ου βαθμού αλλά μεγαλύτερου, τότε παραγοντοποιούμε και θέτουμε κάθε παράγοντα ίσο με μηδέν. Λύνουμε την κάθε σχέση ξεχωριστά και παίρνουμε περιορισμούς.

Για να ορίζεται η παράσταση Α πρέπει: $x^2-9 \neq 0$.
Όμως $x^2-9=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow x-3=0$ ή $x+3=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$.
Άρα $x \neq 3$ και $x \neq -3$.

Για να ορίζεται η παράσταση Β πρέπει: $x^3-4x \neq 0$. Όμως:

$x^3-4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow$

$x(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x-2=0$ ή $x+2=0 \Leftrightarrow$

$x=0$ ή $x=2$ ή $x=-2$

Άρα $x \neq 0$, $x \neq 2$ και $x \neq -2$.

Απλοποίηση ρητής αλγεβρικής παράστασης

Όπως, ακριβώς, απλοποιώντας ένα κλάσμα, παίρνουμε ένα άλλο με μικρότερους όρους αλλά ισοδύναμο με το αρχικό, έτσι μπορούμε να απλοποιήσουμε μια ρητή αλγεβρική παράσταση, ώστε να πάρουμε μιαν άλλη, ίση με την αρχική, αλλά με λιγότερο σύνθετους όρους.

5. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα **α)** $\frac{12}{15}$ **β)** $\frac{6\alpha^2\beta^3\gamma}{4\alpha^5\beta\gamma}$ **γ)** $\frac{x^2-4}{x^2+2x}$

α) $\frac{12}{15}=\frac{3\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{4}{5}$

β) $\frac{6\alpha^2\beta^3\gamma}{4\alpha^5\beta\gamma}=\frac{3\beta^2}{2\alpha^3}$

γ) $\frac{x^2-4}{x^2+2x}=\frac{(x-2)(\cancel{x+2})}{x(\cancel{x+2})}=\frac{x-2}{x}$.

Βήματα απλοποίησης αν ο αριθμητής ή ο παρονομαστής δεν είναι γινόμενο

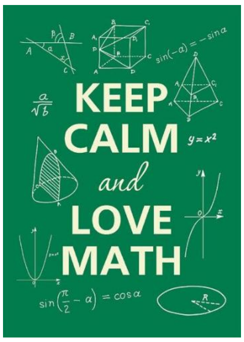
1. **Παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή.**
2. **Διαγράφουμε από τον αριθμητή και τον παρονομαστή τους κοινούς παράγοντες.**

Προσοχή στις απλοποιήσεις!! $\cancel{\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\alpha}$, $\cancel{\frac{\alpha+5}{\beta+5}=\frac{\alpha}{\beta}}$.

$\frac{\cancel{7}\cdot x}{\cancel{7}}=x$ **ΣΩΣΤΟ!**

$\frac{\cancel{7}+x}{\cancel{7}}=x$ **ΛΑΘΟΣ!!!**

Για να απλοποιήσουμε πρέπει ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ σε αριθμητή και παρονομαστή να υπάρχουν γινόμενα!
(Γι' αυτό και πρώτα κάνουμε παραγοντοποίηση!)



Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Περιορισμοί

1. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι παραστάσεις :

α. $\dfrac{\omega^2-5}{\omega-7}$ **β.** $\dfrac{\alpha+1}{2\alpha-5}$

γ. $\dfrac{x+y-z}{(x-1)(y-2)(z-3)}$ **δ.** $\dfrac{3x-12}{x^2-16}$

2. Για ποιες τιμές του x έχουν έννοια οι παραστάσεις:

α. $\dfrac{2x+7}{x-3}$ **β.** $\dfrac{4x-1}{1-3x}$ **γ.** $\dfrac{2021}{x^2-9}$ **δ.** $\dfrac{3x+11}{x^2-3x}$

ε. $\dfrac{3y-4}{(y-3)(1-2y)}$ **στ.** $\dfrac{1}{x^2}$ **ζ.** $\dfrac{1}{x^2-4x+4}$ **η.** $\dfrac{1}{x^2+1}$

Απλοποίηση

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

α. $\dfrac{(x+1)\cdot(x+2)}{x+2}$ **β.** $\dfrac{x^2-3x}{36x-12x^2}$

γ. $\dfrac{3x^2-12}{x^2+4x+4}$ **δ.** $\dfrac{5x-10}{x^2-2x}$

ε. $\dfrac{x^2-12x+36}{x^2-36}$ **στ.** $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4}$

4. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α. $\dfrac{6\alpha^5\beta}{2\alpha^3\beta\gamma^2}$ **β.** $\dfrac{2\alpha-2\beta}{4\alpha-4\beta}$

γ. $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+x}$ **δ.** $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^3-9x}$

ε. $\dfrac{2x-6}{9-x^2}$

στ. $\dfrac{(3x-2y)^2}{4y^2-9x^2}$

ζ. $\dfrac{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}{\alpha^3-\alpha\beta^2}$

η. $\dfrac{3x^2-18x+27}{3x^2-27}$

θ. $\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-18}$

ι. $\dfrac{x^2+10x+25}{3x^2-75}$

ια. $\dfrac{x^3+x^2+2x+2}{x^5+x^4-4x-4}$

ιβ. $\dfrac{4x^2+4xy+y^2}{4x^3-xy^2}$

ιγ. $\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-2\alpha\gamma}$

ιδ. $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{(x-1)(x^2-9)}$

Γενικές

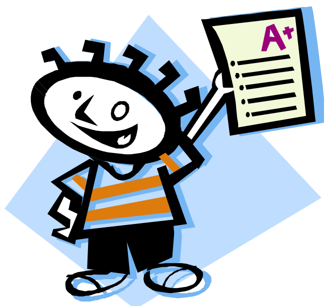
Διαγωνισμός 'Θαλής' Ε.Μ.Ε.

5. **α.** Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ x\neq\pm\sqrt{2}$$

β. Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$A=\dfrac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2}$ χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.



Δ. ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. **α.** $\omega = 7$ **β.** $\alpha = \dfrac{5}{2}$

γ. $x = 1$ και $y = 2$ και $z = 3$ **δ.** $x = 4$ και $x = -4$

2. **α.** $x \neq 3$ **β.** $x \neq \dfrac{1}{3}$ **γ.** $x \neq 3$ και $x \neq -3$ **δ.** $\dfrac{3x+11}{x^2-3x}$

ε. $y \neq 3$ και $y \neq \dfrac{1}{2}$ **στ.** $x \neq 0$ **ζ.** $x \neq 2$ **η.** Όλες

3. **α.** $x+1$ **β.** $-\dfrac{1}{12}$ **γ.** $\dfrac{3(x-2)}{x+2}$ **δ.** $\dfrac{5}{x}$ **ε.** $\dfrac{x-6}{x+6}$ **στ.** $\dfrac{x+1}{x+2}$

4. **α.** $\dfrac{3\alpha^2}{2\gamma^2}$ **β.** $\dfrac{1}{2}$ **γ.** $x(x-1)$ **δ.** $\dfrac{x-3}{x+3}$

ε. $-\dfrac{2}{3+x}$ **στ.** $\dfrac{2y-3x}{2y+3x}$ **ζ.** $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}$ **η.** $\dfrac{x-3}{x+3}$

θ. $\dfrac{x}{x+3}$ **ι.** $\dfrac{x+5}{3(x-5)}$ **ια.** $\dfrac{1}{x^2-2}$ **ιβ.** $\dfrac{2x+y}{x(2x-y)}$

ιγ. $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha-\beta-\gamma}$ **ιδ.** $\dfrac{x+1}{x+3}$

5. **α.** $K(x) = 2x+1$

β. $A = 4021$