2. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Τι ονομάζετε δύναμη α^{ν} με βάση τον πραγματικό α και εκθέτη το φυσικό $\nu \geq 2$; Πως ορίζουμε την δύναμη όταν $\nu = 1$, $\nu = 0$ και για εκθέτη αρνητικό ακέραιο;

Ονομάζεται δύναμη α^{ν} με βάση τον αριθμό α και εκθέτη το φυσικό $\nu \geq 2$, το γινόμενο από ν παράγοντες ίσους με α.

$$\text{Δηλαδή, } \alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

Ορίζουμε ακόμη: $\alpha^{1} = \alpha$,

$\alpha^{0} = 1$ με $\alpha \neq 0$ και

$\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$ με $\alpha \neq 0$ και $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητές των δυνάμεων με βάση πραγματικό και εκθέτη ακέραιο;

Για δυνάμεις, με εκθέτες γενικά ακέραιους αριθμούς, ισχύουν(με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται) οι επόμενες ιδιότητες:

Ιδιότητες	Παραδείγματα
$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$	$3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$
$(\alpha\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\beta^{\nu}$	$(2x)^2 = 2^2x^2 = 4x^2$
$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3} = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$
$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$	$(2^{-3})^{-2} = 2^6 = 64$
$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{4}$

Β. ΣΧΟΛΙΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Παρατηρήσεις στον ορισμό των δυνάμεων

- Στην δύναμη α^ν (την διαβάζουμε «**νιοστή δύναμη του α**») το α λέγεται **βάση** και το ν **εκθέτης**.
- Μια δύναμη είναι ένας πολλαπλασιασμός (γινόμενο) από ίσους αριθμούς (παράγοντες).

Για παράδειγμα, το γινόμενο $2\cdot2\cdot2$ είναι μια δύναμη, ενώ το $2\cdot3\cdot4$ δεν είναι!

Συμφωνήσαμε λοιπόν ότι αντί να γράφουμε $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$ θα γράφουμε 2^5 και θα διαβάζουμε «δύο στην πέμπτη».

Και αντίστοιχα όταν θα γράφουμε 5^2 θα διαβάζουμε «πέντε στην δευτέρα» και θα καταλαβαίνουμε $5\cdot5$.

- Η δύναμη α^2 λέγεται και τετράγωνο του α ή α στο τετράγωνο.
- Η δύναμη α^3 λέγεται και κύβος του α ή α στον κύβο.
- Υψώνω το 5 στην 3η δύναμη σημαίνει βάζω στο 5 εκθέτη το 3. Δηλαδή 5^3.
- **Ειδικές περιπτώσεις:** $1^\nu=1$, $0^\nu=0$, $\alpha^0=1$, $\alpha^1=\alpha$.

2. Προσοχή!!!

- Δεν ορίζεται δύναμη με βάση το μηδέν και εκθέτη αρνητικό ακέραιο ή μηδέν.
- Προσέχουμε επίσης να μην κάνουμε ένα πολύ συχνό λάθος στις δυνάμεις:

$$2^4 = 2\cdot2\cdot2\cdot2 = 16 \qquad \textbf{ΣΩΣΤΟ!}$$

$$\cancel{2^4 = 2\cdot4 = 8} \qquad \textbf{ΛΑΘΟΣ!}$$

- Δείτε ακόμα τα παραδείγματα

$2^3=2\cdot2\cdot2=8$ (Η βάση της δύναμης είναι το 2)

$(-2)^3=(-2)(-2)(-2)=-8$ (Η βάση της δύναμης είναι το –2)

$-2^3=-2\cdot2\cdot2=-8$ (Η βάση της δύναμης είναι το 2, το – είναι πρόσημο στη δύναμη 2^3)

$2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$

$(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=+16$ (Η βάση της δύναμης είναι το –2)

$-2^4=-2\cdot2\cdot2\cdot2=-16$ (Η βάση της δύναμης είναι το 2)

3. Ιδιότητες των δυνάμεων(με λόγια)

α) Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση αφήνουμε την ίδια βάση και προσθέτουμε τους εκθέτες: $\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$ π.χ. $2^3 2^5=2^8$

β) Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση αφήνουμε την ίδια βάση και αφαιρούμε τους εκθέτες: $\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$ π.χ. $5^7:5^4=5^3$

γ) Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτόν: $(\alpha\beta\gamma)^{\nu}=\alpha^{\nu}\beta^{\nu}\gamma^{\nu}$ π.χ. $(2\cdot3\cdot4)^3=2^3 3^3 4^3$

δ) Για να υψώσουμε ένα κλάσμα σε έναν εκθέτη υψώνουμε κάθε όρο του κλάσματος στον εκθέτη αυτό: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}=\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$ π.χ. $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$

ε) Για να υψώσουμε μια δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών: $(\alpha^{\nu})^{\mu}=\alpha^{\nu\mu}$ π.χ. $(2^3)^4=2^{12}=4096$

4. Πρόσημο δύναμης

α) Δύναμη με βάση θετικό είναι θετικός αριθμός

π.χ. $3^4=81$.

β) Δύναμη με βάση αρνητικό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός

π.χ. $(-2)^6=+64$.

γ) Δύναμη με βάση αρνητικό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός

π.χ. $(-2)^3=-8$.

5. Δυνάμεις του 10

Για τις δυνάμεις του 10 έχουμε

$$10^{\nu}=1\underbrace{000...0}_{\nu\ \text{μηδενικά}} \text{ δηλαδή } 10^3=1000$$

$$10^{-\nu}=\underbrace{0,00...01}_{\nu\ \text{μηδενικά}} \text{ δηλαδή } 10^{-3}=0,001.$$

6. Χαρακτηριστικές δυνάμεις που είναι καλό να θυμόμαστε

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

1^3	2^3	3^3	4^3	5^3
1	8	27	64	125

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

3^1	3^2	3^3	3^4	3^5
3	9	27	81	243

7. Ποια είναι η Προτεραιότητα των πράξεων;

Για να υπολογίσουμε μια αριθμητική παράσταση κάνουμε τις πράξεις με τη σειρά:

α) Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.

β) Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.

γ) Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

δ) Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

Α. Χωρίς Παρενθέσεις

Για να υπολογίσουμε μια αριθμητική παράσταση κάνουμε τις πράξεις με τη σειρά:

1. Δυνάμεις
2. Πολλαπλασιασμοί – Διαιρέσεις
3. Προσθέσεις - Αφαιρέσεις

$$A = 4\cdot 2^3 - 8 : 2^2 + 6^1 : (-3) - 4^2 : (-2) + 6^2 : 7^0 - 5^2 + 3^3 : 9^1 + (-7)^2 : 2^0$$

Κάνουμε πρώτα μόνο τις δυνάμεις και αφήνουμε τα υπόλοιπα όπως είναι

$$A = 4 \cdot 8 - 8 : 4 + 6 : (-3) - 16 : (-2) + 36 : 1 - 25 + 27 : 9 + 49 : 1$$

Μετά κάνουμε μόνο τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις προσέχοντας τα πρόσημα

$$A = 32 - 2 - 2 + 8 + 36 - 25 + 3 + 49$$

Τέλος κάνουμε προσθέσεις κι αφαιρέσεις , χωρίζοντας τους θετικούς από τους αρνητικούς

$$A = \underline{32 + 8 + 36 + 3 + 49} - \underline{2 - 2 - 25}$$

Προσθέτω όλα τα (+) και βάζω (+), προσθέτω όλα τα (-) και βάζω (-)

$$A = 128 - 29 = 99$$

Β. Με Παρενθέσεις

Κάνουμε τις πράξεις μόνο μέσα στις παρενθέσεις με τη παραπάνω σειρά (1-2-3) , αφήνοντας τα υπόλοιπα έξω από τις παρενθέσεις όπως είναι και μόλις φύγουν οι παρενθέσεις κάνουμε τις πράξεις όπως πριν (με την σειρά 1-2-3)

$$B = 2(3^1 - 7 : 2^0)\left(-7^2 + 6 : 2 + 2 \cdot 5^2\right)^2 - 2^2\left(3 - 4^2 : (-8)\right) - (4 \cdot 5 - 4 - 4 \cdot 3)(2 - 5) + (-6)^2 : 4 + 5 : (-5)$$

Κάνουμε τις πράξεις μόνο μέσα στις παρενθέσεις με την γνωστή σειρά και αφήνουμε τα υπόλοιπα όπως είναι, μέχρι σε κάθε παρένθεση να μείνει ένας αριθμός

$$B = 2(3 - 7 : 1)(-49 + 6 : 2 + 2 \cdot 25)^2 - 2^2(3 - 16 : (-8)) - (20 - 4 - 12)(-3) + (-6)^2 : 4 + 5 : (-5)$$

$$B = 2(3 - 7)(-49 + 3 + 50)^2 - 2^2(3 + 2) - (20 - 16)(-3) + (-6)^2 : 4 + 5 : (-5)$$

$$B = 2(-4)(+3 + 50 - 49)^2 - 2^2(5) - (4)(-3) + (-6)^2 : 4 + 5 : (-5)$$

$$B = 2(-4)(53 - 49)^2 - 2^2(5) - (4)(-3) + (-6)^2 : 4 + 5 : (-5)$$

$$B = 2(-4)(4)^2 - 2^2(5) - (4)(-3) + (-6)^2 : 4 + 5 : (-5)$$

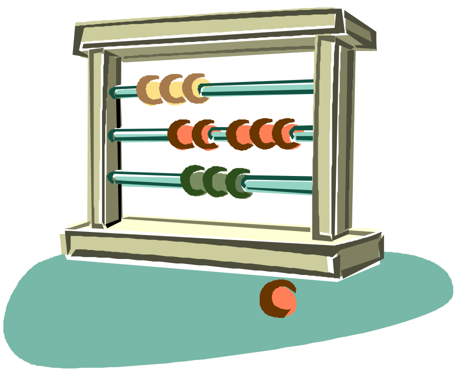
Τότε κάνω τις πράξεις με την παραπάνω σειρά προσέχοντας τα πρόσημα

$$B = 2(-4)16 - 4(5) - (4)(-3) + 36 : 4 + 5 : (-5)$$

$$B = -128 - 20 + 12 + 9 - 1$$

$$B = \underline{+12 + 9} - \underline{128 - 20 - 1}$$

$$B = 21 - 149 = -128$$



Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α. $2^3 =$

β. $2^4 =$

γ. $(-2)^3 =$

δ. $(-2)^4 =$

ε. $-2^3 =$

στ. $0^3 =$

ζ. $1^{2020} =$

η. $2020^0 =$

θ. $2^{-3} =$

ι. $3^{-2} =$

2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α. $2^3 \cdot 2^5 =$

β. $2^5 : 2^3 =$

γ. $(2x)^3 =$

δ. $2^3 \cdot 5^3 =$

ε. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 =$

στ. $\left(2^2\right)^3 =$

ζ. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} =$

η. $\left(2^2\right)^{-3} =$

3. Να υπολογιστούν οι αριθμητικές παραστάσεις:

α. $(-3)^2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3^2 - 5^2 \cdot (-2) : 5 - 10$

β. $\left(2 \cdot 5 - 3^2\right)^{2020} + 2 \cdot \left(3^2 - 5\right) - 15 : (-3)$

γ. $7^{21} : 7^{20} + 3(-9+8)^{64} - (-11+10)^{93} - 2(-5+6)^{52}$

δ. $10000000 \cdot 0{,}00001$

ε. $-(-2)^3 + (-2)^{-2} - \left[-(+6)^0 - \left(-2^3\right)\right] + \left[-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]$

στ. $(1{,}25)^4 \cdot (2{,}5)^5 \cdot (-8)^4 \cdot (-4)^5$

4. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

α. $\alpha^3 \cdot \alpha^5 \cdot \alpha$ **β.** $x^4 : x^2$ **γ.** $(-2)^3 : (-2)^{-4}$

δ. $\left(-2x^3\right)^5$ **ε.** $\frac{6x^4y^5}{3x^2y^3}$ **στ.** $\frac{18\cdot 10^{-2}\cdot 4\cdot 10^4}{24\cdot 10^{-1}}$

ζ. $-3x^2\cdot\left(2x^3\right)$ **η.** $\frac{4^7\cdot 32^2}{16^3\cdot 8^5}$ **θ.** $\left[(-4)^2\right]^{-3}\cdot (0,25)^{-6}$

5. Αν α=-2 και β=3 να συγκρίνετε τις παραστάσεις: $(\alpha+\beta)^2$ και $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

6. Αν x= –2 να υπολογίσετε την παράσταση $3x^4-2x^3+5x^2-2x-7$.

7. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

α. $\frac{(x^4)^3\cdot x^5}{x^{16}}$ **β.** $\frac{\left(\alpha^2\cdot\beta^3\right)^2}{(\alpha\beta)^{-2}}$

γ. $\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3\cdot\left(\frac{2y}{x}\right)^4$ **δ.** $\left(\frac{x^2y}{xy^2}\right)^{-2}\cdot(xy)^2$

ε. $\frac{\left(x^{-1}\cdot y^{-1}\cdot z\right)^{-2}}{x\cdot y^{-2}\cdot z^{-3}}$ **στ.** $\left(\frac{5x^2}{-2y^4}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{8y^4}{25x^2}\right)^{-2}$

8. Να υπολογιστεί η παράσταση: $A=2^{x-5}+2^{x-4}+2^{x-3}+2^{x-2}$, όταν x = 3

9. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$A=(-3)^4-5^3-(-2)^5-\left[\left(3^3-12\right):3-8\right]$$

$$B=2019\cdot\left[\left(-\frac{4}{3}\right)^2:\left(2^4:3^2-2^2:\frac{9}{8}\right)\right]^2+\left(7\cdot\frac{1}{7}\right)^{-2020}$$

10. Αν x = −1 και y = 2 , να υπολογίσετε την παράσταση: $A=2x^2+y^2-2xy^3$

11. Να υπολογιστούν οι αριθμητικές παραστάσεις:

α. $12^{100} \cdot (1,5)^{50} \cdot 6^{-149}$ **β.** $(-0,25)^{17} \cdot 8^{11}$

12. Αν $\alpha + 2\beta = \frac{1}{2}$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = (16\alpha + 32\beta)^{-2} - (32\alpha + 64\beta)^{-3} + \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} : 3^4\right]^3$$

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε.

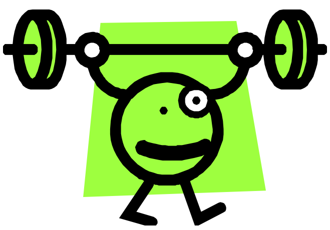
13. Αν $\alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 3} + \frac{1}{33} + \alpha^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27}$$

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε.

14. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: 3^{3^3} και $\left(3^3\right)^3$. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

15. ‘*Δυο ίσες δυνάμεις που έχουν ίσες βάσεις θα έχουν και ίσους εκθέτες*’. Μπορείτε να βρείτε παραδείγματα που να μην ισχύει η παραπάνω πρόταση.



Ε. ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. **α.** 8 **β.** 16 **γ.** -8 **δ.** 16 **ε.** -8 **στ.** 0

ζ. 1 **η.** 1 **θ.** $\frac{1}{8}$ **ι.** $\frac{1}{9}$

2. **α.** 256 **β.** 4 **γ.** $8x^3$ **δ.** 1000 **ε.** $\frac{27}{8}$ **στ.** 64

ζ. $\frac{4}{9}$ **η.** $\frac{1}{64}$

3. **α.** 0 **β.** 14 **γ.** 9 **δ.** 100 **ε.** 1 **στ.** -10^9

4. **α.** α^9 **β.** x^2 **γ.** -128 **δ.** $-32x^{15}$ **ε.** $2x^2y^2$ **στ.** 3000 **ζ.** $-6x^5$

η. $\frac{1}{8}$ **θ.** 1

5. Είναι ίσες

6. 81

7. **α.** x **β.** $\alpha^6\beta^8$ **γ.** $2x^2y$ **δ.** y^4 **ε.** xy^4z **στ.** $-\frac{5y^4}{8x^2}$

8. $A=\frac{15}{4}$.

9. **α.** A= -9 **β.** 2020

10. 22

11. **α.** 6 **β.** $-\frac{1}{2}$

12. $A=\frac{1}{64}$.

13. $A=\frac{7}{3}$

14. Ισχύει $3^{3^3} > \left(3^3\right)^3$ γιατί $3^{3^3} = 3^{27}$ ενώ $\left(3^3\right)^3 = 3^9$.

15. Ισχύει $1^3 = 1^9$ όμως $3 \neq 9$. Επίσης $0^2 = 0^7$ όμως $2 \neq 7$. Άρα η πρόταση ισχύει γενικά, όχι όμως όταν η βάση είναι 0 και 1.