

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A1.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ .

Μονάδες 4

**A2.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

**B1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι πάντοτε συνεχής στο  $x_0$ .

**β.** Αν η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**γ.** Αν η  $f$  έχει δεύτερη παράγωγο στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Μονάδες 4,5

**B2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο  $x_0$ .

Στήλη A συναρτήσεις	Στήλη B εφαπτόμενες
α. $f(x)=3x^3, \quad x_0=1$	1. $y=-2x+\pi$
β. $f(x)=\eta\mu 2x, \quad x_0=\frac{\pi}{2}$	2. $y=\frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x)=3 x , \quad x_0=0$	3. $y=9x-6$
δ. $f(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=4$	4. $y=-9x+5$
	5. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(z)=\frac{2z+i}{z-2i}, z \in \mathbb{C}$  με  $z \neq -2i$ ,

όπου  $\bar{z}$  ο συζυγής του  $z$ .

α. Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$$w_1=f(9-5i)$$

Μονάδες 6

$$w_2 = \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i) \right]^{2004}$$

Μονάδες 6

β. Θεωρούμε τον πίνακα  $M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} |w_1| & 0 \\ 0 & -|w_1| \end{bmatrix}$   
όπου  $|w_1|$  το μέτρο του μιγαδικού αριθμού  $w_1$   
του ερωτήματος α.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός  $T$  με πίνακα  $M$  είναι:

Α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$   
και γωνία  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Β. συμμετρία ως προς τον άξονα  $x'$

Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα  $y'$

Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία  $y=x$

Ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων

$O$  και λόγο  $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

Μονάδες 5

γ. Αν  $M$  ο πίνακας του ερωτήματος β, τότε να βρεθεί ο πίνακας  $X$  ώστε να ισχύει:

$$MX=K$$

όπου  $K$  είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$  και γωνία  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Μονάδες 8

### ΘΕΜΑ 3ο

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα  $[0,1]$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0,1)$ . Αν  $f(0)=2$  και  $f(1)=4$ , να δείξετε ότι:

α. η ευθεία  $y=3$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0,1)$ .  
Μονάδες 7

β. υπάρχει  $x_1 \in (0,1)$ , τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$$

Μονάδες 12

γ. υπάρχει  $x_2 \in (0,1)$ , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(x_2, f(x_2))$  να είναι παράλληλη στην ευθεία  $y=2x+2000$ .

Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ 4ο

Τη χρονική στιγμή  $t=0$  χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{at}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, t \geq 0$$

όπου  $a$  και  $\beta$  είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος  $t$  μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και

επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

**α.** Να βρείτε τις τιμές των σταθερών  $\alpha$  και  $\beta$ .  
Μονάδες 15

**β.** Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Μονάδες 10

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$ . Να αποδείξετε ότι:  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

Μονάδες 7,5

**A.2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει:

α.  $|z|^2 = z \bar{z}$

β.  $|z^2| = z^2$

γ.  $|z| = -|\bar{z}|$

δ.  $|z| = |\bar{z}|$

ε.  $|i \bar{z}| = |z|$

Μονάδες 5

**B.1.** Αν  $z_1 = 3 + 4i$  και  $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ , να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $ z_1 \cdot z_2 $	α. 4
2. $ z_1^2 $	β. 2
3. $ z_2 ^2$	γ. 25
4. $- \overline{z_1} $	δ. -5
5. $ i z_2 $	ε. -2
	στ. 5
	ξ. 10

Μονάδες 7,5

**Β.2.** Αν για το μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει  $|z|=1$ , να δείξετε

ότι  $\overline{z} = \frac{1}{z}$ .

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 2ο**

Έστω  $f$  μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η  $f$  είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι  $\alpha = -1/9$ .

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(4, f(4))$ .

Μονάδες 7

- γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=2$ .

Μονάδες 9

**ΘΕΜΑ 3ο**

Για μια συνάρτηση  $f$ , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ , ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου  $\beta, \gamma$  πραγματικοί αριθμοί με  $\beta^2 < 3\gamma$ .

- α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

- β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

- γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο ανοικτό διάστημα  $(0,1)$ .

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω μια πραγματική συνάρτηση  $f$ , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i)  $f(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

ii)  $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Έστω ακόμη  $g$  η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$



α. Να δείξετε ότι ισχύει  $f'(x) = -2xf^2(x)$

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι σταθερή.

Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης  $f$  είναι:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x) \eta \mu 2x)$ .

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

**Μονάδες 12**

- B.1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu x$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει

$$f'(x) = \sigma \nu x.$$

**Μονάδες 8**

- B.2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $[\alpha, \beta]$  και συνεχής στο  $(\alpha, \beta)$ , τότε η  $f$  παίρνει πάντοτε στο  $[\alpha, \beta]$  μία μέγιστη τιμή.

**Μονάδα 1**

- β.** Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

**Μονάδα 1**

- γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

**Μονάδα 1**

- δ. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , τότε

$$\int f(x) dx = xf(x) - \int xf'(x) dx.$$

**Μονάδα 1**

- ε. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδα 1**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Έστω  $z$  ένας μιγαδικός αριθμός και  $f(v) = i^v z$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$ .

- α. Να δείξετε ότι  $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$ .

**Μονάδες 7**

- β. Αν  $|z| = \rho$  και  $\text{Arg}(z) = \theta$ , να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right].$$

**Μονάδες 8**

- γ. Αν  $|z| = 2$  και  $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$ , να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $0$ ,  $z$  και  $f(13)$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .  
Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης  $f \circ g$  είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η  $g$  είναι 1-1.

**Μονάδες 7**

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$  έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

**Μονάδες 18**

**ΘΕΜΑ 4ο**

α. Έστω δύο συναρτήσεις  $h, g$  συνεχείς στο  $[\alpha, \beta]$ .

Να αποδείξετε ότι αν  $h(x) > g(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε

και 
$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx .$$

**Μονάδες 2**

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$ , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0 .$$

ι) Να εκφραστεί η  $f'$  ως συνάρτηση της  $f$ .

**Μονάδες 5**

ιι) Να δείξετε ότι  $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 12**

ιιι) Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$  και τον άξονα  $x'x$ , να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) .$$

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 8**

**B.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

**Μονάδες 7**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν  $z$  ένας μιγαδικός αριθμός και  $\bar{z}$  ο συζυγής του, τότε ισχύει  $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ .  
Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

- γ. Για κάθε συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 2**

- δ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

**Μονάδες 2**

- ε. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και  $f'(x_0)=0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = \alpha + \beta i$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

και  $w = 3z - i\bar{z} + 4$ , όπου  $\bar{z}$  είναι ο συζυγής του  $z$ .

- α. Να αποδείξετε ότι  $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$   
 $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha.$

**Μονάδες 6**

- β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 12$ , τότε οι εικόνες του  $z$  κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$ .

**Μονάδες 9**

- γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y=x-2$ , έχει το ελάχιστο μέτρο.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x^3 + x$ .

- α. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση.

**Μονάδες 6**

- β. Να αποδείξετε ότι  $f(e^x) \geq f(1+x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

- γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0,0)$  είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της  $f$  και της  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 5**

- δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ , τον άξονα των  $x$  και την ευθεία με εξίσωση  $x=3$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο  $(\alpha, \beta)$ . Αν ισχύει  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$  και υπάρχουν αριθμοί  $\gamma \in (\alpha, \beta)$ ,  $\delta \in (\alpha, \beta)$ , έτσι ώστε  $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ , να αποδείξετε ότι:



α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x)=0$  στο διάστημα  $(\alpha,\beta)$ .

Μονάδες 8

β. Υπάρχουν σημεία  $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$  τέτοια ώστε  $f''(\xi_1)<0$  και  $f''(\xi_2)>0$ .

Μονάδες 9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

Μονάδες 8

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μετά την 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
 ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2004  
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
 ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι  $f'(x_0)=0$

**Μονάδες 10**

**B.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

**Μονάδες 2**

**β.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , αν και μόνο αν  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$

**Μονάδες 2**

**γ.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f \cdot g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g'(x_0)$$

**Μονάδες 2**

- δ. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2 \ln x$ .

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

**Μονάδες 10**

- β. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 8**

- γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = e^x f(x)$ , όπου  $f$  συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ .

- α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο  $\xi \in (0, \frac{3}{2})$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = -f(\xi)$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Εάν  $f(x)=2x^2-3x$ , να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 g(x)dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 8**

**γ.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha)$

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f(1)=1$ . Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z|f(t)dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0,$$

όπου  $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ , τότε:

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε τη  $g'$ .

**Μονάδες 5**

**β.** Να αποδείξετε ότι  $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$

**Μονάδες 8**

**γ.** Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι  $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

**Μονάδες 6**

**δ.** Αν επιπλέον  $f(2)=\alpha > 0$ ,  $f(3)=\beta$  και  $\alpha > \beta$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (2,3)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0)=0$ .

**Μονάδες 6**

**ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
 ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005  
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
 ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (α, β)$  τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta .$$

**Μονάδες 9**

**A.2** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  με  $f(α) < 0$  και υπάρχει  $\xi \in (α, β)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ , τότε κατ' ανάγκη  $f(β) > 0$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**Μονάδες 2**

- γ. Αν η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κοινό σημείο  $A$  με την ευθεία  $y = x$ , τότε το σημείο  $A$  ανήκει και στη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 2**

- δ. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty .$$

**Μονάδες 2**

- ε. Αν η  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε ισχύει  $\left( \int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(\alpha)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**Μονάδες 2**

- στ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ .

- α. Δείξτε ότι:  $\overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$ .

**Μονάδες 7**

- β. Δείξτε ότι ο αριθμός  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$  είναι πραγματικός.

**Μονάδες 9**

- γ. Δείξτε ότι:  $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$ .

**α.** Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 3**

**β.** Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η  $y = \lambda e x$ .

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής  $M$ .

**Μονάδες 7**

**γ.** Δείξτε ότι το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $f$ , της εφαπτομένης της στο σημείο  $M$  και του άξονα  $y'y$ , είναι  $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$ .

**Μονάδες 8**

**δ.** Υπολογίστε το  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση  $2 f'(x) = e^{x-f(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 0$ .

**α.** Να δειχθεί ότι:  $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$ .

**Μονάδες 6**

**β.** Να βρεθεί το:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta\mu x}$ .

**Μονάδες 6**



γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^{2007}}{2007} .$$

Δείξτε ότι  $h(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση  $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008}$  έχει ακριβώς μία λύση στο  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10:30'** πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**A.2** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει  $|z|^2 = z^2$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- γ. Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 2**

- δ. Ισχύει ο τύπος  $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx, \text{ όπου } f', g'$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 2 + (x-2)^2$  με  $x \geq 2$ .

- α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

**Μονάδες 6**

- β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$  και να βρείτε τον τύπο της.

**Μονάδες 8**

- γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  με την ευθεία  $y=x$ .

**Μονάδες 4**

- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$   
και  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ .

**Μονάδες 9**

**ii.**  $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$  και  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $z_1, z_2, z_3$  στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 5**

**γ.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \ln x$  στο σημείο  $A(\alpha, \ln \alpha)$  με  $\alpha > 0$  και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h(x) = e^x$  στο σημείο  $B(\beta, e^\beta)$  με  $\beta \in \mathbb{R}$  ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός  $\alpha$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**Μονάδες 9**

**δ.** Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g$  και  $h$  έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

**Μονάδες 3**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

**Μονάδες 8**

**A.2** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 4**

**A.3** Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 3**

**B.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Αν  $f$  συνάρτηση συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  ισχύει  $f(x) \geq 0$  τότε  $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx > 0$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$  τότε  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

- γ. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

- δ. Αν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε

$$\left( \int_{\alpha}^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

**Μονάδες 2**

- ε. Αν  $\alpha > 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$ .

**Μονάδες 2**

### **ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i} \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού  $z$  ανήκει στον κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

**Μονάδες 9**

- β. Έστω  $z_1, z_2$  οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$$

για  $\alpha = 0$  και  $\alpha = 2$  αντίστοιχα.

- ι. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$ .

**Μονάδες 8**

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^\nu$$

για κάθε φυσικό αριθμό  $\nu$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου  $\theta \in \mathbb{R}$  μια σταθερά με  $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

α. Να αποδειχθεί ότι η  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

**Μονάδες 7**

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

**Μονάδες 8**

γ. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και  $x_3$  η θέση του σημείου καμπής της  $f$ , να αποδειχθεί ότι τα σημεία  $A(x_1, f(x_1))$ ,  $B(x_2, f(x_2))$  και  $\Gamma(x_3, f(x_3))$  βρίσκονται στην ευθεία  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ .

**Μονάδες 3**

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και την ευθεία  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ .

**Μονάδες 7**



**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω  $f$  μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα  $[0, 1]$  για την οποία ισχύει  $f(0) > 0$ . Δίνεται επίσης συνάρτηση  $g$  συνεχής στο διάστημα  $[0, 1]$  για την οποία ισχύει  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ .

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t) dt, \quad x \in [0, 1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

**α.** Να δειχθεί ότι  $F(x) > 0$  για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(0, 1]$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$

για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(0, 1]$ .

**Μονάδες 6**

**γ.** Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(0, 1]$ .

**Μονάδες 4**

**δ.** Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left( \int_0^x f(t)g(t) dt \right) \cdot \left( \int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)}{\left( \int_0^x g(t) dt \right) \cdot x^5} .$$

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

**Μονάδες 10**

**A.2** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 5**

**B.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Αν μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A \text{ και } f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$$

**Μονάδες 2**

**β.** Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- γ. Όταν η διακρίνουσα  $\Delta$  της εξίσωσης  $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και  $\alpha \neq 0$  είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών.

**Μονάδες 2**

- δ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

$$f''(x) > 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Αν η  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$  τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  ισχύουν

$$|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \quad \text{και} \quad |w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$$

τότε να βρείτε:

- α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ .

**Μονάδες 6**

- β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$ .

**Μονάδες 7**

- γ. την ελάχιστη τιμή του  $|w|$

**Μονάδες 6**

- δ. την ελάχιστη τιμή του  $|z - w|$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 0.  
**Μονάδες 3**

**β.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.  
**Μονάδες 9**

**γ.** Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης  $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$  για όλες τις πραγματικές τιμές του  $\alpha$ .  
**Μονάδες 6**

**δ.** Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) ,$$

για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$$

**α.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

**Μονάδες 8**

- β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση  $g$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

**Μονάδες 4**

- γ. Αν για τη συνάρτηση  $f$  του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση  $g$  του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και  $g(0) = g'(0) = 1$ , τότε

- i. να αποδείξετε ότι  $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

**Μονάδες 10**

- ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι 1-1

**Μονάδες 3**

### **ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.**
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')  
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$  ισχύει  $f'(x)=0$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**B.** Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

**Μονάδες 2**

**β.** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$

**Μονάδες 2**



γ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

**Μονάδες 2**

δ. Κάθε συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 2**

ε. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  και τον άξονα  $x'x$  είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

**Μονάδες 2**

### **ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**A.α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 9**

**β.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός  $z_0 = 1 - i$  έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

**Μονάδες 8**

- B.** Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί  $w$  οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$$

όπου  $z_0$  ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \quad x > -1,$$

όπου  $\alpha > 0$  και  $\alpha \neq 1$

- A.** Αν ισχύει  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x > -1$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha = e$

**Μονάδες 8**

- B.** Για  $\alpha = e$ ,

**α.** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 5**

**β.** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-1, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$

**Μονάδες 6**

**γ.** αν  $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $(1, 2)$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[0, 2]$  για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x tf(t)dt, \quad x \in [0, 2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $G$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, 2]$ .

**Μονάδες 5**

**β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $G$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, 2)$  και ότι ισχύει

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2$$

**Μονάδες 6**

**γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός  $\alpha \in (0, 2)$  τέτοιος ώστε να ισχύει  $H(\alpha) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**δ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός  $\xi \in (0, \alpha)$  τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt$$

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')  
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 6**

**A2.** Πότε η ευθεία  $x=x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών  $\alpha+\beta i$  και  $\gamma+\delta i$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β) Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ ,

$$\text{όπου } A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

δ)  $(\sin x)' = \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$

ε) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η εξίσωση  $z + \frac{2}{z} = 2$  όπου  $z \in \mathbb{C}$  με  $z \neq 0$

**B1.** Να βρείτε τις ρίζες  $z_1$  και  $z_2$  της εξίσωσης.

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο.

**Μονάδες 7**

**B4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  του ερωτήματος **B3**, να αποδείξετε ότι  $3 \leq |w| \leq 7$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[ \frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της  $f$  στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα  $\psi\psi$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 xf(x)dx$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x$$

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι σταθερή.

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+9}, x\in\mathbb{R}$$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

### **ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**



**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ  
(ΟΜΑΔΑ Β΄)  
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:  $f'(x_0) = 0$

**Μονάδες 10**

**A2.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z \neq 0$  ορίζουμε  $z^0 = 1$

β) Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$  ισχύει:  $(\epsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

δ) Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y=x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  και  $w$  με  $z \neq 3i$ , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

- B1.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$

**Μονάδες 7**

- B2.** Να αποδείξετε ότι  $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$

**Μονάδες 4**

- B3.** Να αποδείξετε ότι ο  $w$  είναι πραγματικός αριθμός και ότι  $-2 \leq w \leq 2$

**Μονάδες 8**

- B4.** Να αποδείξετε ότι:  $|z - w| = |z|$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(0) = f(0) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \ln(e^x - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 3**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\ln(e^x - x) = \sin x$  έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , οι οποίες για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιούν τις σχέσεις:

i)  $f(x) > 0$  και  $g(x) > 0$

ii) 
$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

iii) 
$$\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  και ότι  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 9**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 4**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$

**Μονάδες 5**

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$$

τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και την ευθεία με εξίσωση  $x=1$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ  
(ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$

**Μονάδες 7**

**Α2.** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$ ;

**Μονάδες 4**

**Α3.** Έστω συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο;

**Μονάδες 4**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

**β)** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $f(x)=y$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$

**γ)** Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ)  $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{x | \eta\mu x = 0\}$

ε)  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$ , όπου  $f', g'$  είναι  
συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \quad (1)$$

$$|w-5\bar{w}| = 12 \quad (2)$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = 1$

**Μονάδες 6**

**B2.** Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$  με  $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$  τότε, να βρείτε το  $|z_1 + z_2|$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$  στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του  $|w|$

**Μονάδες 6**

**B4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z - w| \leq 4$$

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=(x-1)\ln x-1$ ,  $x>0$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta_1=(0,1]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta_2=[1,+\infty)$ . Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^{x-1}=e^{2013}$ ,  $x>0$  έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Αν  $x_1, x_2$  με  $x_1<x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0\in(x_1,x_2)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x)=f(x)+1$  με  $x>0$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x=e$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ , η οποία για κάθε  $x>0$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$

- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$

- $\ln x - x = - \left( \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) \cdot |f(x)|$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

**Μονάδες 10**

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Αν είναι  $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$ ,  $x > 0$ , τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ (f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

**Μονάδες 5**

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας  $\ln x \leq x - 1$ , που ισχύει για κάθε  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x > 0,$$

όπου  $a > 0$ , είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \quad \text{για κάθε } x > 0 \text{ (μονάδες 4).}$$

**Μονάδες 6**

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός  $\beta > 0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (\beta, 2\beta)$  τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

**Μονάδες 4**

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ



ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[α, β]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[α, β]$ , τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η εξίσωση  $|z - z_0| = \rho$ ,  $\rho > 0$  παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(z_0)$  και ακτίνα  $\rho^2$ , όπου  $z, z_0$  μιγαδικοί αριθμοί.

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

**γ)** Ισχύει ότι:  $|\eta \mu x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**δ)** Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu x - 1}{x} = 1$

**ε)** Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 10**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$ , είναι κύκλος με κέντρο  $K(2,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$  (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό  $z$  που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι  $|z| \leq 3$  (μονάδες 3)

**Μονάδες 8**

- B2.** Αν οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης  $w^2 + \beta w + \gamma = 0$ , με  $w$  μιγαδικό αριθμό,  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , και

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \quad \text{και} \quad \gamma = 5$$

**Μονάδες 9**

- B3.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός  $v$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|v| < 4$$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f$  παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$  και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 9**

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x)) = 1$$

**Μονάδες 8**

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0$$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt, \quad x \in (1, +\infty) \text{ και } \alpha > 1$$

Να αποδείξετε ότι:

**Δ1.**  $f'(1) = 0$  (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = 1$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 6**

**Δ2.** η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο  $\mathbb{R}$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \quad (\text{μονάδες 6})$$

**Μονάδες 9**

Δ3. η  $g$  είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha - 1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha), \quad x > 1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**