6. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

Ονομάζεται ταυτότητα κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών αυτών.

2. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2 + \alpha\cdot\beta + \beta\cdot\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\cdot\beta + \beta^2$$

3. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \alpha\cdot\beta - \beta\cdot\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\cdot\beta + \beta^2 .$$

4. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

$$(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) =$$

$$= \alpha^3 + \underline{\underline{2\alpha^2\beta}} + \underline{\alpha\beta^2} + \underline{\underline{\beta\alpha^2}} + \underline{2\alpha\beta^2} + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 .$$

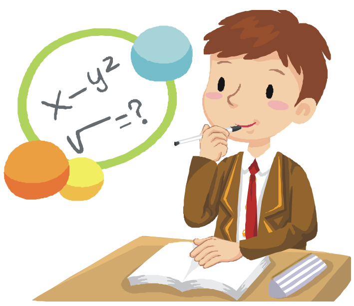
5. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

$$(\alpha-\beta)^3 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) =$$

$$= \alpha^3 - \underline{2\alpha^2\beta} + \underline{\underline{\alpha\beta^2}} - \underline{\alpha^2\beta} + \underline{\underline{2\alpha\beta^2}} - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 .$$

6. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

$$(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2 .$$



Β. ΣΧΟΛΙΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ταυτότητες

Έστω η ισότητα $2\cdot x = 10$. Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι επαληθεύεται μόνο για τον αριθμό 5, γιατί όντως $2\cdot 5 = 10$, ενώ για οποιονδήποτε άλλο αριθμό π.χ. τον 3 είναι $2\cdot 3 = 6 \neq 10$.

Υπάρχουν όμως μερικές ισότητες στις οποίες όποιους, τυχαίους αριθμούς κι αν θέσουμε στις μεταβλητές, τότε αυτές καταλήγουν να είναι πάντα σωστές!

Για παράδειγμα, έστω η ισότητα $\mathbf{(x - y)\cdot(x + y) = x^2 - y^2}$. Ας θέσουμε, στην τύχη, διάφορους αριθμούς στα x, y:

Για $x = 2,\ y = 1$ τότε $(2-1)\cdot(2+1) = 2^2 - 1^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 3 = 3$

Για $x = -2,\ y = 4$ τότε $(-2-4)\cdot(-2+4) = (-2)^2 - 4^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -12 = -12$

Για $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{2}$ τότε $(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})\cdot(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}) = (\frac{2}{3})^2 - (\frac{1}{2})^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{7}{36} = \frac{7}{36}$

κλπ ...

Άρα, βλέπουμε ότι παρότι, κάθε φορά, βάζουμε τυχαίους και διαφορετικούς αριθμούς στο τέλος καταλήγουμε σε μια σωστή ισότητα (ή όπως λέμε: η ισότητα επαληθεύεται!)
Τις ισότητες αυτές θα τις λέμε ταυτότητες και είναι εξαιρετικά σημαντικές στα μαθηματικά.
Οι ταυτότητες είναι απλά γινόμενο πολυωνύμων αλλά είναι πολύ χρήσιμες και γι' αυτό έχουν τυποποιηθεί.

Και που μας χρειάζονται λοιπόν;

α) Καταρχάς, μας βοηθούν να εκτελέσουμε γρηγορότερα και σωστότερα πράξεις στις αλγεβρικές παραστάσεις.

β) Επίσης, μας βοηθούν να μετατρέψουμε μια αλγεβρική παράσταση, από άθροισμα σε γινόμενο (να κάνουμε δηλαδή παραγοντοποίηση, που θα δούμε παρακάτω).

γ) Στην απλοποίηση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων.

δ) Στην επίλυση πολύπλοκων εξισώσεων, μεγαλύτερων του 1ου βαθμού.

ε) Τέλος, σε πολλές ακόμα εφαρμογές.

2. Αξιοσημείωτες ταυτότητες

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ **Τετράγωνο αθροίσματος**

$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ **Τετράγωνο διαφοράς**

$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ **Διαφορά τετραγώνων**

$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ **Κύβος αθροίσματος**

(οι δυνάμεις του α κατεβαίνουν και του β ανεβαίνουν)

$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ **Κύβος διαφοράς**

(τα πρόσημα μπαίνουν εναλλάξ)

Για να αποδείξουμε τις πέντε γνωστές ταυτότητες ξεκινάμε από το πρώτο μέλος και κάνουμε πράξεις μέχρι να καταλήξουμε στο δεύτερο μέλος.
Είναι σημαντικό να τις θυμόμαστε γιατί κάθε φορά που συναντάμε ταυτότητες σε μια παράσταση, τις γράφουμε κατευθείαν και δεν κάνουμε τις πράξεις.

3. Μέθοδοι απόδειξης μιας ταυτότητας

Πέρα από τις γνωστές μας ταυτότητες, για να αποδείξουμε γενικά οποιαδήποτε ισότητα μας ζητάνε, ακολουθούμε μια από τις δύο παρακάτω μεθόδους:

Α. Ξεκινάμε από το ένα μέλος της ισότητας που πρέπει να αποδείξουμε (συνήθως από αυτό με τις παρενθέσεις και τις δυνάμεις) και κάνουμε πράξεις μέχρι να καταλήξουμε στο άλλο μέλος.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε την παρακάτω ταυτότητα: $a^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$

$(\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta = a^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\beta = a^2 + \beta^2$

Β. Εκτελούμε πράξεις σε κάθε μέλος της ισότητας ταυτόχρονα, μέχρι να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα και στα δύο μέλη (δηλ. μια ισότητα που να ισχύει).

Παράδειγμα

Να αποδείξετε την παρακάτω ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^3-\alpha^3-\beta^3=3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Το $1^{ο}$ μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$(\alpha+\beta)^3-\alpha^3-\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-\alpha^3-\beta^3=3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2$

Το $2^{ο}$ μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2$

Άρα $(\alpha+\beta)^3-\alpha^3-\beta^3=3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

4. Συζυγείς παραστάσεις

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2-\left(\sqrt{\beta}\right)^2}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta}$$

5. Προσοχή!

- Οι ταυτότητες ισχύουν για οποιουσδήποτε αριθμούς α και β.

  Αντικαθιστούμε μόνο τους αριθμούς, χωρίς τα πρόσημα.

Παράδειγμα:

$(\mathbf{2x}-\mathbf{3y})^2=(\mathbf{2x})^2-\mathbf{2}\cdot(\mathbf{2x})\cdot(\mathbf{3y})+(\mathbf{3y})^2=\mathbf{4x}^2-\mathbf{12xy}+\mathbf{9y}^2$.

και όχι $=(\mathbf{2x})^2-\mathbf{2}\cdot(\mathbf{2x})\cdot(-\mathbf{3y})+(-\mathbf{3y})^2$

- $\mathbf{(-x)^2=x^2}$

  $(-\alpha-\beta)^2=\left[-(\alpha+\beta)\right]^2=(\alpha+\beta)^2$ άρα $\mathbf{(-\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2}$

  $\mathbf{(-\alpha+\beta)^2=(\beta-\alpha)^2}$ και

  $(-\alpha+\beta)^2=\left[-(\alpha-\beta)\right]^2=(\alpha-\beta)^2$ άρα $\mathbf{(-\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2}$

6. Πράξεις

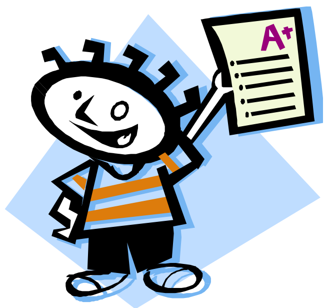
Οι ταυτότητες χρησιμοποιούνται μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις. Σε τέτοια περίπτωση θα πρέπει να εκτελούνται πρώτα οι ταυτότητες, τα αποτελέσματα να μπαίνουν μέσα σε παρένθεση και κατόπιν να γίνονται οι πολλαπλασιασμοί και οι προσθέσεις.

Παράδειγμα

Να γίνουν οι πράξεις: $3x^2(x+3)^2-(x+3)(x-3)-(x+2)^3$

$$3x^2(x+3)^2-(x+3)(x-3)-(x+2)^3=3x^2\left(x^2+6x+9\right)-\left(x^2-9\right)-\left(x^3+6x^2+12x+8\right)=$$

$$=3x^4+18x^3+27x^2-x^2+9-x^3-6x^2-12x-8=3x^4+17x^3+20x^2-12x+1.$$



Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τετράγωνο Αθροίσματος – Διαφοράς

1. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α. $(\alpha + 4)^2$ **β.** $(10 + \kappa)^2$

γ. $(\mu - 4)^2$ **δ.** $(4 - x)^2$

ε. $(\alpha + 2\beta)^2$ **στ.** $(6\kappa - 5)^2$

ζ. $(3\alpha + 4\beta)^2$ **η.** $(2\alpha - 7\beta)^2$

θ. $(-\alpha - \beta)^2$ **ι.** $(-x + y)^2$

2. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α. $(\alpha^2 + \beta)^2$ **β.** $(\alpha - \beta^3)^2$

γ. $(x^2 - y^3)^2$ **δ.** $(3\alpha^2 + 4\alpha\beta)^2$

ε. $(x^3 + 3xy^2)^2$ **στ.** $(x^\nu - y^\nu)^2$

ζ. $(\alpha + \frac{1}{2}\beta)^2$ **η.** $\left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{4\beta}{3}\right)^2$

θ. $\left(x - \sqrt{3}\right)^2$ **ι.** $\left(\sqrt{2}x - \sqrt{5}y\right)^2$

ια. $\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{5}} - \beta\sqrt{5}\right)^2$ **ιβ.** $\left(\frac{1}{3}x + 4\right)^2$

ιγ. $(3ab^2 - 2a^2b)^2$ **ιδ.** $\left(3x - \frac{1}{y^2}\right)^2$

Κύβος Αθροίσματος – Διαφοράς

3. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α. $(x + 1)^3$ **β.** $(x - 2)^3$ **γ.** $(3 - 2x)^3$ **δ.** $(2\alpha + 3\beta)^3$

ε. $(\kappa^2 - \lambda)^3$ **στ.** $\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^3$ **ζ.** $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^3$ **η.** $\left(x^2 - \frac{y}{3}\right)^3$

θ. $\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^3$ **ι.** $(x^2 + 2yz)^3$ **κ.** $\left(2a^3 + \frac{2b^2}{3}\right)^3$ **λ.** $(3\kappa\lambda^2 - 2\lambda^2)^3$

Διαφορά τετραγώνων

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α. $(x-9)(x+9)$

β. $(x+4)(x-4)$

γ. $(3-\alpha)(3+\alpha)$

δ. $(2\kappa-\lambda)(2\kappa+\lambda)$

ε. $(2x-3y)(2x+3y)$

στ. $(x^2-y)(x^2+y)$

ζ. $(\kappa^2+\lambda^3)(\kappa^2-\lambda^3)$

η. $(\alpha^3-3\beta)(\alpha^3+3\beta)$

θ. $(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3+\beta^3)$

ι. $(2x^2y+6)(2x^2y-6)$

ια. $(3xy^\nu-\omega^\nu)(\omega^\nu+3xy^\nu)$

ιβ. $(0{,}4\alpha+0{,}5\beta)(0{,}4\alpha-0{,}5\beta)$

ιγ. $(\kappa\lambda+\mu)(\mu-\kappa\lambda)$

ιδ. $(\alpha^2-\beta)(\beta+\alpha^2)$

ιε. $\left(\frac{x}{\alpha}+2\right)\left(\frac{x}{\alpha}-2\right)$

ιστ. $\left(\frac{x}{11}+\frac{5y}{12}\right)\left(\frac{x}{11}-\frac{5y}{12}\right)$

ιζ. $\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)$

ιη. $\left(\sqrt{5\alpha}-\sqrt{3\beta}\right)\left(\sqrt{5\alpha}+\sqrt{3\beta}\right)$

5. Να υπολογίσετε με τον συντομότερο τρόπο το γινόμενο:

$$(3x-2y)(9x^2+4y^2)(3x+2y)$$

Συμπλήρωση Κενών

6. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες:

α. $(\ldots\ldots+\ldots\ldots)^2 = 9x^2+12x+\ldots\ldots$

β. $(\ldots\ldots-\ldots\ldots)^2 = 25x^2-\ldots\ldots+4y^2$

γ. $(\ldots\ldots+\ldots\ldots)^2 = x^2+3x+\ldots\ldots$

δ. $(\ldots\ldots-\frac{1}{2})^2 = 16x^4-4x^2+\ldots\ldots$

ε. $(5+\ldots\ldots)(5-\ldots\ldots) = \ldots\ldots-16x^2$

στ. $(2\alpha+\ldots\ldots)^3 = \ldots\ldots+3\cdot\ldots\ldots+3\cdot\ldots\ldots+27$

ζ. $x^2+\ldots\ldots+16y^2 = (\ldots\ldots+\ldots\ldots)^2$

η. $\ldots\ldots+6\alpha\beta+\beta^2 = (\ldots\ldots+\ldots\ldots)^2$

θ. $\ldots\ldots-12xy+9y^2 = (\ldots\ldots-\ldots\ldots)^2$

Παραστάσεις με ταυτότητες

7. Να γίνουν οι πράξεις:

α. $(1 - α)(1 + α) + α^2$

β. $2(x - 5)(x + 5) - (3 - x)^2$

γ. $2(κ + 4)^2 - 3(κ + 2)(κ - 2)$

δ. $2(2 - β)^2 - 3(β - 2)^2$

ε. $-9α^2 + (3α + 4β)^2 - 24αβ$

στ. $(4x + 5y)^2 + (x + 9y)(x - 9y)$

ζ. $2x^3 - (x^2 + 1)(x - 2) + (x - 1)^3$

η. $(x + 2)^2 - 2(x - 1)^2 - 4(x + 1)^2 + 5x^2$

θ. $(α - 2β)^2 - 3(α - 3β)^2 - (2α + 3β)(2α - 3β)$

ι. $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6} - 2\right)^2$

ια. $(x + 3)(5 + 2x)(2x - 5) - 2x(1 - 4x)^2$

ιβ. $(x+y-1)(x+y+1)$

8. Να γίνουν οι πράξεις:

α. $(x+3)^3 - 3(x+2)^2 + 3(x+1)^2 - x^3$

β. $2(x-1)^3 - (3x+2)^2 + (5x+2)(5x-2)$

γ. $(x-2)^3 - x(3-2x)(3+2x) + 2x(3+2x)^2$

δ. $(α^3+1)^2 - (α^2+1)^3 + 3α^2(α+1)^2$

ε. $\left(α + \frac{1}{α}\right)^3 - \left(α - \frac{1}{α}\right)^3$.

9. Εάν $x = 2\sqrt{3} + 1$ και $y = 2\sqrt{3} - 1$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $x^2 + y^2 + 2xy$.

Αποδεικτικές

10. Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

i. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

ii. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

11. α) Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες: $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

β) Αν $x+\dfrac{1}{x}=3$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$A=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ και $B=x^3+\dfrac{1}{x^3}$

12. Να αποδείξετε ότι:

α. $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$ **β.** $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$ **γ.** $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)\geq(\alpha x+\beta y)^2$

13. Να αποδείξετε ότι:

α. $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

β. $(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)^2=4\alpha^2$

γ. $(4x+3y)^2+(3x-4y)^2=25(x^2+y^2)$

δ. $(2x+3y)^2-(2x-3y)^2=24xy$

ε. $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$

στ. $(2x-y)^2-(x-2y)^2=3(x+y)(x-y)$

ζ. $(x^2+1)(y^2+1)-(xy+1)^2=(x-y)^2$

η. $(\alpha+\beta)^3-\alpha^3-\beta^3=3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

θ. $(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2$

ι. $\left(\dfrac{2x+y}{2}\right)^2-\left(\dfrac{2x-y}{2}\right)^2=2xy$

ια. $\dfrac{\left(3\sqrt{7}-1\right)^2-\left(1+3\sqrt{7}\right)^2}{4\sqrt{7}}=-3$

14. Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

i. $a^4+\beta^4=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-2\alpha^2\beta^2$

ii. $\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=4$

iii. $\left(\alpha-\beta+\gamma\right)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\alpha\gamma$

iv. $\left(\dfrac{\alpha-3}{2}\right)^3-\left(\dfrac{\alpha+3}{2}\right)^3=-\dfrac{9\left(\alpha^2+3\right)}{4}$

v. $\left(\dfrac{\alpha-3}{2}\right)^3+\left(\dfrac{\alpha+3}{2}\right)^3=\dfrac{2\alpha\left(\alpha^2+27\right)}{27}$

vi. $\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z+x\right)^2-x^2-y^2-z^2=\left(x-y+z\right)^2$

vii. $\left(3\alpha-\beta\right)^3+3\left(3\alpha-\beta\right)^2\left(\beta-\alpha\right)+3\left(3\alpha-\beta\right)\left(\beta-\alpha\right)^2+\left(\beta-\alpha\right)^3=8\alpha^3$

viii. $\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^2+\left(\alpha-\beta-\gamma\right)^2-\left(\alpha+\beta-\gamma\right)^2-\left(\alpha-\beta+\gamma\right)^2=8\beta\gamma$

ix. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=\dfrac{1}{2}\left[\left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2\right]$

Διάφορες

15. Αν $\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$.

16. Εάν $x-y=5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A=(x+y)^2-4xy$$

17. Αν $x+y=6$ και $x\cdot y=8$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. x^2+y^2 **β.** x^3+y^3 **γ.** $(x+3)(y+3)$

δ. $(x-y)^2$ **ε.** x^4+y^4

18. Αν $(x+y)^2=2(x^2+y^2)$, να αποδείξετε ότι $x=y$.

19. Αν α + β + γ = 2τ, να αποδείξετε ότι:

$$(\tau - \alpha)^2 + (\tau - \beta)^2 + (\tau - \gamma)^2 + \tau^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

20. **α.** Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\,[(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2]$$

β. Αν α + β + γ = 0, να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

21. Αν $\alpha^2 + \beta^2 \le 2\gamma(\alpha + \beta - \gamma)$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές α, β, γ είναι ισόπλευρο.

22. Αν $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=4$ να αποδείξετε ότι $x=y$.

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $(x+5)^2=(3-x)^2+24$

ii. $(3x-2)^2+(2x-3)(2x+3)=2x(7x-22)-(x+3)^2$

24. Αν $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ και $\beta=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\alpha\beta,\quad \mathrm{B}=\alpha^2+\beta^2,\quad \Gamma=\alpha^4+\beta^4,\quad \Delta=2\alpha^2-5\alpha\beta+2\beta^2$$

25. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\ge 2$ για κάθε $\alpha,\beta>0$ **β)** $\alpha+\frac{1}{\alpha}\ge 2$ για κάθε $\alpha>0$ **γ)** $\alpha+\frac{1}{\alpha}\le -2$ για κάθε $\alpha<0$

26. Να βρείτε ποιων τετραγώνων ή κύβων είναι τα παρακάτω αναπτύγματα:

α) $x^{2\nu}+2x^{\nu}+1$ β) $2x^{2(\nu-1)}-2\sqrt{2}x^{\nu-1}\cdot y+y^2$ γ) $64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$

27. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{x^4 - 1}{(x^2+1)(x^2-3)} - \frac{6}{13}$, αν $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$

Διαγωνισμός 'Θαλής' Ε.Μ.Ε.

28. **α.** Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = (x+y)^3 - (x-y)^3 - 6x^2y - y^3$

β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$ είναι κύβος ακεραίου.

Διαγωνισμός 'Ευκλείδης' Ε.Μ.Ε.

29. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + bx + c$, όπου α, b, c πραγματικοί αριθμοί.

α. Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x) = P(2x) - 19P(-x)$.

β. Βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x) = 3x(3x+2)^2$

Διαγωνισμός 'Ευκλείδης' Ε.Μ.Ε.

30. Να υπολογιστούν οι αριθμοί a, b, c για τους οποίους ισχύει:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b - 6c + 14 = 0$$

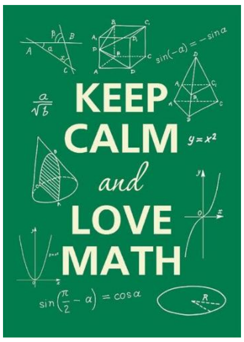
Διαγωνισμός 'Θαλής' Ε.Μ.Ε.

31. **α.** Να αποδείξετε την παρακάτω ταυτότητα:

$x(2x-1)(2x+1) + x = 4x^3$, για κάθε πραγματικό αριθμό χ.

β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{A} = 4031 \cdot 4033 \cdot 32256 + 32256$ είναι κύβος ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Διαγωνισμός 'Ευκλείδης' Ε.Μ.Ε.



Δ. ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. **α.** $(\alpha+4)^2=\alpha^2+8\alpha+16$ **β.** $(10+\kappa)^2=100+20\kappa+\kappa^2$

γ. $(\mu-4)^2=\mu^2-8\mu+16$ **δ.** $(4-x)^2=16-8x+x^2$

ε. $(\alpha+2\beta)^2=\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2$ **στ.** $(6\kappa-5)^2=36\kappa^2-60\kappa+25$

ζ. $(3\alpha+4\beta)^2=9\alpha^2+24\alpha\beta+16\beta^2$ **η.** $(2\alpha-7\beta)^2=4\alpha^2-28\alpha\beta+49\beta^2$

θ. $(-\alpha-\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ **ι.** $(-x+y)^2=y^2-2xy+x^2$

2. **α.** $(\alpha^2+\beta)^2=\alpha^4+2\alpha^2\beta+\beta^2$ **β.** $(\alpha-\beta^3)^2=\alpha^2-2\alpha\beta^3+\beta^6$

γ. $(x^2-y^3)^2=x^4-2x^2y^3+y^6$ **δ.** $(3\alpha^2+4\alpha\beta)^2=9\alpha^4+24\alpha^3\beta+16\alpha^2\beta^2$

ε. $(x^3+3xy^2)^2=x^6+6x^4y^2+9x^2y^4$ **στ.** $(x^\nu-y^\nu)^2=x^{2\nu}-2x^\nu y^\nu+y^{2\nu}$

ζ. $\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)^2=\alpha^2+\alpha\beta+\frac{\beta^2}{4}$ **η.** $\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{4\beta}{3}\right)^2=\frac{9\alpha^2}{4}-4\alpha\beta+\frac{16\beta^2}{9}$

θ. $(x-\sqrt{3})^2=x^2-2\sqrt{3}x+3$ **ι.** $(\sqrt{2}x-\sqrt{5}y)^2=2x^2-2\sqrt{10}xy+5y^2$

ια. $\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{5}}-\beta\sqrt{5}\right)^2=\frac{4\alpha^2}{5}-4\alpha\beta+5\beta^2$ **ιβ.** $\left(\frac{1}{3}x+4\right)^2=\frac{x^2}{9}+\frac{8}{3}x+16$

ιγ. $(3ab^2-2a^2b)^2=9a^2b^4-12a^3b^3+4a^4b^2$ **ιδ.** $\left(3x-\frac{1}{y^2}\right)^2=9x^2-\frac{6x}{y^2}+\frac{1}{y^4}$

3. **α.** $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$ **β.** $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$

γ. $(3-2x)^3=27-54x+36x^2-8x^3$ **δ.** $(2\alpha+3\beta)^3=8\alpha^3+36\beta\alpha^2+54\alpha\beta^2+27\beta^3$

ε. $(\kappa^2-\lambda)^3=\kappa^6-3\kappa^4\lambda+3\kappa^2\lambda^2-\lambda^3$ **στ.** $\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^3=\alpha^3+\frac{3}{2}\alpha^2\beta+\frac{3}{4}\alpha\beta^2+\frac{\beta^3}{8}$

ζ. $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)^3=\frac{x^3}{27}-\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{4}-\frac{y^3}{8}$ **η.** $\left(x^2-\frac{y}{3}\right)^3=x^6-x^4y+\frac{x^2y^2}{3}-\frac{y^3}{27}$

θ. $\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^3=\frac{\alpha^6+3\alpha^4\beta^2+3\alpha^2\beta^4+\beta^6}{8}$ **ι.** $\left(2a^3+\frac{2b^2}{3}\right)^3=8\alpha^9+8\alpha^6b^2+\frac{8\alpha^3b^4}{3}+\frac{8b^6}{27}$

κ. $(x^2+2yz)^3=x^6+6x^4yz+12x^2y^2z^2+8y^3z^3$

λ. $\left(3\kappa\lambda^2-2\lambda^2\right)^3=27\kappa^3\lambda^6-54\kappa^2\lambda^6+36\kappa\lambda^6-8\lambda^6$

4. **α.** $(x-9)(x+9)=x^2-81$ **β.** $(x+4)(x-4)=x^2-16$

γ. $(3-\alpha)(3+\alpha)=9-\alpha^2$ **δ.** $(2\kappa-\lambda)(2\kappa+\lambda)=4\kappa^2-\lambda^2$

ε. $(2x-3y)(2x+3y)=4x^2-9y^2$ **στ.** $(x^2-y)(x^2+y)=x^4-y^2$

ζ. $(\kappa^2+\lambda^{3)}(\kappa^2-\lambda^{3)}=\kappa^4-\lambda^6$ **η.** $(\alpha^3-3\beta)(\alpha^3+3\beta)=\alpha^6-9\beta^2$

θ. $(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3+\beta^3)=\alpha^6-\beta^6$ **ι.** $(2x^2y+6)(2x^2y-6)=4x^4y^2-36$

ια. $(3xy^\nu-\omega^\nu)(\omega^\nu+3xy^\nu)=9x^2y^{2\nu}-\omega^{2\nu}$ **ιβ.** $(0{,}4\alpha+0{,}5\beta)(0{,}4\alpha-0{,}5\beta)=0{,}16\alpha^2-0{,}25\beta^2$

ιγ. $(\kappa\lambda+\mu)(\mu-\kappa\lambda)=\mu^2-\kappa^2\lambda^2$ **ιδ.** $(\alpha^2-\beta)(\beta+\alpha^2)=\alpha^4-\beta^2$

ιε. $\left(\frac{x}{\alpha}+2\right)\left(\frac{x}{\alpha}-2\right)=\frac{x^2}{\alpha^2}-4$ **ιστ.** $\left(\frac{x}{11}+\frac{5y}{12}\right)\left(\frac{x}{11}-\frac{5y}{12}\right)=\frac{x^2}{121}-\frac{25y^2}{144}$

ιζ. $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=x^2-7$ **ιη.** $(\sqrt{5\alpha}-\sqrt{3\beta})(\sqrt{5\alpha}+\sqrt{3\beta})=5\alpha-3\beta$

5. $(3x-2y)(9x^2+4y^2)(3x+2y)=81x^4-16y^4$

6. **α.** $(3x+2)^2=9x^2+12x+4$ **β.** $(5x-2y)^2=25x^2-20xy+4y^2$

γ. $(x+\frac{3}{2})^2=x^2+3x+\frac{9}{4}$ **δ.** $(4x^2-\frac{1}{2})^2=16x^4-4x^2+\frac{1}{4}$

ε. $(5+4x)(5-4x)=25-16x^2$

στ. $(2\alpha+3)^3=4\alpha^2+3\cdot(2\alpha)^2\cdot 3+3\cdot 2\alpha\cdot 3^2+27$

ζ. $x^2+8xy+16y^2=(x+4y)^2$ **η.** $9\alpha^2+6\alpha\beta+\beta^2=(3\alpha+\beta)^2$

θ. $4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2$

7. **α.** 1 **β.** $x^2+6x-59$ **γ.** $-\kappa^2+16\kappa+44$ **δ.** $-\beta^2+4\beta-4$

ε. $16\beta^2$ **στ.** $17x^2+40xy-56y^2$ **ζ.** $2x^3-x^2+2x+1$ **η.** -2

θ. $-6\alpha^2+14\alpha\beta-14\beta^2$ **ι.** $15-2\sqrt{6}$

ια. $-28x^3+28x^2-27x-75$ **ιβ.** $x^2+2xy+y^2-1$

8. **α.** $9x^2+21x+18$ **β.** $2x^3+10x^2-6x-10$

γ. $13x^3+18x^2+21x-8$ **δ.** $8\alpha^3$ **ε.** $6\alpha+\frac{2}{\alpha^3}$

9. **48**

10. $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^3+\beta^3$

$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3=\alpha^3-\beta^3$

11. α) $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta=a^2+\beta^2$

$(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=\alpha^3+\beta^3$

β) $A=7$ και $B=18$

12. .

13. .

14. .

15. $\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2\text{-}2\alpha\beta=0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$

16. $\mathrm{A}=(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2-4\mathrm{xy}=...=(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2=5^2=25$

17. **α.** $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2-2\mathrm{xy}=6^2-2\cdot 8=36-16=20$

β. $\mathrm{x}^3+\mathrm{y}^3=(\mathrm{x}+\mathrm{y})^3-3\mathrm{xy}(\mathrm{x}+\mathrm{y})=6^3-3\cdot 8\cdot 6=216-144=72$

γ. $(\mathrm{x}+3)(y+3)=\mathrm{xy}+3x+3y+9=\mathrm{xy}+3(x+y)+9=8+3\cdot 6+9=35$

δ. $(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2=x^2-2xy+y^2=x^2+y^2-2xy=20-2\cdot 8=4$

ε. $\mathrm{x}^4+\mathrm{y}^4=(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)^2-2\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2=20^2-2\cdot 8^2=272$

18. $(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2=2(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2) \Leftrightarrow \mathrm{x}^2+2xy+\mathrm{y}^2=2\mathrm{x}^2+2\mathrm{y}^2 \Leftrightarrow (\mathrm{x}-\mathrm{y})^2=0 \Leftrightarrow \mathrm{x}=\mathrm{y}$

19. Πράξεις στο πρώτο μέλος

20. α. Πράξεις στο δεύτερο μέλος β. Αντικατάσταση στην ταυτότητα του α. ερωτήματος

21. $\alpha^2+\beta^2\le 2\gamma(\alpha+\beta-\gamma) \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\gamma-2\beta\gamma+2\gamma^2\le 0$ ….

$\Leftrightarrow (\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2\le 0 \Leftrightarrow \alpha=\gamma$ και $\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma$

22. Αν $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=4 \Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{x+y}{xy}\right)=4 \Leftrightarrow (x+y)^2=4xy \Leftrightarrow ...x=y$

23. i) $x=\frac{1}{2}$ ii) $x=-\frac{2}{19}$

24. $\mathrm{A}=1,\quad \mathrm{B}=10,\quad \Gamma=98,\quad \Delta=15$

25. .

26. α) $(x^\nu+1)^2$ β) $\left(\sqrt{2}x^{\nu-1}-y\right)^2$ γ) $(4x-3y)^3$

27. $x=\frac{16}{9}$, $A=13$.

28. **α.** $K=y^3$ **β.** Για x=200000, y=4, $A=4^3$

29. **α.** $Q(x)=27x^3-15\alpha x^2+21bx-18c$. **β.** $\alpha=-\frac{12}{5}, b=\frac{4}{7}, c=0$

30. $a=1, b=2, c=3$.

31.

(α) $x(2x-1)(2x+1)+x=x(4x^2-1)+x=4x^3-x+x=4x^3$.

(β) Επειδή οι ακέραιοι 4031 και 4033 διαφέρουν κατά δύο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $2x-1=4031$, $2x+1=4033$, οπότε θα είναι $x=2016$. Για να αντιστοιχήσουμε τον αριθμό Α στην προηγούμενη ταυτότητα, πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με τον ακέραιο $\frac{32256}{2016}=16$. Τότε αυτή γίνεται: $16x(2x-1)(2x+1)+16x=64x^3$, οπότε θέτοντας $x=2016$, έχουμε:

$$\mathrm{A}=4031\cdot4033\cdot32256+32256=64\cdot2016^3=4^3\cdot2016^3=(4\cdot2016)^3=8064^3.$$

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 8064.