

5. ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΡΑΞΕΙΣ

A. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Τι ονομάζεται πολυώνυμο;

Ονομάζεται πολυώνυμο ένα άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

Π.χ. $10x^4y^8 + 2xy^6 - 5x^3y^2$.

2. Τι ονομάζεται όρος του πολυωνύμου;

Ονομάζεται όρος του πολυωνύμου κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο.

Π.χ. το πολυώνυμο $2x^2 - 3x + 7$ έχει τρεις όρους $2x^2$, $3x$, 7 .

3. Πότε ένα πολυώνυμο λέγεται διώνυμο και πότε τριώνυμο;

Ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους λέγεται:

- διώνυμο, αν έχει δύο όρους
- τριώνυμο, αν έχει τρεις όρους.

4. Τι ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;

Ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς την μεταβλητή αυτή.

5. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό πολυώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

Ονομάζουμε σταθερό πολυώνυμο κάθε αριθμό και μηδενικό πολυώνυμο τον αριθμό 0. Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά πολυώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

6. Τι ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων;

Ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων η πρόσθεση ομοίων μονωνύμων.

7. Πως συμβολίζουμε ένα πολυώνυμο που έχει μία μεταβλητή την x ;

Ένα πολυώνυμο που έχει μία μεταβλητή την x , για παράδειγμα $2x^3 - 4x + 7$ για συντομία συμβολίζεται $P(x)$ ή $Q(x)$ ή $A(x)$ κ.τ.λ.

Π.χ. $P(x) = 2x^3 - 4x + 7$.

8. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι γράφουμε ένα πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x ;

Ένα πολυώνυμο μπορούμε να το γράψουμε έτσι, ώστε κάθε όρος του να είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον επόμενο του.

Π.χ. το πολυώνυμο $2x^3 + 3x^2 - 6x + 21$.

9. Πως μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε πολυώνυμα;

Μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε πολυώνυμα χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών και την αναγωγή ομοίων όρων.

10. Πως πολλαπλασιάζουμε:

- α. Μονώνυμο με πολυώνυμο;
- β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο;

Για να πολλαπλασιάσουμε:

α. **Μονώνυμο με πολυώνυμο** πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

β. **Πολυώνυμο με πολυώνυμο** πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.



B. ΣΧΟΛΙΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αναγωγή ομοίων όρων (πρόσθεση πολυωνύμων)

(κάνουμε πράξεις, πρόσθεση κι αφαίρεση, μόνο με τα όμοια)

Π.χ. $3x + 5 =$ ΤΙΠΟΤΑ (έπρεπε να έχω μόνο x ή μόνο νούμερα)

$$7x^2 + 7x = \text{ΤΙΠΟΤΑ} \text{ (έπρεπε να έχω μόνο } x^2 \text{ ή μόνο } x)$$

$$2x^2 + 3 = \text{ΤΙΠΟΤΑ} \text{ (έπρεπε να έχω μόνο } x^2 \text{ ή μόνο νούμερα)}$$

$$3x + y = \text{ΤΙΠΟΤΑ} \text{ (έπρεπε να έχω μόνο } x \text{ ή μόνο } y)$$

$$3\alpha + 2\beta = \text{ΤΙΠΟΤΑ} \text{ (έπρεπε να έχω μόνο } \alpha \text{ ή μόνο } \beta)$$

$$3x - 7x = -4x$$

$$8x^2 + 5x^2 = 13x^2$$

$$5\omega - 3\omega = 2\omega$$

2. Πράξεις με τα x

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΑ x
$1x = 1 \cdot x = x$
$0x = 0 \cdot x = 0$
$x + x = 2x$
$x \cdot x = x^2$
$x \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x = x^3$
$2 \cdot 3x = 6x$
$2x \cdot 5x^2 = 10x^3$

3. Προσθαφαίρεση πολλών όρων

Μόνο με αριθμούς

$$A = \underline{3} + \underline{4} - 7 - 8 + \underline{4} - 6 - 7 + \underline{1} - 5 + \underline{6} + \underline{2} - 4 - 9$$

Γράφω πρώτα τα (+) και μετά τα (-)

$$A = \underline{3+4+4+1+6+2} - \underline{7-8-6-7-5-4-9}$$

Διαγράφουμε αντίθετους (+α, -α), αν υπάρχουν

$$A = \underline{3+4+4+1+6+2} - \underline{7-8-6-7-5-4-9}$$

Προσθέτουμε όλα τα (+) και βάζουμε (+), προσθέτουμε όλα τα (-) και βάζουμε (-)

$$A = +10 - 36$$

Κάνουμε την αφαίρεση

$$A = -26$$

Με αναγωγές x^2 , x , αριθμούς

$$B = \underline{3x} - \underline{5x^2} + 6 - \underline{3x} - 7 - \underline{2x} + 5 + \underline{7x^2} - \underline{5x} - 2 + 4 + \underline{5x^2} + \underline{6x^2} - \underline{3x} - \underline{8x^2} - 4 - \underline{6x} - 11 - \underline{4x}$$

Γράφω πρώτα τα x^2 , μετά τα x , μετά τους αριθμούς (με την σειρά που τα συναντώ)

$$B = \underline{-5x^2+7x^2+5x^2+6x^2-8x^2} + \underline{3x-3x-2x-5x-3x-6x-4x} + \underline{6-7+5-2+4-4-11}$$

Χωρίζουμε σε κάθε όμοιο όρο τους θετικούς από τους αρνητικούς

$$B = + \underline{7x^2+5x^2+6x^2-5x^2-8x^2} + \underline{3x-3x-2x-5x-3x-6x-4x} + \underline{6+5+4-7-2-4-11}$$

Διαγράφουμε αντίθετους (+α, -α), αν υπάρχουν

$$B = + \underline{7x^2+5x^2+6x^2-5x^2-8x^2} + \underline{3x-3x-2x-5x-3x-6x-4x} + \underline{6+5+4-7-2-4-11}$$

Προσθέτουμε σε κάθε όρο τα (+) και βάζουμε (+), προσθέτουμε τα (-) και βάζουμε (-)

$$B = + \underline{13x^2-8x^2-20x+11-20}$$

Κάνουμε τις προσθαφαιρέσεις (στα x^2 , στα x , στους αριθμούς)

$$B = 5x^2 - 20x - 9$$

4. Φθίνουσες δυνάμεις του x

Η παράσταση $3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 12$ είναι ένα πολυώνυμο 4ου βαθμού, διατεταγμένο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής x.

5. Σταθερό- Μηδενικό πολυώνυμο

Το $5=5x^0$ δηλαδή κάθε αριθμός θεωρείται **σταθερό** πολυώνυμο με βαθμό το 0.

Το $0=0x^0$ λέγεται **μηδενικό** πολυώνυμο.

6. Πρόσθεση – αφαίρεση πολυωνύμων

Για την πρόσθεση και την αφαίρεση πολυωνύμων χρειάζεται να θυμηθούμε τον κανόνα της απαλοιφής παρενθέσεων:

- αν η παρένθεση έχει μπροστά της θετικό πρόσημο, τότε τη βγάζουμε και στη θέση της ξαναγράφουμε όλους τους αριθμούς με το ίδιο ακριβώς πρόσημο.
- αν η παρένθεση έχει μπροστά της αρνητικό πρόσημο, τότε τη βγάζουμε και στη θέση της ξαναγράφουμε όλους τους αριθμούς αλλά με αντίθετο πρόσημο.

Η πρόσθεση πολυωνύμων είναι μια εύκολη διαδικασία!

Βγάζουμε τις παρενθέσεις χωρίς ν' αλλάξουμε τίποτε και στη συνέχεια κάνουμε «αναγωγή ομοίων όρων». Δηλαδή, ξεχωρίζουμε και προσθέτουμε μονάχα τα μονώνυμα εκείνα που είναι μεταξύ τους όμοια. Για την αφαίρεση, η μόνη δυσκολία είναι η αλλαγή μερικών προσήμων.

Παράδειγμα:

$6\alpha\beta - 10\alpha^2 + \beta^3 - (7\alpha^2 - 25\alpha\beta + \beta^3) =$▶	Βγάζουμε την παρένθεση και αλλάζουμε τα πρόσημα
$6\alpha\beta - \underline{10\alpha^2} + \beta^3 - \underline{7\alpha^2} + \underline{25\alpha\beta} - \beta^3 =$▶	Υπογραμμίζουμε τα όμοια
$31\alpha\beta - 17\alpha^2 + 0\beta^3 =$▶	Αναγωγή ομοίων όρων
$31\alpha\beta - 17\alpha^2$		

7. Πολλαπλασιασμός Μονώνυμων – Πολυώνυμων

Για τον πολλαπλασιασμό μονώνυμου με πολυώνυμο ή πολυώνυμων μεταξύ τους, χρειαζόμαστε μόνο την **επιμεριστική ιδιότητα**.

Πολλαπλασιασμός μονώνυμου με πολυώνυμο

Π.χ.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \\ -2\alpha^2 \cdot (5\alpha\beta - \alpha^3 + 3\beta) = \\ -10\alpha^3\beta + 2\alpha^5 - 6\alpha^2\beta. \end{array}$$

Πολλαπλασιασμός πολυώνυμων

Π.χ.

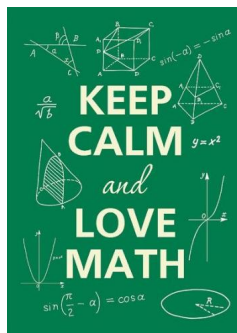
$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \\ (2xy - y) \cdot (3x + 5 - 4xy) = \\ 6x^2y + \underline{10xy} - 8x^2y^2 - \underline{3xy} - 5y + 4xy^2 = \\ 6x^2y + 7xy - 8x^2y^2 - 5y + 4xy^2. \end{array}$$

Παρατηρήσεις

Εκτός από τα βελάκια, ένας χρήσιμος τρόπος στην επιμεριστική ιδιότητα, για να μην μπερδευόμαστε κατά την εκτέλεση των πράξεων, είναι για κάθε ζευγάρι αριθμών που πολλαπλασιάζουμε να θυμόμαστε την εξής σειρά:

1. Βρίσκουμε το σωστό πρόσημο, εφαρμόζοντας τους κανόνες των προσήμων,
2. Πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές,
3. Πολλαπλασιάζουμε τις μεταβλητές, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Εκτελούμε τα παραπάνω βήματα με αυτή τη σειρά και μετά ξανά από την αρχή για το επόμενο ζευγάρι.



Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 3x + 2x^2 + 7$ και $Q(x) = x^2 - 4x + 9$.

i. Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x) + Q(x)$ και $2 \cdot P(x) - 4 \cdot Q(x)$

ii. Να βρείτε το βαθμό των πολυωνύμων: $P(x)$, $Q(x)$, $P(x) + Q(x)$ και $2 \cdot P(x) - 4 \cdot Q(x)$.

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (a - 1)x^3 + 2x^2 + 3ax + 4$

i. Για ποια τιμή του a το $P(x)$ δεν είναι τρίτου βαθμού;

ii. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου όταν $a = 1$.

iii. Για $a = 1$, να υπολογίσετε την παράσταση $P(2) + P(-2)$.

3. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $A = (2x + 3)(x^2 + x - 1) - (x^2 - 1)(x + 2) - 2x^3$

i. Να δείξετε ότι $A = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

ii. Αν $x = -2$ τότε να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης A .

4. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ και $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $P(x) + Q(x)$ β) $P(x) - Q(x)$ γ) $P(-x)$ δ) $P(x) + P(-x)$

ε) $Q(2x)$ στ) $2P(x) + 3Q(x)$ ζ) $P(x) \cdot Q(x)$ η) $P(-1) + Q(-1)$

5. Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = x^2 - 2x + 1$, $B(x) = 2x^2 - 3$ και

$\Gamma(x) = -x^3 + 5x^2 - 2$.

i. Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x) = -2A(x) + B(x) - \Gamma(x)$ και

$Q(x) = A(x) \cdot B(x)$ και να τα γράψετε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x .

ii. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των δυο πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$ για $x = -1$.

6. Να γίνουν οι πράξεις:

α. $-3\alpha^2 + (-2\alpha + 5) - [-(4\alpha^2 - 3\alpha) - 8]$

β. $2[2(x - y) - 3(x - 2y)] - 4[3(x^2 + y^2) + 7xy - (x^2 - y)]$

γ. $(x + y)(y + z) - (z + \omega)(\omega + x) - (x + z)(y - \omega)$

δ. $2x(x - 2)(3x + 1) - 3x(x + 1)(2x - 3)$

ε. $(\alpha^2 - \alpha + 1) - [(\alpha^2 + \alpha + 2) - (2\alpha + 3) - (\alpha^2 - 4\alpha + 3) + \alpha] - (\alpha^2 - \alpha + 6)$

στ. $(x^2 - x + 1)(x + 1)$

ζ. $3x(x^2 - 1) - 4x^2(x - 2) + 4(x^2 - 1)$

η. $3x(x^2 - 5) - 4x^2(x + 2) + 4x(x^2 - 1)$

θ. $(-\alpha^3 + 5\alpha^2 + \alpha)(-2\alpha^2 + 3\alpha) + (5\alpha - 7\alpha^2)(-3 + 4\alpha - 6\alpha^2 + \alpha^3)$

ι. $-(3\alpha + 2\beta) + (3\beta - \alpha - 4) - (-4 + \beta)$

ια. $-4\alpha[(1 - \alpha^2) - \alpha(\alpha - 2)] + 3\alpha - 2(1 - 3\alpha^2)$

ιβ. $\left(\frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} - 5x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{5}x^2\right)$

ιγ. $-5x^2(x^3 - 2x^2 + 4) + (1 - 2x)(-4x^3) - x(x - 1) - 2x$

ιδ. $2\alpha(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - \beta^3 - (\alpha - \beta)(-3\alpha\beta) - 4\alpha^2\beta$

7. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με μήκος x cm και πλάτος y cm, είναι 8 cm. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = -x^2 + 4x$ cm².

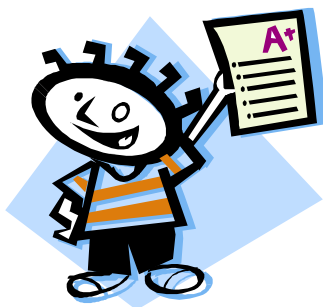
8. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$A(x) = -(\alpha + 2)x^2 - 2x + 3\alpha + 5 \text{ και } B(x) = -4x^2 - 2x + 8.$$

- i. Να βρείτε την τιμή του α , για την οποία ισχύει $A(-1) = 7$.
- ii. Για $\alpha=1$, να βρείτε το πολυώνυμο $\Gamma(x) = A(x) - B(x)$.
- iii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\sqrt{\Gamma(2020)}$.
- iv. Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $\Delta = [\Gamma(16)]^7 \cdot [\Gamma(125)]^9$.

9. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{2021} \cdot (2x - 1)^{2020}$.

- i. Να βρείτε τον σταθερό όρο του πολυωνύμου $P(x)$.
- ii. Να βρείτε το άθροισμα των συντελεστών των όρων του πολυωνύμου $P(x)$.



Δ. ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. i) $P(x) + Q(x) = 3x^2 - x + 16$ και $2P(x) - 4Q(x) = 22x - 22$
ii) Τα $P(x)$, $Q(x)$, $P(x) + Q(x)$ είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού και το $2 \cdot P(x) - 4 \cdot Q(x)$ είναι $1^{\text{ου}}$ βαθμού.
2. α) $\alpha = 1$ β) $2^{\text{ου}}$ βαθμού γ) $P(2) + P(-2) = 24$.
3. ii) $A = 15$
4. α. $P(x) + Q(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 + 3x + 2$ β. $P(x) - Q(x) = -x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - 4$
γ. $P(-x) = -x^3 - 4x^2 - 3x - 1$ δ. $P(x) + P(-x) = -8x^2 - 2$
ε. $Q(2x) = 16x^4 - 8x^2 + 3$ στ. $2P(x) + 3Q(x) = 3x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 6x + 7$
ζ. $P(x) \cdot Q(x) = x^7 - 4x^6 + x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 9x - 3$ η. $P(-1) + Q(-1) = -1$
5. i. $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ και $Q(x) = 2x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x - 3$
ii. $P(-1) = -13$ και $Q(-1) = -4$.
6. α. $\alpha^2 - 5\alpha + 13$ β. $-8x^2 - 12y^2 - 2x + 4y - 28xy$
γ. $y^2 - \omega^2$ δ. $-7x^2 + 5x$ ε. $-4\alpha - 1$ στ. $x^3 + 1$
ζ. $-x^3 + 12x^2 - 3x - 4$ η. $3x^3 - 8x^2 - 19x$
θ. $-5\alpha^5 + 34\alpha^4 - 45\alpha^3 + 44\alpha^2 - 15\alpha$ ι. -4α
ια. $8\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha - 2$ ιβ. $\frac{3x^5 - 6x^4 - 60x^3 - 6x^2}{10}$
ιγ. $-5x^5 + 18x^4 - 4x^3 - 21x^2 - x$ ιδ. $2\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha^2\beta - \alpha\beta^2$
7.
8. i. $\alpha = 1$ ii. $\Gamma(x) = x^2$ iii. 2020 iv. $\Delta = 2^2 \cdot 10^{54}$. Άρα 55 ψηφία.
9. i. Ο σταθερός όρος του $P(x)$ είναι ίσος με την τιμή του $P(x)$ για $x=0$. Άρα $P(0) = 1$.
ii. Το άθροισμα των συντελεστών των όρων του πολυωνύμου $P(x)$ είναι ίσο με την τιμή του $P(x)$ για $x=1$. Άρα $P(1) = -1$.

