ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ
01-06-2009

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Να αποδείξετε ότι, για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,\psi_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,\psi_2)$ μη παράλληλα στον άξονα ψ΄ψ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα ,ισχύει: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. (μονάδες 10)

Β. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ. (μονάδες 5)

Γ. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον αριθμό των παρακάτω προτάσεων και δίπλα το γράμμα (Σ) αν είναι σωστή ή το γράμμα (Λ) αν είναι λάθος.

1. Η κωνική με εξίσωση $4\chi^2+\psi^2=1$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon > 1$ (μονάδες 2)

2. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα ισχύει πάντα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{v}$ όπου $\vec{v}$ η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$. (μονάδες 2)

3. Το σημείο $(2,-\sqrt{2})$ είναι σημείο της έλλειψης $9\chi^2+4\psi^2=36$. (μονάδες 2)

4. Αν $\vec{\alpha}=(-2,5)$ και $\vec{\beta}=(13,5)$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. (μονάδες 2)

5. Η εφαπτόμενη του κύκλου $\chi^2+\psi^2=9$ στο σημείο του $(1, 2\sqrt{2})$ είναι η ευθεία ε: $\chi+2\sqrt{2}\,\psi=3$. (μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 2^{o}

i) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής $\psi^2=12\chi$.
(μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων ,η μία εστία της είναι ίδια με την εστία της παραβολής $\psi^2=12\chi$ και έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{3}{5}$. (μονάδες 10)

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την εστία της παραβολής $\psi^2=12\chi$ και είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(5,0) και Β(0,4). (μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3^{O}

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha}=(0,2)$, $\vec{\beta}=(-1,1)$,
$|\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}|=2$ και $|\vec{\alpha}-2\vec{\gamma}|=6$.

Α. Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ και $|\vec{\gamma}|$. (μονάδες 10)

Β. i) Αν $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ να βρεθεί το μέτρο του $\vec{v}$. (μονάδες 7)

ii) Αν $|\vec{v}|=2$,να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$.(μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4^{o}

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-4\chi+3\psi=0$, παριστά κύκλο ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, ποιο είναι το κέντρο και ποια η ακτίνα του. (μονάδες 9)

ii) Να βρεθεί το $\kappa\in R$ ώστε η ευθεία ε:$6\chi-8\psi-\kappa=0$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Α και Β ,ώστε το τρίγωνο ΑΟΒ να είναι ορθογώνιο στο Ο, όπου Ο η αρχή των αξόνων. (μονάδες 8)

iii) Για κ=24, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ όπου Ο η αρχή των αξόνων και Α,Β τα σημεία που η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο $\chi^2+\psi^2-4\chi+3\psi=0$. (μονάδες 8)

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ
6-6-2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι σημεία του επιπέδου, να αποδείξετε ότι για τις συντεταγμένες (x, y) του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ ισχύει:

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ.

Μονάδες 5

***Α**3. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον αριθμό των παρακάτω προτάσεων και δίπλα το γράμμα (Σ) αν είναι σωστή ή το γράμμα (Λ) αν είναι λάθος.*

1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας 7 + 3y = - 4x είναι $-\frac{4}{3}$.
2. Εάν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 1)$, και $\vec{\beta} = (21, 3)$ είναι παράλληλα τότε $\lambda = 7$.
3. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$.
4. Στην παραβολή $y^2=2px$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \frac{p}{2}$.
5. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $x_1x - y_1y = \rho^2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και διάνυσμα $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $2\vec{\alpha}\left(\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right) = 14$ και $\vec{\beta}\left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right) = 34$.

Β1. Να δείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$ και $\left|\vec{\beta}\right| = 4$,

Β2. Να υπολογίσετε τη γωνία $\varphi = \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$,

Β3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει: $\left|x\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}\right| = \sqrt{112}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα σημεία $A(5,1)$ και $B(1,3)$. Να βρείτε:

Γ1. την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στον άξονα $x'x$,

Γ2. την εξίσωση της παραβολής η οποία έχει διευθετούσα την ευθεία (δ) που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το μέσο του AB,

Γ3. το σημείο M του άξονα $x'x$, για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου MAB είναι ίσο με 7.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται, στο καρτεσιανό επίπεδο, η ευθεία $(\delta): x + y - \sqrt{3} = 0$ και τα σημεία $E'(0,-3)$, $E(0,3)$ και $P\left(\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\right)$. Αν για τα μεταβλητά σημεία Μ και Ν του παραπάνω επιπέδου ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{1}{\left|\overrightarrow{ME'}\right|} + \frac{1}{\left|\overrightarrow{ME}\right|} = \frac{6\sqrt{2}}{\left|\overrightarrow{ME'}\right|\left|\overrightarrow{ME}\right|} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{NE'}^2 + \overrightarrow{NE}^2 = 36.$$

Δ1. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου είναι έλλειψη με εξίσωση $2x^2 + y^2 = 18$.

Δ2. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ν του επιπέδου είναι κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$.

Δ3. Να δείξετε ότι η ευθεία (δ) τέμνει τον κύκλο και ορίζει σε αυτόν χορδή μήκους $\sqrt{30}$.

Δ4. Να δείξετε ότι η ευθεία (δ) είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{E'PE}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ ΚΑΛΑΜΑΤΑΣ
9-6-2009

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $Α(x_o, \psi_o)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης Λ είναι η $\psi - \psi_o = \lambda(x - x_o)$

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο νούμερο που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

i. Αν $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\boldsymbol{\gamma}}$ τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

ii. Η ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (Α, - Β)$.

iii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο $Μ_1 (x_1, y_1)$ είναι $yy_1 = p (x + x_1)$.

Γ. Τι ονομάζεται έλλειψη;

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Αν $\vec{\upsilon} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, να υπολογίσετε το $συν(\widehat{\vec{\upsilon}, \vec{v}})$

Β. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2,1)$ και $\vec{\beta} = (1,3)$. Να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\vec{\delta}$ για το οποίο ισχύουν: $\vec{\delta} \cdot \vec{\alpha} = 0$ και $\vec{\delta} \cdot \vec{\beta} = 14$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ για το οποίο γνωρίζουμε ότι Α(-4,3) και η μια διαγώνιος του έχει εξίσωση x-ψ+1=0.
Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένές των κορυφών του καθώς και το μήκος της πλευράς του.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ο κύκλος $C_1 : x^2 + \psi^2 = 2$ και η εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 2 + \lambda(x - \psi + 2) = 0$ (1)

i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης ε του C_1 στο σημείο του Α(-1,1)

ii. Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $\lambda \in \Re$ η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου.

iii. Τι παριστάνει η (1) για λ=2

iv. Να αποδείξετε ότι η (1) διέρχεται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

v. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος της (1) εφάπτεται στην ευθεία ε (του πρώτου ερωτήματος)

vi. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων της (1).

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να αποδείξετε ότι για τρία διανύσματα* $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ *και* $\vec{\gamma}$ *του επιπέδου ,* *ισχύει ότι :* $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

Μονάδες 10

Α2. *Έστω δυο σημεία Ε και Ε΄ ενός επιπέδου. Τι ονομάζουμε έλλειψη με εστίες Ε και Ε΄ στο συγκεκριμένο επίπεδο;*

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α) *Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα* $\overrightarrow{AB}$ *έχουμε* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

β) *Η εφαπτομένη του κύκλου* $x^2+y^2=\rho^2$ *στο σημείο του* $A(x_1,y_1)$ *έχει εξίσωση* $xy+x_1y_1=\rho^2$.

γ) *Η εξίσωση* $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ *με* $A^2+B^2-4\Gamma>0$ *παριστάνει κύκλο με κέντρο* $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.

δ) *Η εφαπτομένη της έλλειψης* $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ *στο σημείο της* $A(x_1,y_1)$ *έχει εξίσωση* $\frac{x\cdot x_1}{\beta^2}+\frac{y\cdot y_1}{a^2}=1$.

ε) *Αν για τα διανύσματα* $\vec{a}$ *και* $\vec{\beta}$ *του καρτεσιανού επιπέδου ισχύει* $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$ *τότε* $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=-1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\kappa-3,\lambda-1)$ *και* $\vec{\beta}=(2\lambda-4,-3)$, $\kappa,\lambda\in\Re$.

α) *Να βρείτε τα κ, λ αν :* $\vec{\alpha}=\vec{0}$.

Μονάδες 8

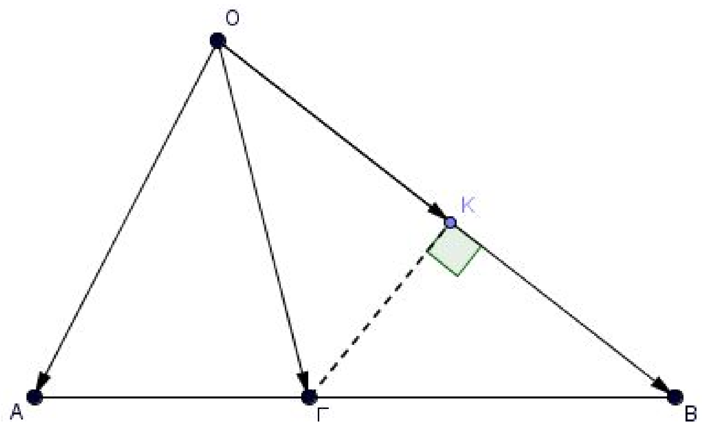
β) *Να βρείτε τα κ ,λ αν :* $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

Μονάδες 9

γ) *Να βρείτε το λ αν :* $|\vec{\beta}|=5$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ



Για το διπλανό σχήμα ισχύουν τα παρακάτω:

$\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$, $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\dfrac{7}{3}$ *και* $3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-5\vec{\gamma}=\vec{0}$

Γ1. *Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.*

Μονάδες 5

Γ2. *Να γράψετε το διάνυσμα* $\vec{\gamma}$ *ως γραμμικό συνδυασμό των* $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ *και να υπολογίσετε το μέτρο του .*

Μονάδες 5

Γ3. *Να δείξετε ότι η ΟΓ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΟΑΒ.*

Μονάδες 7

Γ4. *Να βρείτε την προβολή* $\overrightarrow{OK}$ *του διανύσματος* $\vec{\gamma}$ *στο διάνυσμα* $\vec{\beta}$ *.*

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2x-1, y+2)$ *και* $\vec{\beta}=(2x+1, y-2)$.

Δ1. *Αν* $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ *, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος* C_1 *των σημείων Μ(χ,y) είναι έλλειψη .*

Μονάδες 6

Δ2. *Αν ισχύει ότι* $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+12y^2-64=0$ *, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος* C_2 *των σημείων Μ(x,y) είναι κύκλος , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.*

Μονάδες 6

Δ3. *Να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω γεωμετρικών τόπων* C_1 *και* C_2.

Μονάδες 5

Δ4. *Να βρείτε τις εφαπτόμενες του παραπάνω κύκλου οι οποίες άγονται από το σημείο Α(2,2) και στην συνέχεια να βρείτε το μήκος της χορδής που αποκόπτει η μια από αυτές από την έλλειψη.*

Μονάδες 8

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1

Α. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι κάθετα στον άξονα x'x ,να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

όπου λ_1,λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. (Μον 10)

Β. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

(μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$ τότε θα είναι πάντοτε $\vec{\alpha}=\vec{0}$ η $\vec{\beta}=\vec{0}$.

β) Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

γ) Η ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$.

δ) Όλες οι ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το σημείο Κ (x_o,y_o), έχουν εξίσωση της μορφής $y-y_o=\lambda(x-x_o)$.

ε) Κάθε σημείο μιας παραβολής ισαπέχει από την διευθετούσα και την κορυφή της .

(Μον 5x2)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$

με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}$, $\kappa\in\mathbf{R}$, και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$. (Μον 5)

β) Να βρείτε το αριθμό κ , αν γνωρίζετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\gamma}$. (Μον 10)

γ) Αν κ=4
να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ **και** $\vec{\gamma}$. (Μον 10)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0,$$

α) Να αποδείξετε ότι, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. (Μον 8)

β)Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2=-2x$

ι) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

ιι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο Α(-2,2). (Μον 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραπάνω παραβολής, εφάπτεται και στο κύκλο . (Μον 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση

$$(\varepsilon): \kappa x - (\kappa+1)\psi + 2 = 0, \ \kappa \in R.$$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του αριθμού κ . (Μον 6)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες με εξίσωση (ε) διέρχονται για κάθε τιμή του κ από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί. (Μον 9)

γ) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η παραπάνω ευθεία σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό 4 τ.μ. (Μον 10)

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ **ΣΧΟΛ. ΕΤΟΣ** 2010-2011

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα να δοθεί ο ορισμός του εσωτερικού τους γινομένου $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

(μονάδες 5)

Β. Έστω $\vec{\alpha},\vec{v}$ δύο διανύσματα με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. Να αποδειχθεί ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$, όπου $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$ είναι η προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$

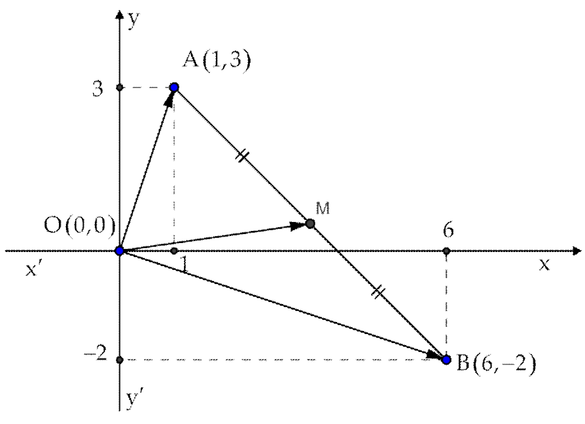
(μονάδες 10)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα των εξετάσεων τη λέξη «***Σωστό***» αν η πρόταση είναι σωστή ή «***Λάθος***» αν η πρόταση είναι λανθασμένη

1. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι δύο διανύσματα τότε για το εσωτερικό τους γινόμενο ισχύει: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1y_1+x_2y_2$
2. Η απόσταση d του σημείου $M(x_1,y_1)$ από την ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0, A\neq 0 \text{ ή } B\neq 0$ δίνεται από τον τύπο: $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$
3. Έστω (C) κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=\varrho^2, \varrho>0$ και $M(x_1,y_1)$ ένα σημείο του. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας του κύκλου στο σημείο του $M(x_1,y_1)$ δίνεται από το τύπο: $xx_1+yy_1=\varrho^2$
4. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0, A\neq 0 \text{ ή } B\neq 0$. Τότε ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta}=(-B,A)$ και ένα διάνυσμα κάθετο στην (ε) είναι το $\vec{\eta}=(-A,-B)$.
5. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο μη μηδενικά διανύσματα και $\hat{\omega}=\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τότε ισχύει: $\text{συν}\omega=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

(μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ 2ο



Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία $A(1,3), B(6,-2)$. Αν Μ είναι το μέσο του ΑΒ τότε

1. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Μ

(μονάδες 5)

2. Να βρεθεί ο συντελεστής του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$

(μονάδες 8)

3. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $O\overset{\Delta}{A}B$ όπου Ο είναι η αρχή του ορθοκανονικού συστήματος *(μονάδες 12)*

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι $(\varepsilon_\lambda): y=(\lambda-1)x+4$ και $(\varepsilon'_\lambda): (3-\lambda)x-y+\lambda=0$, με $\lambda \in R$

1. Να δειχθεί ότι:

a) Οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σημείο $A(0,4)$ για κάθε πραγματική τιμή του λ

(μονάδες 3)

b) Οι ευθείες (ε'_λ) διέρχονται από σταθερό σημείο Β του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες

(μονάδες 7)

2.

a) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες

(μονάδες 5)

b) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο 2a):

i) Να βρείτε την απόσταση των παραλλήλων ευθειών που προκύπτουν από τις (ε_λ) και (ε'_λ)

(μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το εμβαδόν τετραγώνου που έχει τις δύο απέναντι πλευρές τους στις ευθείες αυτές

(μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\kappa x-2y+4\kappa=0 : (1)$, με $\kappa \in R$

1. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο (C_κ) για κάθε $\kappa \in R$ με $\kappa \neq \frac{1}{2}$ και να βρείτε συναρτήσει του κ το κέντρο του και την ακτίνα του

(μονάδες 10)

2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων (C_κ) για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

(μονάδες 7)

3. Να αποδείξετε ότι οι (C_κ) διέρχονται από σταθερό σημείο Μ του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες

(μονάδες 8)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1

Α. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι κάθετα στον άξονα x'x ,να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. (Μον 10)

Β. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

(μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$ τότε θα είναι πάντοτε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ η $\vec{\beta} = \vec{0}$.

β) Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

γ) Η ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

δ) Όλες οι ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το σημείο Κ (x_0,y_0), έχουν εξίσωση της μορφής $y-y_0=\lambda(x-x_0)$.

ε) Κάθε σημείο μιας παραβολής ισαπέχει από την διευθετούσα και την κορυφή της .

(Μον 5x2)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$

με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}$, $\kappa \in \mathbf{R}$, και $(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \dfrac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$. (Μον 5)

β) Να βρείτε το αριθμό κ , αν γνωρίζετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\gamma}$. (Μον 10)

γ) Αν κ=4
να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ **και** $\vec{\gamma}$. (Μον 10)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0,$$

α) Να αποδείξετε ότι, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. (Μον 8)

β)Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2=-2x$

ι) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

ιι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο Α(-2,2). (Μον 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραπάνω παραβολής, εφάπτεται και στο κύκλο . (Μον 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση

$$(\varepsilon) : \kappa x - (\kappa+1)\psi + 2 = 0 \ , \ \kappa \in R.$$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του αριθμού κ . (Μον 6)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες με εξίσωση (ε) διέρχονται για κάθε τιμή του κ από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί. (Μον 9)

γ) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η παραπάνω ευθεία σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό 4 τ.μ. (Μον 10)

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΘΕΜΑ 1^0

Α.

α)Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δυο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ **(μονάδες 05)**

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $K(\chi_0,\psi_0)$ και ακτίνα $\rho>0$ έχει εξίσωση $(\chi-\chi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=\rho^2$.

(μονάδες 10)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**

α) Αν $A(\chi_1,\psi_1),B(\chi_2,\psi_2)$ τότε το μέσον του ΑΒ είναι το $M(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}, \frac{\psi_1+\psi_2}{2})$

β) Αν $A(\chi_1,\psi_1),B(\chi_2,\psi_2)$ τότε $\overrightarrow{AB} = (\chi_1 - \chi_2, \psi_1 - \psi_2)$

γ) Η εξίσωση $A\chi+B\psi+\Gamma= 0$ εκφράζει ευθεία πάντοτε

δ) Αν $A(\chi_1,\psi_1),B(\chi_1,\psi_2)$ τότε για την ευθεία που περνά από τα ΑΒ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης

ε) Η ευθεία με εξίσωση $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$

ζ) Η εξίσωση $(\chi-\chi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=\kappa^2+1$ εκφράζει κύκλο για κάθε $\kappa\in R$

η) Η παραβολή είναι ο Γεωμετρικός Τόπος των σημείων που ισαπέχουν από ένα σημείο και μια ευθεία.

θ) Η έλλειψη $\alpha^2\chi^2 + \beta^2\psi^2 = \alpha^2\beta^2$ στο σημείο της $A(\chi_0,\psi_0)$ έχει εφαπτομένη με εξίσωση

$\alpha^2\chi\chi_0 + \beta^2\psi\psi_0 = \alpha^2\beta^2$

ι) Όσο μεγαλύτερη είναι η εκκεντρότητα μιας έλλειψης τόσο περισσότερο τείνει να μοιάσει σε κύκλο

(μονάδες 10x1 = 10)

ΘΕΜΑ 2^0

Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(2,3), Γ(3,-2) .

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. **(μονάδες 5)**

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. **(μονάδες 10)**

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ **(μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 3^0

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{w} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

α)Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ **(μονάδες 5)**

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{w}\cdot\vec{v}$ **(μονάδες 10)** γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{w}$ **(μονάδες 10)**

<u>ΘΕΜΑ 4^0</u>

Δίνεται η εξίσωση $χ^2+ψ^2-κ^2χ-2κψ+κ^2=0$.

α) Να δείξετε ότι παριστάνει κύκλους για κάθε $κ \neq 0$ πραγματικό αριθμό και να βρείτε τα κέντρα τους και τις ακτίνες τους συναρτήσει του κ. **(μονάδες 10)**

β) Να δείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται στον άξονα ψ΄ψ για κάθε $κ \neq 0$.Για ποιες τιμές του $κ \neq 0$ εφάπτεται και στον άξονα χ΄χ; **(μονάδες 10)**

γ) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην παραβολή $ψ^2=2χ$ **(μονάδες 5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο Διευθυντής ***Ο εισηγητής***

Τάξη Β΄

Ονοματεπώνυμο…………………………………………………………………………………………………….

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω Οχψ σύστημα συντεταγμένων . Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το Ο και ακτίνας ρ>0, είναι $\chi^2+\psi^2 = \rho^2$

Μονάδες 10

Β. Έστω δύο σημεία Ε΄, Ε ενός επίπεδου. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε΄, Ε και μεγάλο άξονα 2α >(ΕΈ), α> 0;

Ποια είναι η εκκεντρότητα της; Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας

στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα

που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά όταν $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

β. Για τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{0}$

γ. Η εφαπτομένη της παραβολής $\psi^2 = 2px$, $p\neq 0$, στο σημείο (x_1,ψ_1) είναι η $\psi\psi_1 = p(x+x_1)$.

δ. Αν $A(x_1,\psi_1)$ και $B(x_2, \psi_2)$ δύο σημεία στο επίπεδο Ο$x\psi$, τότε η απόσταση τους είναι, $(AB) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2}$

Μονάδες 4Χ2

ΘΕΜΑ 2°

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1 ,1), $\vec{AB} = \vec{\alpha} = (1, 3)$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta} = (6, 3)$.

α. Να δείξετε ότι $\hat{A} = \widehat{\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)} = 45°$, Μονάδες 8

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Β και την εξίσωση του ύψους ΒΔ

Μονάδες 9

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3°

Έστω σημείο Α(4, 4) της παραβολής $\psi^2 = 2px$, με $p \neq 0$.

α. Να δείξετε ότι η παραβολή είναι η $\psi^2 = 4x$ και να βρείτε την εστία της Ε και την διευθετούσα της δ.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε, της παραβολής στο Ρ. Μονάδες 6

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το Κ(–1, 2), που εφάπτεται στην ε. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4°

Σε σύστημα Οχψ θεωρούμε την ισοσκελή υπερβολή C: $\chi^2 - \psi^2 = 2$, και σημείο της $P(\chi_o, \psi_o)$, με $\chi_o > 0 > \psi_o$, για το οποίο ισχύει $(PE')^2 + (PE)^2 = 16$, όπου Ε΄, Ε οι εστίες της υπερβολής. Να δείξετε

α. Ε΄(–2,0) και Ε(2,0). Μονάδες 6

β. $|\vec{OP}| = 2$ Μονάδες 7

γ. το $P(\sqrt{3}, -1)$ Μονάδες 7

δ. η γωνία της εφαπτομένης της C στο Ρ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 120° Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$, όπου Α, Β, Γ $\in \mathbb{R}$, παριστάνει κύκλο όταν $A^2+B^2-4\Gamma>0$. Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα; Μονάδες 10

Β. Σε επίπεδο θεωρούμε ευθεία ε και σημείο Ε εκτός της ε. Τι ονομάζεται παραβολή με διευθετούσα την ευθεία ε και εστία το σημείο Ε;
Ποιο σημείο λέγεται κορυφή της παραβολής;
Τι λέγεται παράμετρος της παραβολής; Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{v} \neq \vec{0}$ και $\vec{v} \neq \vec{\beta}$, αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\vec{v}$ τότε $\vec{v} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.

β. Κάθε ευθεία έχει συντ. διεύθυνσης λ = εφω, όπου ω η γωνία ω που σχηματίζει μια ευθεία με τον $x'x$.

γ. Η εκκεντρότητα μια υπερβολής έχει πάντα τιμή $\varepsilon \in (0, 1)$

δ. Η εφαπτομένη της παραβολής $\psi^2 = 2\alpha x$ στο σημείο της Α(κ, λ) έχει εξίσωση $\lambda\psi = \alpha(\chi+\kappa)$, όπου $\alpha \neq 0$ και κ, $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 4Χ2

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2, 1)$, $\vec{\beta}=(1, 3)$, $\vec{u} = 3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και $\vec{w} = \vec{\alpha}+\vec{\beta}$.
Να δειχθούν ότι:

α. $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}=45°$, Μονάδες 10

β. $|\vec{u}|^2 + |\vec{w}|^2 = |\vec{u}-\vec{w}|^2$, Μονάδες 10

γ. . $\vec{u} \perp \vec{w}$ Μονάδες 5

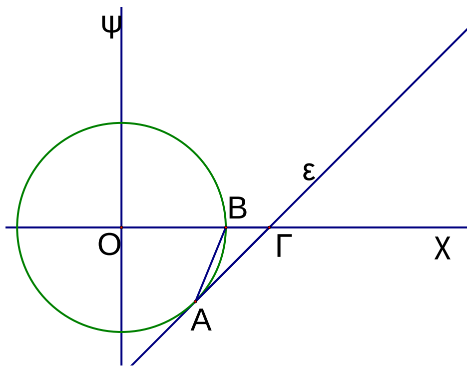
ΘΕΜΑ 3°

Έστω σημείο Α(1, −2) του κύκλου C, με κέντρο την αρχή Ο(0,0) των αξόνων.

α. Να δείξετε ότι ο C έχει εξίσωση $x^2+\psi^2 = 5$. Μονάδες 10

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε, του κύκλου στο Α. Μονάδες 5

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Β και Γ σημεία που ο κύκλος και η ε τέμνουν τον $x'x$, αντίστοιχα.
(Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα) Μονάδες 10



ΘΕΜΑ 4°

Έστω Μ(5−λ, λ−3), $\lambda \in \mathbb{R}$ σημεία σε σύστημα Οχψ.

α. Να δείξετε ότι τα σημεία Μ ανήκουν σε ευθεία ε, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι το σημείο M_o (1, 1) της ε, βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων και να βρείτε την απόσταση του από αυτή. Μονάδες 10

γ. Να βρείτε την εξίσωση έλλειψης C, που έχει κέντρο το Ο, μια κορυφή της είναι το σημείο (2,0) και περνά από το M_o. Μονάδες 5

ΤΑΞΗ Β' (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ) ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ

Θέμα 1°

Α. Αν $\vec{\alpha}, \vec{v}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$. τότε να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$ (Μον. 10)

Β. Έστω μια ευθεία δ και ένα σημείο Ε εκτός της δ, τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ (Μον. 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε σαν Σωστό ή Λάθος καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Έστω δυο σημεία $A(\chi_1,\psi_1)$ και $B(\chi_2,\psi_2)$) του καρτεσιανού επιπέδου. Τότε οι συντεταγμένες του μέσου $M(\chi, \psi)$ του τμήματος ΑΒ είναι $\chi = \dfrac{x_2 - x_1}{2}$ και $\psi = \dfrac{\psi_2 - \psi_1}{2}$

β) Αν $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \,/\!/\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 0$

γ) Η εφαπτομένη του κύκλου $\chi^2 + \psi^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(\chi_1, \psi_1)$ έχει εξίσωση $\chi\chi_1+\psi\psi_1= \rho^2$.

δ) Η εξίσωση $\dfrac{x^2}{\beta^2} + \dfrac{\psi^2}{\alpha^2}$. = 1, όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα χχ.

ε) Έστω Α, Β, Γ τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με $(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2}\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})$. (Μον. 10)

Θέμα 2ο

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α(1, 7), Β(1, 5) και Γ(3, 1). Να βρεθούν:

Α) Η εξίσωση της διαμέσου που άγεται από την κορυφή Α. (Μον.8)

Β) Η απόσταση της κορυφής Β από την πλευρά ΑΓ. (Μον. 10)

Γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μον.7)

Θέμα 3ο ..

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,-2)$. $\vec{\beta} = (2, 0)$, και τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ για τα οποία ισχύουν $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} = \vec{x} - \vec{v}$. όπου $\vec{x} = (\chi_1,\psi_1)$.

Α) Να δείξετε ότι $\vec{u} = (3,-2)$ και $\vec{v} = (\chi_1-2, \psi_1)$

Β) Αν επιπλέον ισχύουν και $\vec{x} \,/\!/\, \vec{u}$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{v}$ (Μον.7)

i) να βρείτε τις συντεταγμένες (x_1, ψ_1) του διανύσματος $\vec{x}$ (Μον.10)

ii) αν $\vec{x} = (-6,4)$ να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{x}})$. (Μον.8)

Θέμα 4ο

Δίνεται κύκλος c_1: $8\chi^2+8\psi^2- 8\chi - 7 = 0$ και η παραβολή c_2: $\psi^2 = 4\chi$.

Α) Να βρείτε τις εφαπτόμενες ε_1, ε_2 της παραβολής, που διέρχονται από το σημείο Α(– 1, 0) (Μον. 9)

Β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου c_1 και να δείξετε ότι οι ε_1, ε_2 εφάπτονται και στον κύκλο c_1.--(Μον. 10)

Γ) Να βρείτε τη γωνία των εφαπτομένων ε_1και ε_2. (Μον.6)

<u>ΘΕΜΑ 1ον</u>

Α) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ =(χ_1, ψ_1) και $\vec{\beta}$ =(χ_2, ψ_2) με συντελεστή διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να δείξετε ότι: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$. **(9 μονάδες)**

Β) Έστω Ε΄ και Ε δυο σημεία ενός επιπέδου. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε΄ και Ε **(4 μονάδες)**

Γ) Να χαρακτηρίσετε σαν **Σωστό** ή **Λάθος** καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις

i) Αν $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{a}\cdot\vec{\beta} = |\vec{a}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

ii) Η παραβολή $\psi^2=2\rho\chi$ έχει άξονα συμμετρίας τον $\psi'\psi$.

iii) Κάθε εξίσωση της μορφής Αχ + Βψ + Γ = 0 παριστάνει ευθεία.

iv) Η απόσταση του σημείου Μ (x_0, ψ_0) από την ευθεία ε: Αχ + Βψ + Γ = 0 δίνεται από τον τύπο $d(M,\varepsilon) = \dfrac{|Ax_0 + B\psi_0 + \Gamma|}{\sqrt{x_o^2 + \psi_o^2}}$ **(12 μονάδες)**

<u>ΘΕΜΑ 2ον</u>

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

α)Να υπολογίσετε:

i) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. **(5 μονάδες)**

ii) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\kappa}\cdot\vec{a}$ όπου $\vec{\kappa} = \vec{\beta} - 2\vec{a}$ **(8 μονάδες)**

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\kappa}| = |\vec{\beta}|$ **(6 μονάδες)**

γ) να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\kappa}, \vec{a}$ **(6 μονάδες)**

<u>ΘΕΜΑ 3ον</u>

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΑ, όπου Ο η αρχή των αξόνων και Α(-1, 2) **(7 μονάδες)**

β) Δίνεται η ευθεία ζ με εξίσωση ζ: 2χ + ψ = 0. Να βρείτε την απόσταση του σημείου Β(-6, 7) από την ευθεία ζ **(8 μονάδες)**

γ) Να βρείτε σημείο Μ της ευθείας ε: χ + ψ – 1 = 0 ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΟ να είναι 2τ.μ. **(10 μονάδες)**

<u>ΘΕΜΑ 4ον</u>

Δίνεται ο κύκλος $\chi^2 + (\psi + 1)^2=5$ και το σημείο Α(0, -6)

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1, ε_2 του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α **(10 μονάδες)**

β) Αν ε_1: 2χ – ψ – 6 = 0 και ε_2: 2χ + ψ + 6 = 0 να βρείτε σε ποια σημεία τέμνουν τον άξονα χ΄χ **(5 μονάδες)**

Γ) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες τα παραπάνω σημεία και μήκος μεγάλου άξονα 10 **(10 μονάδες)**

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δεν είναι παράλληλα στον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. ***Μονάδες*** *9*

Α2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Η απόσταση του σημείου $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon : \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, δίνεται από τον τύπο: $d(\mathrm{A}, \varepsilon) = \dfrac{|\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \Gamma|}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}$.

β. Η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta > 0$ έχει εκκεντρότητα που δίνεται από τον τύπο: $\varepsilon = \dfrac{\beta}{\alpha}$

γ. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 2py,\ p > 0$ και το σημείο της $\mathrm{A}(x_0, y_0)$. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της παραβολής στο A δίνεται από τον τύπο: $x \cdot x_1 = p \cdot (y + y_1)$.

δ. Δίνεται το σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ και ο αριθμός $\lambda \in R$. Τότε όλες οι ευθείες που διέρχονται από το A δίνονται από τον τύπο: $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$. ***Μονάδες*** *16*

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $C : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, και το σημείο $\mathrm{A}(0,1)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (C) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. ***Μονάδες*** *15*

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου (C) που έχει μέσο το A. ***Μονάδες*** *10*

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 7$.

Γ1. Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. ***Μονάδες*** *7*

Γ2. Να υπολογίσετε την γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$. ***Μονάδες*** *7*

Γ3. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} = -\dfrac{2}{3}\vec{\beta}$. ***Μονάδες*** *11*

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι ειθείες $\varepsilon_1 : 2\lambda^2 x - \lambda y = 2$, $\varepsilon_2 : 4\lambda x + y = \dfrac{1}{\lambda}$ με $\lambda \in R^*$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται για κάθε $\lambda \in R^*$ ***Μονάδες*** *5*

Δ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής τους είναι το $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2\lambda^2}, -\dfrac{1}{\lambda}\right)$. ***Μονάδες*** *10*

Δ3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R^*$. ***Μονάδες*** *10*

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
Β' ΤΑΞΗΣ στα *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ*

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι σημεία του επιπέδου και $M(x,y)$ το μέσο του AB, να αποδείξετε ότι: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ **(10 μονάδες)**

Α2. Τι ονομάζουμε έλλειψη, με εστίες δυο σημεία E,E' ενός επιπέδου; **(5 μονάδες)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ ισχύει: $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

β. Η εξίσωση $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-\Gamma>0$.

γ. Η παραβολή με εστία $E\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα ευθεία την $x=-\dfrac{p}{2}$ έχει εξίσωση $y^2=2px$.

δ. Το εμβαδό τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο: $(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}})\right|$

ε. Η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$, δίνεται από τον τύπο: $y_1x+x_1y=\rho^2$ **(2x5=10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία Α(4, 1), Β(2, 3) και Γ(λ-1, λ+2) όπου $\lambda\in\Re$.

Β1. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda\in\Re$ ώστε τα Α,Β,Γ να είναι συνευθειακά **(13 μονάδες)**

Β2. Για $\lambda=3$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ **(12 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή $\mathrm{A}(2,1)$. Η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι $x+y=1$ και η εξίσωση της διαμέσου ΒΜ είναι $3x-2y=-2$. Να βρεθούν:

Γ1. Η εξίσωση της πλευράς ΑΓ **(9 μονάδες)**

Γ2. Οι συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ **(16 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}$, και η εξίσωση

$$x^2+y^2-2|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|x-2|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}|y+\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2=0 \quad \textbf{(1)}$$

Δ1.Δείξτε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο ακτίνας $\rho=2|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$ **(10 μονάδες)**

Δ2. Για $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=1$ και $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{1}{4}$, να αποδείξετε ότι ο παραπάνω κύκλος (1) παίρνει τη μορφή

$$C:(x-2)^2+(y-2)^2=6$$ **(10 μονάδες)**

Δ3.Να εξετάσετε αν η εστία της παραβολής $y^2=8x$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου C του προηγούμενου ερωτήματος Δ2. **(5 μονάδες)**

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, \psi_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda \in R$, είναι: $\psi - \psi_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$. ***Μονάδες** 10*

Α2. Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα έλλειψης. ***Μονάδες** 6*

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει η ισοδυναμία:
$\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$, δίνεται από τον τύπο: $\frac{x \cdot x_1}{\alpha} + \frac{y \cdot y_1}{\beta} = 1$.

γ. Η εστία της παραβολής $C : x^2 = 2p \cdot y$, είναι η $E(\frac{p}{2}, 0)$. ***Μονάδες** 9*

ΘΕΜΑ Β

Δινονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, -3)$ και $\vec{\beta} = (1, \sqrt{3})$.

Β1. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\beta}$, καθώς και την γωνία που σχηματίζει αυτό με τον θετικό ημιάξονα ox, δηλαδή την $(\widehat{\vec{\beta}, ox})$. ***Μονάδες** 10*

Β2. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και ***Μονάδες** 5*

Β3. Να αποδείξετε ότι η γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$. ***Μονάδες**10*

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : 3x + \psi + \alpha = 0$, $\alpha \in R$ και τα σημεία $A(1,3)$ $B(-2,2)$.

Γ1. Αν η απόσταση του A από την ευθεία (ε) είναι ίση με την απόσταση του A από το σημείο B, να βρείτε ποιές τιμές παίρνει ο αριθμός α. ***Μονάδες** 9*

Γ2. Για $\alpha = 4$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ είναι το σημείο που η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$. ***Μονάδες** 10*

Γ3. Για $\alpha = 4$ να βρείτε ποιό σημείο της ευθείας (ε) απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων O. ***Μονάδες** 6*

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραμετρική εξίσωση $C_\lambda : x^2 + \psi^2 - 2\lambda^2 \cdot x + 2\lambda \cdot \psi - 1 = 0$, $\lambda \in R$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η C_λ παριστάνει εξίσωση κύκλου για κάθε $\lambda \in R$, του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ. ***Μονάδες** 12*

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων K των κύκλων της C_λ, είναι μια παραβολή C_1 της οποίας να βρείτε την εξίσωση. ***Μονάδες** 8*

Δ3. Ποιός από τους παραπάνω κύκλους C_λ με $\lambda < 0$ τέμνει τον $y'y$ στα σημεία A, B ώστε η χορδή AB να έχει μήκος $2\sqrt{2}$. ***Μονάδες** 5*

Β΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Μονάδες 9

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους), τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

Μονάδες 2

β. Έστω α, β μη μηδενικοί ακέραιοι. Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$, τότε ισχύει πάντα ότι α = β.

Μονάδες 2

γ. Η ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$.

Μονάδες 2

Β΄ ΤΑΞΗ

δ. Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα δ : $x = -\frac{p}{2}$ είναι $x^2 = 2py$.

Μονάδες 2

Γ. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** ονομασίες γραμμών του επιπέδου.
*Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\alpha > \beta > 0$	**1.** Κύκλος
β. $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$	**2.** Ευθεία
γ. $y^2 = 2px$, $p > 0$	**3.** Υπερβολή
δ. $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\rho > 0$	**4.** Παραβολή
	5. Έλλειψη

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία Α(14,5) και Β(2, –1).

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β είναι $x - 2y - 4 = 0$.

Μονάδες 13

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x, y΄y στα σημεία Κ(4,0) και Λ(0,-2) αντιστοίχως.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης των ακεραίων αριθμών α και β με το 5 είναι 2, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha^2 + \beta^2 - 2003$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού 8α+9β με το 5.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ και το σημείο Μ(2,1).

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο Κ(2, –1) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Μ(2,1).

Μονάδες 10

γ. Αν Α, Β είναι τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ.

Μονάδες 9

Β΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 29 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα y΄y και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$$

Μονάδες 10

Β. Έστω δύο σημεία Ε και Ε΄ ενός επιπέδου. Τι ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ στο συγκεκριμένο επίπεδο ;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

Μονάδες 2

β. Στην παραβολή $y^2=2px$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \frac{p}{2}$

Μονάδες 2

γ. Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί α, β, γ, k, λ με $\alpha \neq 0$. Αν α/β και α/γ, τότε α/(kβ +λγ) .

Μονάδες 2

δ. Αν Α, Β, Γ είναι κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το εμβαδόν του είναι:

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\text{ΑΒ}}, \overrightarrow{\text{ΑΓ}})\right|$$

Μονάδες 2

ε. Η εκκεντρότητα ε της έλλειψης είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1 , 2)$ και $\vec{\beta} = (2 , 3)$

Α. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

Μονάδες 8

Β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x΄x.

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε τον αριθμό $k \in$ IR, ώστε το διάνυσμα $\vec{\upsilon} = (k^2 - k, k)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο ακέραιος αριθμός $\alpha=12k-5$, όπου $k \in Z$.

Α. Να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 7

Β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α διά του 4.

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A= (\alpha^2+15)(\alpha^2-1)$ είναι πολλαπλάσιο του 64.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες ε_1: $3x+ 4y +6 = 0$ και

ε_2: $3x + 4y + 16 = 0$.

Α. Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2.

Μονάδες 7

Β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2.

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα x΄x και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $d = 4\sqrt{3}$.

Μονάδες 10

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). <u>Να μην αντιγράψετε</u> τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. <u>Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.</u> Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε <u>στο τετράδιό σας σε όλα</u> τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ