3. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Τι ονομάζετε τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού x; Πως συμβολίζεται; Ποια είναι η τετραγωνική ρίζα του μηδενός;

Ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x ο θετικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό x. Συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

Ορίζουμε ακόμη $\sqrt{0}=0$.

2. Γιατί δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού;

Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού γιατί δεν υπάρχει αρνητικός αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός αριθμός.

3. Να συμπληρώσετε σωστά τις παρακάτω προτάσεις:

Αν $x \geq 0$, τότε $\left(\sqrt{x}\right)^2 = ...$.

Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\sqrt{x^2} = ...$.

Αν $x \geq 0$, τότε $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\sqrt{x^2} = |x|$.

4. Να αποδείξετε ότι για δύο μη αρνητικούς αριθμούς α και β το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους. Δηλαδή αν α ≥ 0 και β ≥ 0, τότε $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$.

Για να αποδείξουμε την ισότητα $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ υπολογίζουμε το τετράγωνο κάθε μέλους της ξεχωριστά:

$$\left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2\cdot\left(\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha\cdot\beta$$

$$\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)^2=\alpha\cdot\beta$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μη αρνητικοί αριθμοί $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ έχουν το ίδιο τετράγωνο $\alpha\cdot\beta$, άρα είναι ίσοι.

Άρα $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$.

5. Να αποδείξετε ότι για δύο μη αρνητικούς αριθμούς α και β το πηλίκο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου τους.

Δηλαδή αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$.

Για να αποδείξουμε την ισότητα $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ υπολογίζουμε το τετράγωνο κάθε μέλους της ξεχωριστά:

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\beta}\right)^2}=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2=\frac{\alpha}{\beta}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μη αρνητικοί αριθμοί $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ έχουν το ίδιο τετράγωνο $\dfrac{\alpha}{\beta}$, άρα είναι ίσοι.

Άρα $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$.

6. Να συμπληρώσετε το κενό με το κατάλληλο σύμβολο(<, >, =, ≠).

Αν α και β είναι θετικοί αριθμοί, τότε $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\,......\sqrt{\alpha+\beta}$ **.**

Αν α και β είναι θετικοί αριθμοί, τότε $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\alpha+\beta}$ **.**

Β. ΣΧΟΛΙΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Παρατηρήσεις στον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας

- Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού ξέρουμε ότι, για παράδειγμα:

  $\sqrt{25}=5$ γιατί 5·5 = 25,

  $\sqrt{64}=8$ γιατί 8·8 = 64 και

  $\sqrt{49}=7$ γιατί $7^2=49$.

- Οι αρνητικοί αριθμοί δεν έχουν ρίζα. Ο αριθμός $\sqrt{-16}$ δεν υπάρχει διότι το υπόριζο είναι αρνητικό.
- Κάποιες ρίζες υπολογίζονται εύκολα, όμως κάποιες άλλες δεν μπορούμε να τις υπολογίσουμε εύκολα, με το μυαλό. Οι αριθμοί αυτοί είναι άρρητοι και, συνήθως, τους αφήνουμε όπως είναι, ενώ αν χρειάζεται τους υπολογίζουμε κατά προσέγγιση με ένα κομπιουτεράκι.

  π.χ. $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{100}=10$ αλλά $\sqrt{2}=1,41421356237309\ldots$

- Ο υπολογισμός μιας τετραγωνικής ρίζας γίνεται:
  i) Με δοκιμές
  ii) Με κομπιουτεράκι
  iii) Με πίνακες
  iv) Με πράξεις

2. Προσοχή!!!

- Τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού ΔΕΝ σημαίνει το μισό του! Προσέχουμε λοιπόν να μην κάνουμε ένα πολύ συχνό λάθος στις ρίζες:

  $\sqrt{16}=4$ **ΣΩΣΤΟ!**

  $\sqrt{16}\cancel{=8}$ **ΛΑΘΟΣ!**

- $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

  π.χ. $\sqrt{3^2}=|3|=3$, $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$, και όχι $\sqrt{(-3)^2}=-3$!!

3. Ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών

$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$

π.χ. $\sqrt{2}\sqrt{18}=\sqrt{36}=6$

$\sqrt{5}\sqrt{3}=\sqrt{15}=3{,}872...$ (περίπου)

$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

π.χ. $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{12}{3}}=\sqrt{4}=2$.

$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\alpha+\beta}$

Δεν προσθέτουμε ρίζες με διαφορετικό υπόριζο

π.χ. $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$, $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, άρα $\sqrt{9}+\sqrt{16}\neq\sqrt{9+16}$

Μπορούμε όμως να προσθέσουμε, αν το υπόριζο είναι το ίδιο.

π.χ. $4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (Θεωρούμε την $\sqrt{2}$ σαν μεταβλητή).

4. Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό(Ρητοποίηση)

Είναι πιο βολικό(μπορούμε να κάνουμε πιο εύκολα πράξεις) όταν έχουμε κλάσμα με άρρητη ρίζα στον παρονομαστή, να το μετατρέπουμε σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή. Αυτό γίνεται αν πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον παρονομαστή.

π.χ. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

Γενικότερα, αν έχουμε το κλάσμα $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ που ο παρονομαστής είναι ένας άρρητος αριθμός, τότε πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τον παρονομαστή.

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha\cdot\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\left(\sqrt{\beta}\right)^2}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\beta}.$$

5. Απλοποίηση τετραγωνικής ρίζας.

Να απλοποιήσουμε μια ρίζα σημαίνει ο αριθμός που είναι κάτω από το σύμβολο της ρίζας(υπόριζο) να γίνει μικρότερος. Προσπαθούμε να γράψουμε, αυτόν τον αριθμό, ως γινόμενο δύο αριθμών που ο ένας να είναι τέλειο τετράγωνο.

π.χ. $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

π.χ. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}-\sqrt{50}$.

$$\begin{aligned}&\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}-\sqrt{50}=\\&=\sqrt{4\cdot 2}+\sqrt{9\cdot 2}-\sqrt{16\cdot 2}-\sqrt{25\cdot 2}=\\&=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}-5\sqrt{2}=-4\sqrt{2}\end{aligned}$$

6. Χαρακτηριστικές τετραγωνικές ρίζες που είναι καλό να θυμόμαστε

$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{121}=11$	$\sqrt{256}=16$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{144}=12$	$\sqrt{289}=17$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{169}=13$	$\sqrt{324}=18$
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{196}=14$	$\sqrt{361}=19$
$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{100}=10$	$\sqrt{225}=15$	$\sqrt{400}=20$

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες:

α. $\sqrt{81}$ **β.** $\sqrt{\dfrac{9}{4}}$

γ. $\sqrt{(-3)^2}$ **δ.** $\sqrt{144}$

ε. $\sqrt{1}$ **στ.** $\sqrt{0}$

ζ. $\sqrt{0,25}$ **η.** $\sqrt{1,69}$

θ. $\sqrt{7^2}$ **ι.** $\sqrt{\dfrac{1}{36}}$

2. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

α. $\sqrt{9}-\sqrt{16}+\sqrt{25}$ **β.** $\sqrt{9+16}+\sqrt{21-5}+\sqrt{15-6}$

γ. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}$ **δ.** $\sqrt{400}-\sqrt{1,69}-\sqrt{0,49}$

ε. $\left(\sqrt{12}\right)^2+\sqrt{2^6}+2\sqrt{(-10)^2}$ **στ.** $\sqrt{\sqrt{81}}$

ζ. $\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}}$ **η.** $\left(2\sqrt{3}\right)^4$

3. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

α. $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ **β.** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$

γ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}$ **δ.** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}-\sqrt{16\cdot 64}$

ε. $\dfrac{3\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ **στ.** $\dfrac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{24}}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{4}}$

ζ. $\sqrt{\dfrac{3}{5}}\cdot\sqrt{\dfrac{5}{3}}+\sqrt{6}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **η.** $\dfrac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}}$

4. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

α. $\sqrt{75}+\sqrt{12}-\sqrt{300}$

β. $\sqrt{72}+\sqrt{8}-2\sqrt{200}$

γ. $\dfrac{2\sqrt{50}}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}$

δ. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{1+\sqrt{2}}$

5. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

α. $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$ **β.** $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$

6. Αν $x=\sqrt{2}$ να υπολογίσετε την παράσταση $3x^4-2x^3+5x^2-2x-7$.

7. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητούς παρονομαστές:

α. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **β.** $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

γ. $\dfrac{4}{\sqrt{8}}$ **δ.** $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

8. Αν $\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ και $\beta=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της κάθε παράστασης:

α. $\alpha+\beta$ **β.** $\alpha-\beta$ **γ.** $\alpha\cdot\beta$

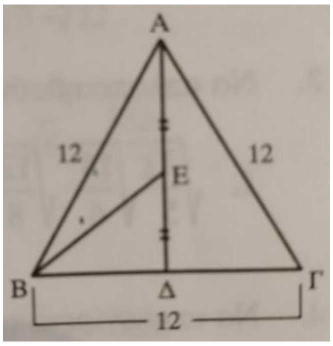
9. Να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$\mathrm{A}=\sqrt{(\pi-3)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(\pi+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$$

10. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 12.

Αν Ε είναι το μέσο της διαμέσου του ΑΔ,

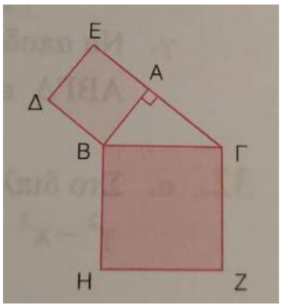
τότε να δείξετε ότι το μήκος ΒΕ είναι ίσο με $3\sqrt{7}$.



Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε.

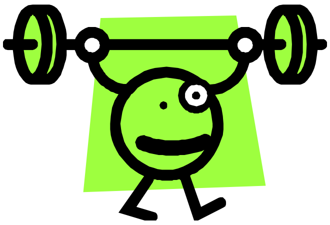
11. Στο διπλανό σχήμα τα εμβαδά των τετραγώνων ΑΒΔΕ και ΒΓΖΗ είναι 18 cm^2 και 50 cm^2 αντίστοιχα.

Να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.



12. α) Πότε δεν έχει νόημα το σύμβολο $\sqrt{x}$;

β) Πότε η παράσταση $2020+\sqrt{-x}$ έχει νόημα; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.



Δ. ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. **α.** 9 **β.** $\frac{3}{2}$ **γ.** 3 **δ.** 12 **ε.** 1 **στ.** 0

ζ. 0,5 **η.** 1,3 **θ.** 7 **ι.** $\frac{1}{6}$

2. **α.** 4 **β.** 12 **γ.** 3 **δ.** 18 **ε.** 40 **στ.** 3

ζ. $\frac{2}{3}$ **η.** 144

3. **α.** 4 **β.** 6 **γ.** $\frac{1}{3}$ **δ.** -24 **ε.** 6 **στ.** $\sqrt{2}$

ζ. 3 **η.** 2

4. **α.** $-2\sqrt{3}$ **β.** $-12\sqrt{2}$ **γ.** 2 **δ.** $\sqrt{5}$

5. **α.** 2 **β.** $8-2\sqrt{15}$

6. $15-6\sqrt{2}$

7. **α.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **β.** $\sqrt{5}$ **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $2\sqrt{2}$

8. **α.** $2\sqrt{3}$ **β.** $2\sqrt{2}$ **γ.** 1

9. Α= -4

10.

11. $12\sqrt{2}$

12. α) δεν έχει νόημα όταν χ αρνητικός. β) έχει νόημα όταν ο χ είναι αρνητικός ή μηδέν.