7. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση;

Ονομάζεται παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου ή γενικότερα μιας αλγεβρικής παράστασης η διαδικασία μετατροπής της παράστασης σε γινόμενο.

2. Πότε λέμε ότι μια παράσταση έχει αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;

Μια παράσταση έχει αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων όταν δεν μπορούμε να την παραγοντοποιήσουμε περισσότερο.

3. Ποιες είναι οι πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης;

Κοινός παράγοντας

Όταν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$\alpha\beta+\alpha\gamma-\alpha\delta=\alpha(\beta+\gamma-\delta)$$

Ομαδοποίηση

Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες έτσι ώστε:

- Κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα,
- Οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα να είναι ίδιες

$$\alpha\beta+\alpha\gamma-\delta\beta-\delta\gamma=\alpha(\beta+\gamma)-\delta(\beta+\gamma)=(\beta+\gamma)(\alpha-\delta)$$

Διαφορά τετραγώνων

Η μέθοδος αυτή παραγοντοποίησης στηρίζεται στην ταυτότητα $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$, στην οποία αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε μια διαφορά δύο τελείων τετραγώνων σε γινόμενο.

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

Ανάπτυγμα τετραγώνου

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ *ή* $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$, τότε θα γίνει αντίστοιχα: $(\alpha+\beta)^2$ ή $(\alpha-\beta)^2$,

που είναι γινόμενα παραγόντων αφού : $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$ και $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$.

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2.$$

Β. ΣΧΟΛΙΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παραγοντοποίηση

ΓΙΝΟΜΕΝΟ	$\xrightarrow{\text{Ανάπτυγμα}}$ $\xleftarrow[\text{Παραγοντοποίηση}]{}$	ΑΘΡΟΙΣΜΑ

Στην παραγοντοποίηση παραστάσεων μας απασχολούν δύο ερωτήματα:

Α. Πόσους όρους έχει η παράσταση; Οι όροι χωρίζονται με τα $+$ ή $-$.

Π.χ. Η παράσταση 2α–3αβ+4αγ έχει τρεις όρους.

Β. Ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι; (με τη σειρά που δίνονται)

- **Κοινός παράγοντας**
- **Ομαδοποίηση (οι όροι είναι ζυγός αριθμός)**
- **Διαφορά τετραγώνων (όροι 2)**
- **Ανάπτυγμα τετραγώνου (όροι 3)**
- **Συνδυασμός περιπτώσεων**

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παράστασεις:

i. $2x^5y+4x^3y^3$

ii. $\alpha(x-y)-\beta(y-x)$

iii. $\kappa(x-2)-x+2$

iv. $-2xy+6xz$

i. $2x^5y+4x^3y^3=2x^3y(x^2+2y^2)$

Κοινός παράγοντας βγαίνει ο ΜΚΔ των συντελεστών και η μεταβλητή με τον **μικρότερο εκθέτη**

ii. $\alpha(x-y)-\beta(y-x)=$
$\alpha(x-y)+\beta(x-y)=$
$(x-y)(\alpha+\beta)$

Αλλαγή προσήμων: $y-x=-(x-y)$

iii. $\kappa(x-2)-x+2=\kappa(x-2)-(x-2)=(x-2)(\kappa-1)$

iv. $-2xy+6xz=-2x(y-3z)$

Όταν βγάζουμε **αρνητικό κοινό παράγοντα**, αλλάζουμε τα πρόσημα

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παράστασεις:

i. $x^3 - x^2\beta + x\beta^2 - \beta^3$

ii. $\alpha^2 - 25$

iii. $x^2 - 6x + 9$

iv. $-2xy + 6xz$

i.

$$x^3 - x^2\beta + x\beta^2 - \beta^3 =$$
$$x^2(x-\beta) + \beta^2(x-\beta) =$$
$$(x-\beta)(x^2+\beta^2)$$

Ομαδοποίηση(όροι 4 ή 6 ή ...)

Παράγοντες της μορφής $\alpha^2 + \beta^2$ και οι πρωτοβάθμιοι όροι (π.χ. $x-2$) δεν αναλύονται

ii. $\alpha^2 - 25 = \alpha^2 - 5^2 = (\alpha - 5)(\alpha + 5)$

Διαφορά τετραγώνων(όροι 2)
Πρέπει να έχουμε δύο όρους τέλεια τετράγωνα

iii.

$$x^2 - 6x + 9 =$$
$$x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 =$$
$$(x-3)^2$$

Ανάπτυγμα τετραγώνου(όροι 3)
Οι δυο όροι να είναι τέλεια τετράγωνα και ο τρίτος να είναι το διπλάσιο γινόμενό τους.

3. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $3x^2 - 48$

$3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16)$ (Κοινός παράγοντας το 3)

$= 3(x^2 - 4^2)$ (Διαφορά τετραγώνων)

$= 3(x+4)(x-4)$

Συνδυασμός περιπτώσεων
Συνδυάζοντας τις γνώσεις μας, εφαρμόζουμε διαδοχικά διαφορετικές μεθόδους

Κάποιες φορές, το πολυώνυμό μας δεν παραγοντοποιείται με κάποιον από τους παραπάνω τρόπους, δηλαδή:

- Δεν έχει κοινούς παράγοντες σε όλους τους όρους ή
- Έχει περιττό αριθμό όρων οπότε δε γίνεται ομαδοποίηση ή
- Μας θυμίζει κάποια ταυτότητα αλλά κάποιοι συντελεστές είναι μεγαλύτεροι απ' ότι θα έπρεπε, κλπ…

Τότε, πιθανότατα, να χρειάζεται πρώτα:

- είτε να **διασπάσουμε** κάποιον από τους όρους του πολυωνύμου,
- είτε να **προσθέσουμε** και **αφαιρέσουμε**, ταυτόχρονα, κάποιον κατάλληλο όρο

έτσι ώστε να μπορούμε έπειτα να εφαρμόσουμε τις γνωστές μας μεθόδους.

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παράστασεις:

i. $2x^2+5xy+3y^2$

ii. $4x^4-8x^2y^2+y^4$

iii. $4x^4+y^4$

i.

$$2x^2+5xy+3y^2=$$
$$2x^2+3xy+2xy+3y^2=$$
$$x(2x+3y)+y(2x+3y)=$$
$$(2x+3y)(x+y)$$

Διάσπαση όρου

$5xy=3xy+2xy$

ii.

$$4x^4-8x^2y^2+y^4=$$
$$4x^4-4x^2y^2-4x^2y^2+y^4=$$
$$4x^4-4x^2y^2+y^4-4x^2y^2=$$
$$(2x^2-y^2)^2-4x^2y^2=$$
$$(2x^2-y^2)^2-(2xy)^2=$$
$$(2x^2-y^2+2xy)(2x^2-y^2-2xy)$$

Διάσπαση όρου

$-8x^2y^2=-4x^2y^2-4x^2y^2$

iii.

$$4x^4+y^4=4x^4+y^4+4x^2y^2-4x^2y^2=$$
$$4x^4+4x^2y^2+y^4-4x^2y^2=$$
$$(2x^2)^2+2\cdot(2x^2)\cdot y^2+(y^2)^2-4x^2y^2=$$
$$(2x^2+y^2)^2-4x^2y^2=$$
$$(2x^2+y^2)^2-(2xy)^2=$$
$$(2x^2+y^2+2xy)(2x^2+y^2-2xy)$$

Προσθαφαίρεση όρου

$4x^2y^2-4x^2y^2$

Κάποιες φορές το πολυώνυμο που θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε μπορεί να μας θυμίζει κάποια ταυτότητα αλλά του λείπουν κάποιοι όροι. Τότε, προσθαφαιρούμε, κάποιον κατάλληλο όρο. Η ισότητα δεν αλλάζει γιατί προσθέτω και αφαιρώ τον ίδιο όρο, οπότε το άθροισμα τους είναι μηδέν

Που χρησιμεύει η παραγοντοποίηση:

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού ενός κλάσματος.

Δηλαδή ποιες τιμές επιτρέπεται να πάρει η μεταβλητή σε ένα κλάσμα.

5. Να βρείτε πότε ορίζεται το κλάσμα: $\dfrac{-3x+2021}{x^2-9}$

Πρέπει $x^2-9\neq 0$ ή

$(x-3)(x+3)\neq 0$

Άρα $x-3\neq 0$ και $x+3\neq 0$

Δηλαδή $x\neq 3$ και $x\neq -3$

Πρέπει ο παρονομαστής να είναι διαφορετικός από το 0.

Προσοχή στο **και**

Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα.

6. Να απλοποιηθεί το κλάσμα: $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

Έχουμε: $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\dfrac{(x-2)^2}{x^2-2^2}=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-2)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\dfrac{x-2}{x+2}$.

Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα πρέπει οι όροι του να είναι γινόμενα.

Για να λύσουμε εξισώσεις με βαθμό μεγαλύτερο του πρώτου.

7. Να λύσετε την εξίσωση: $x^3+4x^2=x+4$

$x^3+4x^2=x+4$ Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος

$x^3+4x^2-x-4=0$ Κάνουμε παραγοντοποίηση

$x^2(x+4)-(x+4)=0$

$(x+4)(x^2-1)=0$

$(x+4)(x-1)(x+1)=0$

Άρα x=–4 **ή** x=1 **ή** x=–1

Προσοχή στο **ή**

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κοινός Παράγοντας

1. Να μετατραπούν σε γινόμενα πρώτων παραγόντων οι παραστάσεις:

α. $2αβ - 2αδ$ **β.** $8x^2 - 4x$

γ. $12x^2y + 6xy^2 - 3xy$ **δ.** $4κλ^2 - 10κ^2λ + 13κλ$

ε. $15α^3β^3γ^2 - 5α^2β^3γ + 20α^2β^3γδ$

2. Να μετατραπούν σε γινόμενα πρώτων παραγόντων οι παραστάσεις:

α. $\kappa(x + 2y) + \lambda(x + 2y)$

β. $2α^2β(x + y) - 4αβ^2(x + y)$

γ. $3α(κ - 3λ) + 6αβ(κ - 3λ) + 12α^2β(κ - 3λ)$

δ. $(x + y)^3 - (x + y)^2$

ε. $α(x - y) + γ(y - x)$

στ. $2α(γ - 2δ) + 2αβ(2δ - γ) - 4α^2(γ - 2δ)$

ζ. $α(x + y) + β(x + y) - (α - β)(x + y)$

η. $(x - 2)(x - 1)^2 - 4(2 - x)$

θ. $2α(α - 2β) + α - 2β$

ι. $3x^2(x - 3y) - x + 3y$

ια. $2x^2y^3(α - 5β) - 4xy^2(5β - α)$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $6x^2y^2 - 12xy^3 + 15xy^2\omega$

β) $2(3x-2y)(x-y)-3(2x+y)(y-x)$

γ) $(a-\beta+2)(x-2)-(\beta-\alpha-2)(x+3)-(a-\beta+2)(6-x)$

δ) $6x(x+1)^4-2x^2(x+1)^3+12x(x+1)^5$

ε) $x\sqrt{6}+\sqrt{8}x^2y+\sqrt{18}xy^2$

Ομαδοποίηση

4. Να μετατραπούν σε γινόμενα πρώτων παραγόντων οι παραστάσεις:

α. $2x+2y+\alpha y+\alpha x$ **β.** $\alpha^2-4\alpha+\alpha\gamma-4\gamma$

γ. $\alpha^2\gamma^2-\alpha\gamma\delta+\alpha\beta\gamma-\beta\delta$ **δ.** $5\alpha x-4\beta y+5\alpha y-4\beta x$

ε. $4\alpha y-2\beta y+2\alpha\omega-\beta\omega$ **στ.** $x^3-5x^2+2x-10$

ζ. $x^3+7x^2+3x+21$ **η.** $7\alpha\beta+7\alpha\gamma-9\beta\delta-9\gamma\delta$

θ. $\alpha\beta x-\alpha\beta y-\alpha\gamma x+\alpha\gamma y$ **ι.** $5x^3+x^2-20x-4$

ια. $x^3+3x^2-16x-48$ **ιβ.** x^3+x^2-4x-4

ιγ. $\beta x-\alpha\beta+x^2-\alpha x$ **ιδ.** $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5$

ιε. $\alpha^5-\alpha^4-2\alpha^3+2\alpha^2+\alpha-1$ **ιστ.** $\alpha x^\nu+\alpha y^\mu+\beta x^\nu+\beta y^\mu$

ιζ. $x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2x^2+x^2y-3xy-6x+5y+10$ **β)** $\kappa y+\lambda y-\nu y-\kappa x-\lambda x+\nu x$

γ) $5x^3y+10xy^3+5x^2y^2-2x^2-4y^2-2xy$ **δ)** $\alpha x^{\nu+1}+\alpha y^\mu\cdot x+\beta x^{\nu+1}+\beta y^\mu\cdot x$

Διαφορά Τετραγώνων

6. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α. α^2-16 **β.** x^2-9

γ. $25-x^2$ **δ.** $36x^4-121y^2$

ε. $\frac{49}{64}x^2-9$ **στ.** $81x^4-16y^4$

ζ. x^4-1 η. $\alpha^4-\beta^4$

θ. $\alpha^8-\beta^8$ **ι.** $(x-2y)^2-(-x+3y)^2$

ια. $36(x-1)^2-9$ **ιβ.** $\frac{1}{9}x^2-(x-y)^2$

ιγ. x^2-7 **ιδ.** $3x^2-2$

Τέλειο Τετράγωνο

7. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^2 + 2x + 1$ **β.** $x^2 - 4x + 4$

γ. $\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2$ **δ.** $4\alpha^2 + 12\alpha + 9$

ε. $16x^2 + 40xy + 25y^2$ **στ.** $49\alpha^2 - 14\alpha\beta + \beta^2$

ζ. $25\kappa^2 - 60\kappa\lambda + 36\lambda^2$ **η.** $\alpha^2\beta^2 - 14\alpha\beta + 49$

θ. $x^6 - 2x^3 + 1$ **ι.** $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4$

ια. $x^2 + x + \frac{1}{4}$ **ιβ.** $\frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha\beta}{4} + \frac{\beta^2}{4}$

ιγ. $\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{9}$ **ιδ.** $\frac{4}{9}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{4}$

Κύβος Αθροίσματος / Διαφοράς

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ **β.** $\alpha^3 + 6\alpha + 12\alpha + 8$

γ. $8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 6\alpha - 1$ **δ.** $\kappa^3 + 9\kappa^2 + 27\kappa + 27$

Ομαδοποίηση με ταυτότητες

9. **α)** $x^2 - y^2 - 2x + 1$ **β)** $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$

γ) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 4z - 4$ **δ)** $\left(x^2 + y^2 - z^2\right)^2 - 4x^2y^2$

ε) $x^3 + 2x^2 + x + xy + y$

Ομαδοποίηση με διάσπαση και ταυτότητες

10. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^4 - 3x^2 + 1$ **β.** $x^4 + 4y^4 - 13x^2y^2$

γ. $x^4 + 5x^2y^2 + 9y^4$ **δ.** $x^4 + x^2 + 1$

Συνδυαστικές & Άλλες

11. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α. $\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2$ **β.** $x^4 - 64x^2y^2$

γ. $x^3 - x(y-z)^2$ **δ.** $x^3y - xy^3$

ε. $x^3 - 9x$ **στ.** $2x^3 - 18xy^2$

ζ. $5\alpha^3 - 5\alpha x^2$ **η.** $81x^4 - 16y^4$

θ. $3x^{\nu+2} - 12x^{\nu}$

12. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α. $x^2 - 4y^2 - x - 2y$ **β.** $\alpha x^2 + \beta y^2 - \alpha y^2 - \beta x^2$

γ. $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$ **δ.** $\alpha^2 - \beta^2 - \alpha - \beta$

ε. $x^{2\nu+1} - xy^2$ **στ.** $9x^{2\nu+2} - 4y^{2\nu+2}$

13. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $4x^4 - 4x^3 + x^2$ **β.** $4x^3 - xy^2$

γ. $x^3 - 6x^2y + 9xy^2$ **δ.** $x + \sqrt{x} - 2$

ε. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - x^2 + 4x - 4$ **στ.** $x^2 - 2xy - 3y^2$

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2 - 4\alpha^2\beta^2$ **β.** $(3x-1)(x+1)^2 - 9(3x-1)$

γ. $(x^2+3)^2 - 16x^2$ **δ.** $\left(x^2 - 4\right)^2 - (x+2)^2$

ε. $2(\alpha+5)^2 + 20(\alpha+5) + 50$ **στ.** $(\alpha+\beta)^2 + 2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) + (\alpha-\beta)^2$

15. Αν ισχύει $α^2 + β^2 = 2αβ$, ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

Α. $α = 0$ ή $β = 0$ **Β.** $α = 0$ και $β = 0$

Γ. $α = 1$ και $β = 1$ **Δ.** $α = β$

Ε. Κανένα από τα προηγούμενα.

16. Αν είναι $3(4x+5π)=ρ$, τότε η παράσταση $6(8x+10π)$ είναι ίση με:

Α. 2ρ Β. 4ρ Γ. 6ρ Δ. 8ρ Ε. 18ρ

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε.

17. Αν ο κ είναι ακέραιος, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(κ^3+2\right)^2-\left(κ^3-2\right)^2$ είναι κύβος άρτιου.

18. Να υπολογίσετε, με παραγοντοποίηση, τις τιμές των παραστάσεων:

i. 9999^2-9999^0

ii. $7^{21}\cdot 6^{20}-7^{20}\cdot 6^{21}$

iii. $65^2+65\cdot 70+35^2$

iv. $65\cdot 86-65\cdot 21-35^2$

v. $\sqrt{2022^2-4043}$

vi. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{12}}$

19. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. x^4-x^2+16

ii. x^4-7x^2+10

20. Δίνεται το πολυώνυμο $A(x)=(x-2)^3-3(2-x)(x-2)-4x+8$.

α. Να δείξετε ότι: $A(x)=x^3-3x^2-4x+12$.

β. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $A(x)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=0$.

21. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+bx+c$, όπου α, b, c πραγματικοί αριθμοί.

α. Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x)=P(2x)-19P(-x)$.

β. Βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x)=3x(3x+2)^2$

Διαγωνισμός 'Ευκλείδης' Ε.Μ.Ε.

22. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A}=90^o$) να δείξετε ότι ισχύει:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)(2\alpha-\beta-\gamma)$$

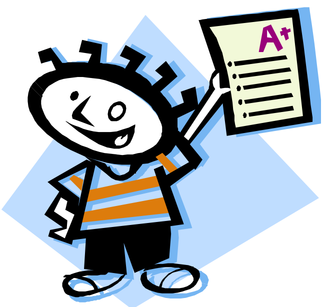
23. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\left(x^2+y^2+xy\right)^2$ και $B=2\left[\left(x^2+y^2+xy\right)^2+x^4+y^4\right]$,

όπου x y, είναι ρητοί.

i. Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x y, διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x .

ii. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός Β είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y.

Διαγωνισμός 'Θαλής' Ε.Μ.Ε.



Δ. ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. **α.** $2\alpha\beta - 2\alpha\delta = 2\alpha(\beta - \delta)$ **β.** $8x^2 - 4x = 4x(2x-1)$

γ. $12x^2y + 6xy^2 - 3xy = 3xy(4x+2y-1)$ **δ.** $4\kappa\lambda^2 - 10\kappa^2\lambda + 13\kappa\lambda = \kappa\lambda(4\lambda - 10\kappa + 13)$

ε. $15\alpha^3\beta^3\gamma^2 - 5\alpha^2\beta^3\gamma + 20\alpha^2\beta^3\gamma\delta = 5\alpha^2\beta^3\gamma(3\alpha\gamma - 1 + 4\delta)$

2. **α.** $\kappa(x+2y) + \lambda(x+2y) = (x+2y)(\kappa+\lambda)$

β. $2\alpha^2\beta(x+y) - 4\alpha\beta^2(x+y) = 2\alpha\beta(x+y)(\alpha - 2\beta)$

γ. $3\alpha(\kappa - 3\lambda) + 6\alpha\beta(\kappa - 3\lambda) + 12\alpha^2\beta(\kappa - 3\lambda) = 3\alpha(\kappa - 3\lambda)(1 + 2\beta + 4\alpha\beta)$

δ. $(x+y)^3 - (x+y)^2 = (x+y)^2[(x+y)-1] = (x+y)^2(x+y-1)$

ε. $\alpha(x-y) + \gamma(y-x) = \alpha(x-y) - \gamma(x-y) = (x-y)(\alpha-\gamma)$

στ. $2\alpha(\gamma - 2\delta) + 2\alpha\beta(2\delta - \gamma) - 4\alpha^2(\gamma - 2\delta) = 2\alpha(\gamma - 2\delta) - 2\alpha\beta(\gamma - 2\delta) - 4\alpha^2(\gamma - 2\delta)$

$= 2\alpha(\gamma - 2\delta)(1 - \beta - 2\alpha)$

ζ. $\alpha(x+y) + \beta(x+y) - (\alpha - \beta)(x+y) = (x+y)[\alpha + \beta - (\alpha - \beta)] = (x+y)(\alpha + \beta - \alpha + \beta)$

$= (x+y)(2\beta)$

η. $(x-2)(x-1)^2 - 4(2-x) = (x-2)(x-1)^2 + 4(x-2) = (x-2)[(x-1)^2 + 4]$

$= (x-2)(x^2 - 2x + 5)$

θ. $2\alpha(\alpha - 2\beta) + \alpha - 2\beta = (\alpha - 2\beta)(3\alpha)$

ι. $3x^2(x-3y) - x + 3y = 3x^2(x-3y) - (x-3y) = (x-3y)(3x^2-1)$

ια. $2x^2y^3(\alpha - 5\beta) - 4xy^2(5\beta - \alpha) = 2x^2y^3(\alpha - 5\beta) + 4xy^2(\alpha - 5\beta) = 2xy^2(\alpha - 5\beta)(xy+2)$

3. **α)** $6x^2y^2 - 12xy^3 + 15xy^2\omega = 3xy^2(2x - 4y + 5\omega)$

β) $2(3x-2y)(x-y) - 3(2x+y)(y-x) = (x-y)(12x-y)$

γ) $(a - \beta + 2)(x-2) - (\beta - \alpha - 2)(x+3) - (a - \beta + 2)(6-x) = (a - \beta + 2)(3x-5)$

δ) $6x(x+1)^4 - 2x^2(x+1)^3 + 12x(x+1)^5 = 2x(x+1)^3(6x^2 + 14x + 9)$

ε) $x\sqrt{6} + \sqrt{8}x^2y + \sqrt{18}xy^2 = x\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2xy + 3y^2)$

4. **α.** $2x+2y+\alpha y+\alpha x=(x+y)(\alpha+2)$

β. $\alpha^2-4\alpha+\alpha\gamma-4\gamma=(\alpha-4)(\alpha+\gamma)$

γ. $\alpha^2\gamma^2-\alpha\gamma\delta+\alpha\beta\gamma-\beta\delta=(\alpha\gamma-\delta)(\alpha\gamma+\beta)$

δ. $5\alpha x-4\beta y+5\alpha y-4\beta x=(x+y)(5\alpha-4\beta)$

ε. $4\alpha y-2\beta y+2\alpha\omega-\beta\omega=(2\alpha-\beta)(2y+\omega)$

στ. $x^3-5x^2+2x-10=(x-5)(x^2+2)$

ζ. $x^3+7x^2+3x+21=(x+7)(x^2+3)$

η. $7\alpha\beta+7\alpha\gamma-9\beta\delta-9\gamma\delta=(\beta+\gamma)(7\alpha-9\delta)$

θ. $\alpha\beta x-\alpha\beta y-\alpha\gamma x+\alpha\gamma y=\alpha(x-y)(\beta-\gamma)$

ι. $5x^3+x^2-20x-4=(5x+1)(x-2)(x+2)$

ια. $x^3+3x^2-16x-48=(x+3)(x-4)(x+4)$

ιβ. $x^3+x^2-4x-4=(x+1)(x-2)(x+2)$

ιγ. $\beta x-\alpha\beta+x^2-\alpha x=(x-a)(\beta+x)$

ιδ. $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5=(1-x)(1+x^2+x^4)$

ιε. $\alpha^5-\alpha^4-2\alpha^3+2\alpha^2+\alpha-1=(a-1)^3(a+1)^2$

ιστ. $\alpha x^\nu+\alpha y^\mu+\beta x^\nu+\beta y^\mu=(\alpha+\beta)(x^\nu+y^\mu)$

ιζ. $x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8=(x-4)(\sqrt{x}-2)$

5. **α)** $2x^2+x^2y-3xy-6x+5y+10=(y+2)(x^2-3x+5)$

β) $\kappa y+\lambda y-\nu y-\kappa x-\lambda x+\nu x=(y-x)(\kappa+\lambda-\nu)$

γ) $5x^3y+10xy^3+5x^2y^2-2x^2-4y^2-2xy=(5xy-2)(x^2+2y^2+xy)$

δ) $ax^{\nu+1}+ay^\mu\cdot x+\beta x^{\nu+1}+\beta y^\mu\cdot x=x(\alpha+\beta)(x^\nu+y^\mu)$

6. **α.** $\alpha^2 - 16 = (\alpha - 4)(\alpha + 4)$ **β.** $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

γ. $25 - x^2 = (5 - x)(5 + x)$ **δ.** $36x^4 - 121y^2 = (6x^2 - 11y)(6x^2 + 11y)$

ε. $\frac{49}{64}x^2 - 9 = \left(\frac{7}{8}x - 3\right)\left(\frac{7}{8}x + 3\right)$ **στ.** $81x^4 - 16y^4 = (9x^2 - 4y^2)(9x^2 + 4y^2)$

ζ. $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ η. $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)$

ζ. $\alpha^8 - \beta^8 = (\alpha^4 + \beta^4)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

η. $\alpha^{2\nu} - \beta^{2\nu} = (\alpha^\nu - \beta^\nu)(\alpha^\nu + \beta^\nu)$

θ. $(2x-5)^2 - 25 = 2x(2x - 10)$ **ι.** $(x-2y)^2 - (-x+3y)^2 = y(2x - 5y)$

ια. $36(x-1)^2 - 9 = 9(2x-1)(2x-3)$

ιβ. $\frac{1}{9}x^2 - (x-y)^2 = \left(\frac{4x}{3} - y\right)\left(-\frac{2x}{3} + y\right)$

ιγ. $x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$

ιδ. $3x^2 - 2 = (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x + \sqrt{2})$

7. ζ. $25\kappa^2 - 60\kappa\lambda + 36\lambda^2 = (5\kappa - 6\lambda)^2$

8. γ. $8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 6\alpha - 1 = (2\alpha - 1)^3$

9. **α)** $x^2 - y^2 - 2x + 1 = (x - 1 + y)(x - 1 - y)$

ε) $x^3 + 2x^2 + x + xy + y = (x+1)(x^2 + x + y)$

10. **α)** $x^4 - 3x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 - 1)^2 - x^2 = (x^2 - 1 + x)(x^2 - 1 - x)$

11. **θ.** $3x^{\nu+2} - 12x^\nu = 3x^\nu x^2 - 12x^\nu = 3x^\nu(x^2 - 4) = 3x^\nu(x-2)(x+2)$

12. **α)** $x^2 - 4y^2 - x - 2y = x^2 - (2y)^2 - (x+2y) = (x+2y)(x-2y) - (x+2y) = (x+2y)(x-2y-1)$

13. **δ.** $x + \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x})^2 - 1 + \sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) + \sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)$

14. **στ.** $4a^2$

15. **Δ**

16. **Β**

17. $\left(\kappa^3+2\right)^2-\left(\kappa^3-2\right)^2=\ldots=(2\kappa)^3$

18.

i. $7^{21}\cdot 6^{20}-7^{20}\cdot 6^{21}=\ldots=42^{20}$

ii. $65^2+65\cdot 70+35^2=\ldots=\left(65+35\right)^2=10000$

iii. $65\cdot 86-65\cdot 21-35^2=65^2-35^2=\ldots=3000$

iv. $\sqrt{2022^2-4043}=\sqrt{2022^2-4044+1}=\ldots=2021$

v. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{12}}=\ldots=\dfrac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

19.

i. $x^4-x^2+16=\ldots=\left(x^2+4-3x\right)\left(x^2+4+3x\right)$ με διάσπαση όρου για κατασκευή τέλειου τετραγώνου

ii. $x^4-7x^2+10=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)$ με διάσπαση όρου για κατασκευή τέλειου τετραγώνου

20. α…. β. $A(x)=(x-3)(x-2)(x+2)$ γ. x=3 ή x=2 ή x=-2

21. **α.** $Q(x)=27x^3-15\alpha x^2+21bx-18c$. **β.** $\alpha=-\dfrac{12}{5}, b=\dfrac{4}{7}, c=0$.

22. …

23. $A=\left(x^2+y^2+xy\right)^2=x^4+2yx^3+3y^2x^2+2y^3x+y^4$

$B=4\left(x^2+y^2+xy\right)^2$ με χρήση και του πρώτου ερωτήματος

άρα $\sqrt{B}=2\left(x^2+y^2+xy\right)\in Q$ αφού $x^2+y^2+xy\geq 0$ (;)