# ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2008

## ΘΕΜΑ 1ο

**Έστω $z \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$ και $(1+iz)^{\nu} = \dfrac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i}$ (1)**

**α) Να αποδείξετε ότι ο z δεν είναι πραγματικός αριθμός.**

**β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία κύκλου του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.**

**γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z που έχουν το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο.**

**δ) Να αποδείξετε ότι $4 < |z-3+4i| < 7$**

**ε) Αν οι $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ικανοποιούν την (1) να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 2$**

**Λύση**

**α)** Έστω $z \in \mathbb{R}$, τότε από την (1) έχουμε

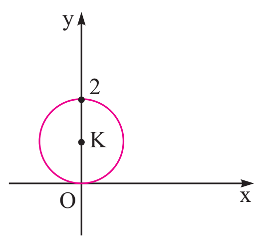
$$\left|(1+iz)^{\nu}\right| = \left|\frac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i}\right| \Leftrightarrow |1+iz|^{\nu} = \frac{|\alpha+\beta i|}{|\beta+\alpha i|} \Leftrightarrow |1+iz|^{\nu} = 1 \Leftrightarrow |1+iz| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+z^2} = 1 \Leftrightarrow z = 0,$$

όμως για $z=0$ η (1) γράφεται $\dfrac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i} = 1 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)+(\beta-\alpha)i = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$, άτοπο από υπόθεση.

**β)** Από την (1) έχουμε

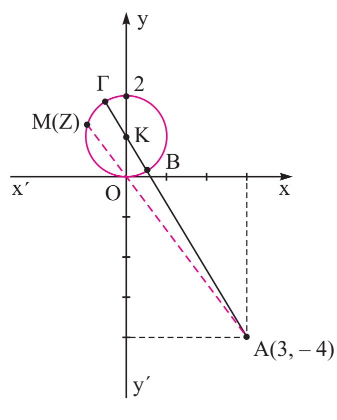
$$|1+iz| = 1 \Leftrightarrow |iz - i^2| = 1 \Leftrightarrow |i| \cdot |z-i| = 1 \Leftrightarrow |z-i| = 1,$$

άρα οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία του κύκλου με κέντρο το $K(0,1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.




**γ)** Είναι $|z|_{\mu\varepsilon\gamma} = 2$, όταν $z = 2i$ και $|z|_{\varepsilon\lambda} = 0$, όταν $z = 0$

**δ)** Το $|z-3+4i| = |z-(3-4i)|$ και παριστάνει την απόσταση των εικόνων $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z από το σημείο $A(3,-4)$. Αν B, Γ είναι τα σημεία τομής της ευθείας AK με τον κύκλο, τότε έχουμε: $(AB) \leq (AM) \leq (A\Gamma)$, όμως $(AK) = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$ και $(AB) = (AK) - \rho = \sqrt{34} - 1$, $(A\Gamma) = (AK) + \rho = \sqrt{34} + 1$, επομένως $\sqrt{34} - 1 \leq |z-3+4i| \leq \sqrt{34} + 1$, όμως $\sqrt{34} + 1 < 7$ και $4 < \sqrt{34} - 1$, άρα $4 < |z-3+4i| < 7$




**ε)** Οι εικόνες Δ, Ε των $z_1$, $z_2$ είναι σημεία του κύκλου $|z-i| = 1$, άρα $|z_1 - z_2| = (\Delta E) \leq 2\rho = 2$

## ΘΕΜΑ 2ο

**Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί $z_1$, $z_2$, $z_3$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$ και**

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{1}{2}$$

**Να αποδείξετε ότι:**

**α)** $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

**β)** **Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των $z_1$, $z_2$, $z_3$ είναι ισόπλευρο.**

**Λύση**

**α)** Έχουμε $2\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{z_1}{z_2} + \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \Leftrightarrow 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}}{z_2\overline{z_2}} \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = -|z_2|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = -\rho^2$ (1).

Ομοίως έχουμε $z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3 = -\rho^2$ (2) και $z_1\overline{z_3} + \overline{z_1}z_3 = -\rho^2$ (3)

Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z_1 + z_2 + z_3)\left(\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z_1 + z_2 + z_3)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_3} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} + z_3\overline{z_2} + z_3\overline{z_3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) + |z_2|^2 + \left(z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2}\right) + |z_3|^2 + \left(z_1\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho^2 - \rho^2 + \rho^2 - \rho^2 + \rho^2 - \rho^2 = 0$, αληθές. Άρα $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

**β)** Αρκεί να δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Επειδή $z_2 = -z_1 - z_3$ διαδοχικά έχουμε:

$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow |z_1 + z_1 + z_3| = |-z_1 - z_3 - z_3| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |2z_1 + z_3|^2 = |z_1 + 2z_3|^2 \Leftrightarrow (2z_1 + z_3)\left(2\overline{z_1} + \overline{z_3}\right) = (z_1 + 2z_3)\left(\overline{z_1} + 2\overline{z_3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4z_1\overline{z_1} + 2z_1\overline{z_3} + 2\overline{z_1}z_3 + z_3\overline{z_3} = z_1\overline{z_1} + 2z_1\overline{z_3} + 2z_3\overline{z_1} + 4z_3\overline{z_3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3|z_1|^2 = 3|z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$, αληθές. Άρα $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$.

Ομοίως δείχνουμε ότι $|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ , οπότε $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Άρα το τρίγωνο που ορίζουν οι εικόνες των $z_1$, $z_2$, $z_3$ είναι ισόπλευρο.

## ΘΕΜΑ 3ο

**Δίνεται η εξίσωση $z^2 - \alpha z + \beta = 0$, $z \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $z_1$, $z_2$, είναι οι ρίζες της με $z_1 = 2 + i$**

**1) Να βρείτε τους αριθμούς α, β.**

**2) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^{2008} + z_2^{2008}$ είναι πραγματικός.**

**3) Έστω $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1$, $z_2$, $z_3$ αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο με $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{1}{5}\cdot(17 + i)$, τότε:**

**α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.**

**β) Αν $|w - z_1| = |\overline{w} - z_1|$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$.**

**γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w, που επαληθεύουν την εξίσωση $|w - z_2| + |\overline{w} - z_2| = 10$, βρίσκονται σε έλλειψη.**

**Λύση**

**1)** Έχουμε την εξίσωση $z^2 - \alpha z + \beta = 0$ (1), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αφού $z_1 = 2 + i$ ρίζα της (1) τότε ρίζα της θα είναι και η $z_2 = \overline{z_1} = 2 - i$, οπότε από τις σχέσεις Vieta έχουμε: $z_1 + z_2 = -\dfrac{-\alpha}{1} \Leftrightarrow (2+i) + (2-i) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 4$

$$z_1 z_2 = \frac{\beta}{1} \Leftrightarrow (2+i)(2-i) = \beta \Leftrightarrow 2^2 + 1^2 = \beta \Leftrightarrow \beta = 5$$

**2)** Έστω $u = z_1^{2008} + z_2^{2008} = z_1^{2008} + \left(\overline{z_1}\right)^{2008}$

$$\overline{u} = \overline{z_1^{2008} + z_2^{2008}} = \overline{z_1^{2008}} + \overline{\left(\overline{z_1}\right)^{2008}} = \left(\overline{z_1}\right)^{2008} + z_1^{2008} = u$$

Έχουμε $\overline{u} = u \Leftrightarrow u - \overline{u} = 0 \Leftrightarrow 2i \cdot \mathrm{Im}(u) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \mathbb{R}$

**3) α)** Είναι $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{1}{5}(17+i) = \dfrac{2+i}{2-i} + \dfrac{1}{5}(17+i) = \dfrac{(2+i)^2}{2^2+1^2} + \dfrac{1}{5}(17+i) = \dfrac{4+4i-1}{5} + \dfrac{1}{5}(17+i) =$

$$= \frac{3 + 4i + 17 + i}{5} = \frac{20 + 5i}{5} = 4 + i$$

Οι εικόνες των μιγαδικών $z_1$, $z_2$, $z_3$ στο μιγαδικό επίπεδο αντίστοιχα είναι $A(2,1)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma(4,1)$. Έχουμε:

$$(AB) = |z_2 - z_1| = |2 - i - 2 - i| = |-2i| = |-2|\cdot|i| = 2$$

$$(B\Gamma) = |z_3 - z_2| = |4 + i - 2 + i| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$(A\Gamma) = |z_1 - z_3| = |2 + i - 4 - i| = |-2| = 2$$

Παρατηρούμε ότι $AB = A\Gamma$. Επίσης $AB^2 = 2^2 = 4$, $A\Gamma^2 = 2^2 = 4$, $B\Gamma^2 = 8$, δηλαδή $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

**β)** $|w-z_1|=|\overline{w}-z_1| \Leftrightarrow |w-z_1|=|\overline{w}-\overline{z_2}| \Leftrightarrow |w-z_1|=|\overline{w-z_2}| \overset{|\overline{z}|=|z|}{\Leftrightarrow} |w-z_1|=|w-z_2| \quad (1)$

(εξίσωση μεσοκαθέτου)

Έστω: $w=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, $M(x,y)$ η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο τότε η (1) γίνεται:

$|x+yi-2-i|=|x+yi-2+i| \Leftrightarrow |(x-2)+(y-1)i|=|(x-2)+(y+1)i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow \cancel{(x-2)^2}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}=\cancel{(x-2)^2}+\cancel{y^2}+2y+\cancel{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=0$. Άρα $w\in\mathbb{R}$.

**γ)** $|w-z_2|+|\overline{w}-z_2|=10 \Leftrightarrow |w-z_2|+|\overline{w}-\overline{z_1}|=10 \Leftrightarrow |w-z_2|+|\overline{w-z_1}|=10 \overset{|\overline{z}|=|z|}{\Leftrightarrow}$

$|w-z_2|+|w-z_1|=10(=2\cdot5=2\cdot\alpha) \quad (1)$

Παρατηρούμε ότι $|z_2-z_1|=2\cdot1=2\gamma$

Έχουμε $2\gamma<2\alpha$ άρα η (1) είναι εξίσωση έλλειψης.

## ΘΕΜΑ 4ο

**Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και ο μιγαδικός αριθμός $z\in\mathbb{C}$. Αν ισχύει $f'(x)i^{-2008}+2xi^{-2006}=|2z+2|i^{2007}-|z-1|i^{-2009}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$ και $|z-1|=|2z+2|$**

**β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z$ στο μιγαδικό επίπεδο.**

**γ) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνονται η γραφική παράσταση της $f$ και το ορθογώνιο με κορυφές $O(0,0)$, $A(\kappa,0)$, $B(\kappa,\kappa^2+1)$ και $\Gamma(0,\kappa^2+1)$, $\kappa>0$. Να βρείτε την τιμή του $\kappa$ ώστε η γραφική παράσταση της $f$ να διαιρεί το ορθογώνιο ΟΑΒΓ σε δύο ισεμβαδικά χωρία.**

**Λύση**

**α)** $f'(x)i^{-2008}+2xi^{-2006}=|2z+2|i^{2007}-|z-1|i^{-2009} \qquad (1)$

$i^{-2008}=\frac{1}{i^{2008}}=\frac{1}{i^{4\cdot502}}=\frac{1}{(i^4)^{502}}=\frac{1}{1}=1$, $\qquad i^{-2006}=\frac{1}{i^{2006}}=\frac{1}{i^{4\cdot501+2}}=\frac{1}{i^2}=-1$

$i^{2007}=i^{4\cdot501+3}=i^3=i^2\cdot i=-i$, $\qquad i^{-2009}=\frac{1}{i^{2009}}=\frac{1}{i^{4\cdot502+1}}=\frac{1}{i}=\frac{-i}{-i^2}=-i$

$$(1)\Leftrightarrow f'(x)-2x=-|2z+2|i+|z-1|i \Leftrightarrow f'(x)+|2z+2|i=2x+|z-1|i \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=2x \\ \text{και} \\ |2z+2|=|z-1| \end{cases}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f'(x)=2x \Leftrightarrow f'(x)=(x^2)'$, άρα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=x^2+c$, $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=1 \Leftrightarrow 0^2+c=1 \Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$.

**β)** $|2z+2|=|z-1| \Leftrightarrow |2(z+1)|=|z-1| \Leftrightarrow 2|z+1|=|z-1|$ (2)

Έστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ και $M(x,y)$ η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η (2) γράφεται:

$$2|x+yi+1|=|x+yi-1| \Leftrightarrow 2|x+1+yi|=|x-1+yi| \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \Leftrightarrow 4\left(x^2+2x+1+y^2\right)=x^2-2x+1+y^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+8x+4+4y^2-x^2+2x-1-y^2=0 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2+10x+3=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{10}{3}x+1=0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A=\frac{10}{3}$, $B=0$ και $\Gamma=1$.

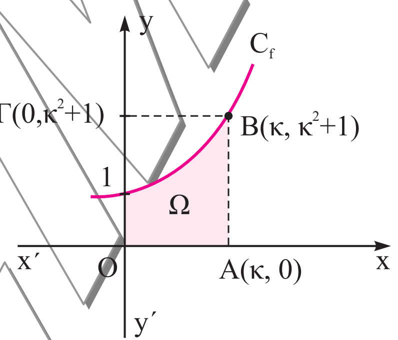
Παρατηρούμε ότι $A^2+B^2-4\Gamma=\left(\frac{10}{3}\right)^2-4\cdot 1=\frac{100}{9}-4=\frac{64}{9}>0$.

Άρα η (3) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή $K\left(-\frac{5}{3},0\right)$ και

ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{4}{3}$. Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $z$ είναι

ο κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{5}{3},0\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{4}{3}$

**γ)**




Αν $\Omega$ το χωρίο που περικλείεται από την $C_f$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=\kappa$, τότε το εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^\kappa |f(x)|dx=\int_0^\kappa |x^2+1|dx \overset{x^2+1>0}{=} \int_0^\kappa (x^2+1)dx$$

Το εμβαδόν $E'$ του ορθογωνίου ΟΑΒΓ είναι $E'=\beta\cdot\upsilon=\kappa\cdot(\kappa^2+1)$ άρα πρέπει:

$$E(\Omega)=\frac{1}{2}E' \Leftrightarrow \int_0^\kappa (x^2+1)dx=\frac{1}{2}\kappa(\kappa^2+1) \Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^\kappa=\frac{1}{2}\kappa(\kappa^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{3}\kappa^2+1\right)\kappa=\frac{1}{2}\kappa(\kappa^2+1) \overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3}\kappa^2+1=\frac{1}{2}\kappa^2+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa^2=3 \text{ άρα } \kappa=\sqrt{3}$$

## ΘΕΜΑ 5ο

**Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(-1)>0$ και ο μιγαδικός αριθμός $z=\frac{f(-1)f(0)}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{f(1)}i$, για τον οποίο ισχύει ότι $|z|=\frac{z}{2}(1-\sqrt{3}i)$. Να αποδείξετε ότι**

**α)** $f(-1)f(0)f(1)=8$

**β)** $2\mathrm{Re}(z)=|z|$

**γ)** $f(-1)<2<f(1)$

**δ)** **η f αντιστρέφεται και ισχύει** $-1<f^{-1}\left(\sqrt{|z|}\right)<0$

**Λύση**

**α)** Είναι $-1<0<1$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως $f(-1)<f(0)<f(1)$, όμως $f(-1)>0$, άρα $f(1)>f(0)>0$ (1).

Επίσης έχουμε

$$|z|=\frac{z}{2}(1-\sqrt{3}i)=\frac{1}{2}\left(\frac{f(-1)f(0)}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{f(1)}i\right)(1-\sqrt{3}i)=$$

$$=\frac{f(-1)f(0)}{4}+\frac{6}{f(1)}+i\left(\frac{2\sqrt{3}}{f(1)}-\frac{\sqrt{3}f(-1)f(0)}{4}\right)$$

Όμως $|z|$ είναι πραγματικός αριθμός, άρα

$$\frac{2\sqrt{3}}{f(1)}-\frac{\sqrt{3}f(-1)f(0)}{4}=0\Leftrightarrow 8\sqrt{3}-\sqrt{3}f(-1)f(0)f(1)=0\Leftrightarrow f(-1)f(0)f(1)=8 \quad (2)$$

**β)** Έχουμε $|z|=\frac{f(-1)f(0)}{4}+\frac{6}{f(1)}$ με αντικατάσταση του $f(1)=\frac{8}{f(-1)f(0)}$ σύμφωνα με τη σχέση (2), προκύπτει ότι $|z|=\frac{f(-1)f(0)}{4}+\frac{6f(-1)f(0)}{8}=f(-1)f(0)=2\mathrm{Re}(z)$.

**γ)** Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι, αν οι τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ είναι μικρότερες του 2 τότε το γινόμενό τους θα είναι μικρότερο του 8. Άτοπο γιατί το γινόμενό τους είναι ίσο με 8. Άρα θα υπάρχει κάποια τιμή από τις τρεις μεγαλύτερη του 2 και αυτή είναι η $f(1)$. Αν οι παραπάνω τιμές είναι μεγαλύτερες του 2 τότε το γινόμενό τους θα είναι μεγαλύτερο του 8. Άτοπο, άρα θα υπάρχει κάποια τιμή από τις τρεις μικρότερη του 2 και αυτή είναι η $f(-1)$. Επομένως ισχύει $f(-1)<2<f(1)$.

**δ)** Επειδή η $f$ είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι και ″1 – 1″ , οπότε αντιστρέφεται. Θέλουμε

$$-1 < f^{-1}\left(\sqrt{|z|}\right) < 0 \Leftrightarrow f(-1) < \sqrt{|z|} < f(0) \Leftrightarrow f(-1) < \sqrt{f(-1)f(0)} < f(0) \Leftrightarrow$$

$$f^2(-1) < f(-1)f(0) < f^2(0) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(-1) < f(-1)f(0) \\ f(-1)f(0) < f^2(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) < f(0) \\ f(-1) < f(0) \end{cases}$$

που είναι αληθές γιατί $f(0) > f(-1) > 0$. Επομένως ισχύει και η αρχική.

## Θέμα 6ο

**Α) Έστω $w \in \mathbb{C}$ τέτοιος, ώστε $\alpha w + \beta\overline{w} + \gamma = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$. Να αποδείξετε ότι:**

**i) $\alpha\overline{w} + \beta w + \gamma = 0$** **ii) $w \in \mathbb{R}$**

**Β) Αν ο μιγαδικός αριθμός z επαληθεύει τη σχέση $2z^3\overline{z} + 5z\overline{z}^3 + 7 = 0$, τότε:**

**α) Να αποδείξετε ότι:**

**i) $z^3\overline{z} = z\overline{z}^3 = -1$** **ii) $|z| = 1$**

**β) Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z.**

**Λύση**

**Α) i)** Είναι $\alpha w + \beta\overline{w} + \gamma = 0$ (1)

Παίρνοντας τους συζυγείς και των δύο μελών της (1) έχουμε $\alpha\overline{w} + \beta w + \gamma = 0$ (2)

**ii)** Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε

$$\alpha(w-\overline{w}) - \beta(w-\overline{w}) = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(w-\overline{w}) = 0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Leftrightarrow} w = \overline{w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w - \overline{w} = 0 \Leftrightarrow 2i \cdot \mathrm{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$$

**Β) α) i)** Είναι $2z^3\overline{z} + 5z\overline{z}^3 + 7 = 0$ (3)

Παίρνοντας τους συζυγείς και των δύο μελών της (3) έχουμε $2\overline{z}^3 z + 5\overline{z}z^3 + 7 = 0$ (4)

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (3) και (4) έχουμε

$$3z\overline{z}^3 - 3z^3\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z\overline{z}^3 = z^3\overline{z} \qquad (5)$$

Από (3) και (5) προκύπτει ότι $z\overline{z}^3 = z^3\overline{z} = -1$

**ii)** Είναι $z^3\overline{z} = -1$, οπότε $|z^3\overline{z}| = 1 \Leftrightarrow |z|^3|\overline{z}| = 1 \Leftrightarrow |z|^3|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^4 = 1 \overset{|z|\geq 0}{\Leftrightarrow} |z| = 1$

**β)** Έχουμε $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$ και $z^3\overline{z} = -1$ οπότε $z^3\frac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm i$

## ΘΕΜΑ 7ο

**Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με:**

$$g(x)=\frac{(1-f(\kappa))x^7+x^5+1}{f(\kappa)x^6+4x^4+2},\ \kappa\in\mathbb{R}$$

**α) Να αιτιολογήσετε την άποψη ότι έχει νόημα η αναζήτηση των ορίων:**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) \ \text{ και } \ \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

**β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$**

**γ) Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2008)<0$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$**

**δ) Αν $f(\kappa)\in[0,1]$ και για τη συνάρτηση $h(x)=g(x)+2008+\beta$, $x\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$, να βρείτε τις τιμές των β και $f(\kappa)$.**

**Λύση**

**α)** Είναι $g(x)=\dfrac{(1-f(\kappa))x^7+x^5+1}{f(\kappa)x^6+4x^4+2}$, $\kappa\in\mathbb{R}$

Μπορούμε να αναζητήσουμε τα $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ αν το πεδίο ορισμού της g περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$ και $(\beta,+\infty)$ αντίστοιχα. Επειδή η g είναι ρητή της μορφής $g(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ το πεδίο ορισμού είναι $D_g=\mathbb{R}-\{x_0\in\mathbb{R}:Q(x_0)=0\}$

Επειδή μόνο μεμονωμένες τιμές μπορεί να μηδενίζουν τον παρονομαστή άρα το πεδίο ορισμού της g περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$ και $(\beta,+\infty)$.

**β)** Αν $f(\kappa)\neq 0$ και $f(\kappa)\neq 1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-f(\kappa))x^7+x^5+1}{f(\kappa)x^6+4x^4+2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}\cdot x\right]=\frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}\cdot\lim_{x\to+\infty}x$$

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

**i)** Αν $\dfrac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}>0\Leftrightarrow(1-f(\kappa))f(\kappa)>0\Leftrightarrow 0<f(\kappa)<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

**ii)** Αν $\dfrac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}<0\Leftrightarrow f(\kappa)<0$ ή $f(\kappa)>1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

**iii)** Αν $f(\kappa)=1$ τότε $g(x)=\dfrac{x^5+1}{x^6+4x^4+2}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+1}{x^6+4x^4+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{x^6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

**iv)** Αν $f(\kappa)=0$ τότε $g(x)=\dfrac{x^7+x^5+1}{4x^4+2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^7}{4x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}x^3\right)=+\infty$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\begin{cases}+\infty, & \text{αν} \quad 0\le f(\kappa)<1\\ -\infty, & \text{αν} \quad f(\kappa)<0 \text{ ή } f(\kappa)>1\\ 0, & \text{αν} \quad f(\kappa)=1\end{cases}$

**γ)** Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, όμως $f(2008)<0$ άρα και $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα και $f(\kappa)<0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\dfrac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} x$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$, $f(\kappa)<0$, $1-f(\kappa)>0$, άρα $\dfrac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}<0$ επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

**δ)** $h(x)=g(x)+2008+\beta \Leftrightarrow h(x)-\beta=g(x)+2008$

Από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι αν το $f(\kappa)\in[0,1)$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$, άτοπο γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$

Αν $f(\kappa)=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-\beta\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+2008\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)+2008=0+2008=2008$,

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-\beta\right)=2008 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)-\lim\limits_{x\to+\infty}\beta=2008 \Leftrightarrow 1-\beta=2008 \Leftrightarrow \beta=-2007$

## ΘΕΜΑ $8^{o}$

**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\alpha^{\frac{1}{x}}+\alpha^x-2\alpha x$, με $\alpha>1$.**

**α) Να υπολογίσετε τα όρια:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to0^-} f(x),\ \lim_{x\to0^+} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

**β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.**

**δ) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(x)=0$.**

**Λύση**

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

**α)** Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}\right)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^{\frac{1}{x}}\underset{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{u\to0}\alpha^u\underset{\sigma\tau o\ 0}{\overset{\alpha^x\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=}}\alpha^0=1$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2\alpha x)\overset{\alpha>1}{=}+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}\left(x^2\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}\right)\underset{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\frac{1}{u^2}\cdot\alpha^u\right)=0$, γιατί $\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{1}{u^2}=0$ και $\lim\limits_{u\to-\infty}\alpha^u=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^-}\alpha^x=\alpha^0=1$ και $\lim\limits_{x\to0^-}(-2\alpha x)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}\right)\underset{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\alpha^u}{u^2}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{(\alpha^u)'}{(u^2)'}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\alpha^u\cdot\ln\alpha}{2u}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\alpha^u\cdot(\ln\alpha)^2}{2}=+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^+}\alpha^x=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(-2\alpha x)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(x\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}+\frac{\alpha^x}{x}-2\alpha\right)\right]=+\infty$

**β)** Για κάθε $x\in A$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=2x\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}+x^2\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot\ln\alpha\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+\alpha^x\cdot\ln\alpha-2\alpha=2x\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}-\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot\ln\alpha+\alpha^x\cdot\ln\alpha-2\alpha$$

Η $f'$ είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=2\alpha^{\frac{1}{x}}-2\cdot\dfrac{\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot\ln\alpha}{x}+\dfrac{\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot(\ln\alpha)^2}{x^2}+\alpha^x\cdot(\ln\alpha)^2=$

$$=\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot\left[2-2\cdot\frac{\ln\alpha}{x}+\left(\frac{\ln\alpha}{x}\right)^2\right]+\alpha^x\cdot(\ln\alpha)^2=\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot\left[1+\left(1-\frac{\ln\alpha}{x}\right)^2\right]+\alpha^x\cdot(\ln\alpha)^2$$

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in A$, οπότε η $f'$ γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $f'(1)=0$. Άρα για $x>1$, επειδή $f'$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, είναι $f'(x)>f'(1)$, άρα $f'(x)>0$.

Για $0<x<1$ έχουμε $f'(x)<f'(1)$ άρα $f'(x)<0$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\ln\alpha-2\alpha<0$, γιατί για κάθε $\alpha>1$ είναι

$\begin{cases}\ln\alpha<\alpha-1\\-\alpha<-1\end{cases}$ άρα $\ln\alpha-\alpha<\alpha-2\Leftrightarrow\ln\alpha-2\alpha<-2$ άρα $\ln\alpha-2\alpha<0$.

Η $f'$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$, οπότε

$f'((-\infty,0))=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x),\ \lim\limits_{x\to0^-}f'(x)\right)=(-\infty,\ \ln\alpha-2\alpha)$. Άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$,

αφού $\ln\alpha-2\alpha<0$.

Ο πίνακας μεταβολών της $f$ είναι:

| x | $-\infty$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | ‖ | $+$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow 1$ | ‖ | $+\infty \searrow$ | 0 | $\nearrow +\infty$ |
| | | | | ελάχιστο | |

Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $f(1)=0$.

**γ)** Το σύνολο τιμών της είναι $f(A)=(1,+\infty)\cup[0,+\infty)=[0,+\infty)$.

**δ)** Από τον πίνακα μεταβολών έχουμε ότι $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$

## ΘΕΜΑ 9$^{o}$

**Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:**

- **Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.**
- **Η $f$ έχει όριο στο $+\infty$**
- **$f(x)+e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**Να αποδείξετε ότι:**

**α) Το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$**

**β) Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.**

**γ) Η $f$ αντιστρέφεται και να βρείτε την $f^{-1}$**

**δ) Η $f$ έχει δεύτερη παράγωγο και είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.**

**ε) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη $C_f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e+1$ είναι $E=\frac{3}{2}$ τ.μ .**

**Λύση**

**α)** Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+e^{f(x)}\right)=-\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+e^{f(x)}\right)=\ell+e^{\ell}$, ενώ $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Επειδή από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχει το όριο της $f$ στο $+\infty$ υποχρεωτικά $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

**β)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $\left(f(x)+e^{f(x)}\right)'=(x)'$, άρα $f'(x)\cdot\left(1+e^{f(x)}\right)=1\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{f(x)}}>0$, άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα.

**γ)** Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και $''1-1''$, οπότε αντιστρέφεται και ισχύει:

$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, άρα έχουμε $y+e^{y}=f^{-1}(y)$, οπότε $f^{-1}(x)=e^{x}+x$ , $x\in R$.

**δ)** Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $\dfrac{1}{1+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή η f έχει δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=\dfrac{-f'(x)e^{f(x)}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^{2}}<0$

(αφού $f'(x)>0$), οπότε η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

**ε)** Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για $x\geq 1$ είναι $f(x)\geq f(1)=0$, άρα $E=\int_{1}^{e+1}|f(x)|dx=\int_{1}^{e+1}f(x)dx$

Θέτουμε $u=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(u)$, οπότε $dx=\left(f^{-1}(u)\right)'du=\left(e^{u}+u\right)'du=\left(e^{u}+1\right)du$

Για $x=1$ είναι $u=f(1)=0$, γιατί $f^{-1}(0)=1\Leftrightarrow f(1)=0$ και

για $x=e+1$ είναι $u=f(e+1)=1$, γιατί $f^{-1}(1)=e+1\Leftrightarrow f(e+1)=1$, άρα

$$E=\int_{0}^{1}u\left(e^{u}+1\right)du=\int_{0}^{1}ue^{u}du+\int_{0}^{1}udu=\int_{0}^{1}u\left(e^{u}\right)'du+\int_{0}^{1}udu=\left[ue^{u}\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^{u}du+\left[\frac{u^{2}}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{3}{2}\ \text{τ.μ}$$

## ΘΕΜΑ 10ο

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:**

$$\frac{x\cdot f(x)+5}{1+f^{2}(x)}=\frac{1}{2}\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\quad \text{και}\quad f(0)=3$$

**Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^{2}+9}$, $x\in\mathbb{R}$.**

**Β. Αν $g(x)=\ln f(x)$ τότε:**

**α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.**

**β) Να βρείτε την $g'$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt{x^{2}+9}}dx$**

**γ) Να αποδείξετε ότι $J+9I=K$, όπου:**

$$J=\int_{0}^{4}\frac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}+9}}dx\quad \text{και}\quad K=\int_{0}^{4}\sqrt{x^{2}+9}\,dx$$

**δ) Να αποδείξετε ότι $J+K=20$**

**ε) Να υπολογίσετε τα J, K.**

**στ) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την $g^{-1}$.**

**Λύση**

**Α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\frac{x\cdot f(x)+5}{1+f^{2}(x)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1+f^{2}(x)=2x\cdot f(x)+10\Leftrightarrow f^{2}(x)-2x\cdot f(x)=9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{2}(x)-2x\cdot f(x)+x^{2}=x^{2}+9\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^{2}=x^{2}+9\Leftrightarrow h^{2}(x)=x^{2}+9\quad(1),$$

όπου $h(x)=f(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2+9>0 \Leftrightarrow h^2(x)>0 \Leftrightarrow h(x) \neq 0$ και επειδή η $h$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε $h(0)=f(0)-0=3>0$, οπότε $h(x)>0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως από

$(1) \Leftrightarrow h(x)=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, $x \in \mathbb{R}$

**Β. α)** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x+\sqrt{x^2+9}>x+\sqrt{x^2}=x+|x| \geq 0$. Άρα $A=\mathbb{R}$

**β)** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$g'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+9}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2+9}\right)' \Leftrightarrow g'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+9}} \cdot \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}\right) \Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+9}}} \cdot \frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+9}}}{\sqrt{x^2+9}} \Leftrightarrow g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$$

Είναι $I=\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4 g'(x)dx=\left[g(x)\right]_0^4=g(4)-g(0)=\ln 9-\ln 3=\ln\frac{9}{3}=\ln 3$

**γ)** $J+9I=\int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx+9\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4 \frac{x^2+9}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4 \sqrt{x^2+9}dx=K$

**δ)** $K=\int_0^4 (x)' \cdot \sqrt{x^2+9}\,dx=\left[x \cdot \sqrt{x^2+9}\right]_0^4-\int_0^4 x \cdot \left(\sqrt{x^2+9}\right)' dx=$

$=20-\int_0^4 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+9}} \cdot \left(x^2+9\right)' dx=20-\int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx=20-J$. Άρα $J+K=20$

**ε)** Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{matrix} J-K=-9I \\ J+K=20 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} J-K=-9\ln 3 \\ J+K=20 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} J=10-\frac{9}{2}\ln 3 \\ K=10+\frac{9}{2}\ln 3 \end{cases}$

**στ)** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}>0$. Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και "1−1", άρα αντιστρέφεται.

Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y=g(x)$ ως προς x. Είναι

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right) \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+9}=e^y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}=e^y-x \overset{e^y>x}{\Leftrightarrow} x^2+9=\left(e^y-x\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+9=e^{2y}-2xe^y+x^2 \Leftrightarrow 2xe^y=e^{2y}-9 \Leftrightarrow x=\frac{e^{2y}-9}{2e^y} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{e^{2y}-9}{2e^y}$$

Όμως $e^y>x \Leftrightarrow e^y>\frac{e^{2y}-9}{2e^y} \Leftrightarrow 2e^{2y}>e^{2y}-9 \Leftrightarrow e^{2y}>-9$, αληθής για κάθε $y \in \mathbb{R}$

Άρα $f^{-1}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x)=\frac{e^{2x}-9}{2e^x}$.

## ΘΕΜΑ 11ο

**Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + i$ με $x \in \mathbb{R}$, $w = z^2 - \frac{1}{z}$ και συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$.**

**α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $x_0$ τέτοιος, ώστε ο $z^2 - \frac{1}{z}$ να είναι πραγματικός αριθμός.**

**β) Αν $\alpha < \beta < \gamma$, $f(\beta) = x_0$, $f(\gamma) = -1$ και $f'(\alpha) > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 0$**

**γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \mathrm{Re}(w)\,dx$**

**Λύση**

**α)** Είναι $w = z^2 - \frac{1}{z} = (x+i)^2 - \frac{1}{x+i} = x^2 - 1 + 2xi - \frac{x-i}{x^2+1} = \left(x^2 - 1 - \frac{x}{x^2+1}\right) + \left(2x + \frac{1}{x^2+1}\right)i$, $x \in \mathbb{R}$.

Για να είναι ο $z^2 - \frac{1}{z}$ πραγματικός αριθμός πρέπει και αρκεί $2x + \frac{1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x + 1 = 0$.

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = 2x^3 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και παρατηρούμε ότι:

- Η $g$ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πολυωνυμική και
- $g(-1) \cdot g(0) = (-3) \cdot 1 = -3 < 0$.

Ισχύει λοιπόν Θεώρημα Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_o \in (-1, 0)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = 6x^2 + 2 > 0$, άρα η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα $x_o$ είναι μοναδική. Επομένως υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $x_0$ τέτοιος, ώστε ο $z^2 - \frac{1}{z}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

**β)** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[\beta, \gamma]$. Ισχύει λοιπόν Θ.Μ.Τ , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\delta \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(\delta) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} = \frac{-1 - x_0}{\gamma - \beta} = -\frac{x_0 + 1}{\gamma - \beta}$

Είναι $\beta < \gamma \Leftrightarrow \gamma - \beta > 0$, $x_0 \in (-1, 0) \Leftrightarrow -1 < x_0 < 0 \Leftrightarrow x_0 + 1 > 0$, άρα $f'(\delta) < 0$.

Έχουμε:

- Η $f'$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \delta]$ και
- $f'(\alpha) \cdot f'(\delta) < 0$

Ισχύει λοιπόν Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

**γ)** $\int_0^1 \mathrm{Re}(w)\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - 1 - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - [x]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'\,dx =$

$$= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{4 + 3\ln 2}{6} = -\frac{4 + \ln 8}{6}.$$

Άρα $\int_0^1 \mathrm{Re}(w)\,dx = -\frac{4 + \ln 8}{6}$.

## ΘΕΜΑ 12$^{o}$

**Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x+1)-7}{x-1}=10$.**

**1) Να αποδείξετε ότι: α) $f(3)=7$ β) $f'(3)=5$**

**2) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3,f(3))$.**

**α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση y = 5x – 8.**

**β) Ένα σημείο Σ, που έχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται στην ευθεία (ε). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2 m/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ.**

**Λύση**

**1. α)** Θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(2x+1)-7}{x-1}\Leftrightarrow f(2x+1)=(x-1)h(x)+7$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}f(2x+1)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)h(x)+7\right]=7$ (1)

Θέτουμε $2x+1=\omega$, (όταν $x\to 1$ το $\omega\to 3$), άρα η $(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{\omega\to 3}f(\omega)=7 \overset{\text{f συνεχής}}{\Leftrightarrow} f(3)=7$.

**β)** Για $x\neq 1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x+1)-7}{x-1}=10 \overset{f(3)=7}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x+1)-f(3)}{x-1}=10$ (2)

Θέτουμε $2x+1=\omega$, (όταν $x\to 1$ το $\omega\to 3$), άρα η (2) για $\omega\neq 3$ γίνεται

$$\lim_{\omega\to 3}\frac{f(\omega)-f(3)}{\frac{\omega-1}{2}-1}=10\Leftrightarrow \lim_{\omega\to 3}\frac{f(\omega)-f(3)}{\frac{\omega-3}{2}}=10\Leftrightarrow \lim_{\omega\to 3}\left[2\cdot\frac{f(\omega)-f(3)}{\omega-3}\right]=10,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\lim\limits_{\omega\to 3}\dfrac{f(\omega)-f(3)}{\omega-3}=5$, άρα $f'(3)=5$.

**2. α)** Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3,f(3))$

$$(\varepsilon):\ y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-7=5(x-3)\Leftrightarrow y=5x-8$$

**β)** Έστω $\Sigma(x,y)$ σημείο της (ε). Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΣ είναι:

$$(\text{ΟΜΣ})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O\Sigma}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3 & 7\\ x & y\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|3y-7x|=\frac{1}{2}|3(5x-8)-7x|=$$

$$=\frac{1}{2}|8(x-3)|=4|x-3|=4x-12,\ (x>3)$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ είναι:

$$\left(E(x(t))\right)'=\left(4x(t)-12\right)'=4x'(t)=4\cdot 2=8\ m^2/\text{sec}$$

## ΘΕΜΑ 13ο

**Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + e^x - 1$**

**1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.**

**2) Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$**

**3) Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1$.**

**α) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.**

**β) Να αποδείξετε ότι $g(0) = 0$**

**4) Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) > 0$**

**5) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από το σημείο $M(e,1)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο M.**

**Λύση**

**1)** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 1 + e^x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

**2)** Είναι $e^x = 1 - x \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Προφανής λύση η $x = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και ″1–1″ η λύση αυτή είναι μοναδική.

**3) α)** Έστω ότι η g δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in A_g$ με $x_1 < x_2$, ώστε

$\begin{cases} g(x_1) \ge g(x_2) \\ e^{g(x_1)} \ge e^{g(x_2)} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} g(x_1) + e^{g(x_1)} \ge g(x_2) + e^{g(x_2)} \Leftrightarrow 2x_1 + 1 \ge 2x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \ge x_2$ άτοπο, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

**β)** Ισχύει $g(0) + e^{g(0)} = 1$ προφανής λύση η $g(0) = 0$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και ″1–1″ η λύση αυτή είναι μοναδική.

**4)** Είναι $g(f(x)) > 0 \Leftrightarrow g(f(x)) > g(0) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$

**5)** Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι και ″1–1″.

Το σημείο $M \in C_{f^{-1}}$, αν και μόνο αν, το συμμετρικό του M ως προς την $y = x$, δηλαδή το σημείο $N(1,e) \in C_f$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο N είναι:

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = (1 + e)x - 1$$

Η συμμετρική της (ε) ως προς την $y = x$ θα είναι η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο M και βρίσκουμε ότι έχει εξίσωση $y = \dfrac{1}{1+e}x + \dfrac{1}{1+e}$

## ΘΕΜΑ 14ο

**Δίνεται η συνάρτηση** $f(x)=\int_2^{x^2-3}\frac{\ln(t-1)}{t^2+1}dt$

**1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.**

**2) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**3) Να αποδείξετε ότι** $\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{f(x)}{x-\sqrt{5}}=0$

**4) Να αποδείξετε ότι η** $C_f$ **εφάπτεται στον άξονα** $x'x$**, σε δύο σημεία.**

**5) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό** $z=f(3)-2i$**. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z στο επίπεδο βρίσκεται στο τέταρτο τεταρτημόριο.**

**Λύση**

**1)** Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(t)=\frac{\ln(t-1)}{t^2+1}$ και $F(x)=\int_2^x g(t)dt$.

Η συνάρτηση g είναι ορισμένη και συνεχής στο $A_g=(1,+\infty)$, το $2\in(1,+\infty)$, άρα η συνάρτηση F έχει πεδίο ορισμού το $A_F=(1,+\infty)$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $h(x)=x^2-3$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$$f(x)=(F\circ h)(x)=F(h(x))=\int_2^{x^2-3}\frac{\ln(t-1)}{t^2+1}dt$$

Είναι $A_f=\{x\in A_h\,/\,h(x)\in A_F\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,(x^2-3)\in(1,+\infty)\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-3>1\}=$

$$=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2>4\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|>2\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>2 \text{ ή } x<-2\}\neq\varnothing$$

Επομένως $A_f=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

**2)** Η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $h(x)=x^2-3$ και $F(x)=\int_2^x g(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης g.

Για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ έχουμε

$$f'(x)=\left(\int_2^{x^2-3}\frac{\ln(t-1)}{t^2+1}dt\right)'=\frac{\ln(x^2-4)}{(x^2-3)^2+1}\cdot(x^2-3)'=\frac{2x\cdot\ln(x^2-4)}{(x^2-3)^2+1}$$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ \text{ή}\\ x^2-4=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ \text{ή}\\ x^2=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\notin A_f \quad \text{απορρίπτεται}\\ \text{ή}\\ x=\pm\sqrt{5}\in A_f \quad \text{δεκτές}\end{array}\right.$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς και η μονοτονία και τα ακρότατα της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| x | $-\infty$ | $-\sqrt{5}$ | | $-2$ | $2$ | | $\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′ | − | 0 | + | ‖ | | ‖ − | 0 | + | |
| f | ↘ | 0 | ↗ | ‖ | | ‖ ↘ | 0 | ↗ | |
| | | ελάχιστο | | | | | ελάχιστο | | |

Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right]$ και $\left(2, \sqrt{5}\right]$, γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\sqrt{5}, -2\right)$ και $\left[\sqrt{5}, +\infty\right)$. Επίσης η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1=-\sqrt{5}$ και στο $x_2=\sqrt{5}$ με ελάχιστη τιμή $f\left(-\sqrt{5}\right)=f\left(\sqrt{5}\right)=0$.

**3)** Για $x \neq \sqrt{5}$ έχουμε:

$$\lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{f(x)}{x-\sqrt{5}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H}{=}} \lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{2x\cdot\ln\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-3\right)^2+1} = 0 \qquad (1^{ος} \text{ τρόπος})$$

$$\lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{f(x)}{x-\sqrt{5}} = \lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{f(x)-f\left(\sqrt{5}\right)}{x-\sqrt{5}} = f'\left(\sqrt{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}\cdot\ln\left(\sqrt{5}^2-4\right)}{\left(\sqrt{5}^2-3\right)^2+1} = 0 \qquad (2^{ος} \text{ τρόπος})$$

**4)** Επειδή $\begin{pmatrix} f'\left(-\sqrt{5}\right)=0 \\ f\left(-\sqrt{5}\right)=0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} f'\left(\sqrt{5}\right)=0 \\ f\left(\sqrt{5}\right)=0 \end{pmatrix}$ η $C_f$ εφάπτεται στον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία.

**5)** Το $3\in\left(\sqrt{5},+\infty\right)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό ισχύει $f(3)>f\left(\sqrt{5}\right)$, άρα $f(3)>0$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=f(3)-2i$ έχει θετική τετμημένη και αρνητική τεταγμένη, δηλαδή βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο.

## ΘΕΜΑ 15$^{ο}$

**Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:**

$$f(x)=1+\int_1^x\left(1+\frac{f(t)}{t}\right)dt \quad \text{για κάθε } x>0 \qquad (1)$$

**1) Να αποδείξετε ότι:**

**α)** $f(x)=x\ln x+x,\ x>0$

**β)** $f(0)=0$

**2) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**3) Αποδείξτε ότι η $C_f$ είναι κυρτή και ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία συνευθειακά σ' αυτή.**

**4) Να αποδείξετε ότι** $1\le\dfrac{\int_1^e f(x)dx}{e-1}\le 2e$

**Λύση**

**1) α)** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, γιατί η $\int_1^x\left(1+\frac{f(t)}{t}\right)dt$ είναι παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης $1+\frac{f(t)}{t}$ στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε

$$f'(x)=\left(1+\int_1^x\left(1+\frac{f(t)}{t}\right)dt\right)'\Leftrightarrow f'(x)=1+\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow xf'(x)=x+f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(\ln x)'\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=\ln x+c\Leftrightarrow f(x)=x\ln x+cx$$

Από την (1) για $x=1$ έχουμε $f(1)=1$, οπότε $f(1)=\ln 1+c\Leftrightarrow c=1$. Άρα $f(x)=x\ln x+x,\ x>0$

**β)** Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 έχουμε

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x\ln x+x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x+1}{\frac{1}{x}}\ \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H}{=}}\ \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$ Άρα $f(0)=0$

**2)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f'(x)=\ln x+2$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\ln x+2=0\Leftrightarrow\ln x=-2\Leftrightarrow x=e^{-2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e^2}$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\ln x+2>0\Leftrightarrow\ln x>-2\Leftrightarrow x>e^{-2}\Leftrightarrow x>\frac{1}{e^2}$$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι

| x | 0 | $\frac{1}{e^2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f′ | − | 0 | + |
| f | ↘ | | ↗ |
| | τ.μ. | ελάχιστο | |

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{1}{e^2}\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=0$ (άκρο διαστήματος) το $f(0)=0$ και ελάχιστο στο $x_2=\frac{1}{e^2}$ το $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=-e^{-2}$

**3)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f''(x)=\frac{1}{x}$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 0 συμπεραίνουμε ότι η η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Έστω ότι υπάρχουν τρία σημεία συνευθειακά τα $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $\Gamma(x_3,f(x_3))$, τότε

$$\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}\Leftrightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\qquad(I)$$

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1,x_2]$ και $[x_2,x_3]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_2\,,\,x_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Η (Ι) ισοδύναμα γράφεται $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ που είναι άτοπο, γιατί η $f''(x) > 0$, άρα η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και "$1-1$".

**4)** Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, άρα για $1 \le x \le e$ έχουμε $f(1) \le f(x) \le f(e)$, οπότε

$$\int_1^e f(1)dx \le \int_1^e f(x)dx \le \int_1^e f(e)dx \Leftrightarrow \int_1^e 1dx \le \int_1^e f(x)dx \le \int_1^e 2edx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e - 1 \le \int_1^e f(x)dx \le 2e(e-1) \Leftrightarrow 1 \le \frac{\int_1^e f(x)dx}{e-1} \le 2e$$

## ΘΕΜΑ 16$^{ο}$

**Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.**

**1) Να αποδείξετε ότι:**

**α) Η f είναι περιττή και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{4016} f(x-2008)dx$**

**β) Η f είναι παραγωγίσιμη.**

**γ) $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.**

**2) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w = \dfrac{z+i}{z+1}$, $z \in \mathbb{C}$ με $z \ne -1$**

**Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:**

**α) Η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $y = -x - 1$.**

**β) Υπάρχει σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ της $C_f$ με $-1 < \alpha < 0$ το οποίο είναι εικόνα του z.**

**Λύση**

**1) α)** Είναι $A_f = \mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(-x) = \int_{x}^{-x} \frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt = -\int_{-x}^{x} \frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt = -f(x)$$ άρα η f είναι περιττή.

Είναι $I = \int_0^{4016} f(x-2008)dx$. Θέτουμε $u = x - 2008$, οπότε $du = dx$.

Για $x = 0$ είναι $u_1 = -2008$ και για $x = 4016$ είναι $u_2 = 2008$, άρα

$$I = \int_{-2008}^{2008} f(u)du \overset{f(u)=-f(-u)}{=} -\int_{-2008}^{2008} f(-u)du \underset{du=-dx}{\overset{u=-x}{=}}$$

Για $x = -2008$ είναι $u_1 = 2008$ και για $x = 2008$ είναι $u_2 = -2008$, άρα

$$I = -\int_{2008}^{-2008} f(u)(-du) = \int_{2008}^{-2008} f(u)du = -\int_{-2008}^{2008} f(u)du = -I$$

άρα $2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$

**β)** Είναι $f(x)=\int_{-x}^{c}\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt+\int_{c}^{x}\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt=-\int_{c}^{-x}\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt+\int_{c}^{x}\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt$, $c\in\mathbb{R}$ και $x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, γιατί η $\varphi(x)=\int_{c}^{x}\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt$ παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $g(t)=\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}$ στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξη συνεχών συναρτήσεων.

Η $K(x)=\int_{c}^{-x}\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $h(x)=-x$ και $\varphi(x)$.

**γ)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f'(x)=-\frac{(-x)^2}{1+e^{f(-x)}}\cdot(-x)'+\frac{x^2}{1+e^{f(x)}}\overset{f\ \text{περιττή}}{=}\frac{x^2}{1+e^{-f(x)}}+\frac{x^2}{1+e^{f(x)}}=$$

$$=\frac{x^2}{1+\frac{1}{e^{f(x)}}}+\frac{x^2}{1+e^{f(x)}}=\frac{x^2e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}+\frac{x^2}{1+e^{f(x)}}=\frac{x^2\left(1+e^{f(x)}\right)}{1+e^{f(x)}}=x^2.$$

Είναι $f(x)=\frac{x^3}{3}+c$, $x\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ από την αρχική σχέση έχουμε $f(0)=0$, οπότε $c=0$.

Άρα $f(x)=\frac{x^3}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.

**2) α)** Είναι $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow w=\overline{w}\Leftrightarrow\frac{z+i}{z+1}=\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+1}\Leftrightarrow(z+i)(\overline{z}+1)=(z+1)(\overline{z}-i)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}+z+i\overline{z}+i=z\overline{z}-iz+\overline{z}-i\Leftrightarrow(z-\overline{z})+i(z+\overline{z})+2i=0,$$

θέτουμε $z=x+yi$ και ισοδύναμα έχουμε $2yi+2xi+2i=0\Leftrightarrow y=-x-1$.
Άρα η εικόνα του $z$ στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $y=-x-1$.

**β)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=-x-1\Leftrightarrow f(x)+x+1=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x+1$, $x\in[-1,0]$.

- Η $h$ είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $h(-1)=f(-1)=-\frac{1}{3}<0$ , $h(0)=f(0)+1=1>0$ άρα $h(-1)\cdot h(0)<0$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει $\alpha\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $h(\alpha)=0$.

και $\lim_{x\to+\infty}E(\lambda)=e^2-\lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda+2}{e^{\lambda-1}}=e^2$

# ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2008

## ΘΕΜΑ 17$^{o}$

**Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)f(-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**Α) Να αποδείξετε ότι:**

**α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.**

**β) Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.**

**γ) Η $g(x)=f(-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.**

**Β) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{f(-x)}{f(x)}dx=\frac{f^2(0)-f^2(-1)}{2}$**

**Γ) Αν $f(0)=1$ να βρείτε τη συνάρτηση f.**

**Λύση**

**Α) α)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)f(-x)=1$ (1)

Η f έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$, επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)>0$, άρα από (1) έχουμε $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

**β)** Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$x_1<x_2\Leftrightarrow -x_1>-x_2 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(-x_1)>f(-x_2) \underset{\text{ΜΕΛΗ}}{\overset{\text{ΘΕΤΙΚΑ}}{\Leftrightarrow}} \frac{1}{f(-x_1)}<\frac{1}{f(-x_2)}\Leftrightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$$

Άρα η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

**γ)** Στο (β) ερώτημα δείξαμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$f(-x_1)>f(-x_2)\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

οπότε η $g(x)=f(-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

**Β)** Θέτουμε $-x=u\Leftrightarrow x=-u$, οπότε $dx=-du$. Όταν $x=0$ το $u=0$ και όταν $x=1$ το $u=-1$.

Έχουμε $$\int_0^1\frac{f(-x)}{f(x)}dx=-\int_0^{-1}\frac{f(u)}{f(-u)}du=-\int_0^{-1}f(u)\cdot f'(u)du=-\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_0^{-1}=\frac{f^2(0)-f^2(-1)}{2}$$

**Γ)** Η (1) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα θα ισχύει και για $-x\in\mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$f'(-x)\cdot f(x)=1\Leftrightarrow -f'(-x)\cdot f(x)=-1\Leftrightarrow \left[f(-x)\right]'\cdot f(x)=-1 \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$f'(x)\cdot f(-x)+\left[f(-x)\right]'\cdot f(x)=0\Leftrightarrow \left[f(x)\cdot f(-x)\right]'=0\Leftrightarrow f(x)\cdot f(-x)=c_1,\ x\in\mathbb{R}$$

Για $x=0$ είναι $f(0)\cdot f(0)=c_1 \Leftrightarrow c_1=1$. Άρα $f(x)\cdot f(-x)=1,\ x\in\mathbb{R}$ (3)

Από (1) και (3) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f'(x)\cdot f(-x)=f(x)\cdot f(-x) \overset{f(-x)>0}{\Leftrightarrow} f'(x)=f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0 \overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow} f'(x)e^{-x}-e^{-x}f(x)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)\cdot e^{-x}\right)'=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot e^{-x}=c_2$$

Για $x=0$ είναι $f(0)\cdot e^0=c_2 \Leftrightarrow c_2=1$. Επομένως $f(x)\cdot e^{-x}=1 \Leftrightarrow f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

## ΘΕΜΑ 18$^{o}$

**Α) Να αποδείξετε ότι $e^x-x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**Β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=2$, η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $\left(f'(x)-f(x)\right)e^x=(x-1)f'(x)-f(x)$**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.**

**β) Να αποδείξετε ότι $e^{e^{\kappa}-e^{\lambda}}<e^{\kappa-\lambda}$ για κάθε $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}$ με $\kappa<\lambda$.**

**γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς Α , Β έτσι, ώστε**

$$x-2=A\cdot f'(x)+B\cdot f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

**δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{x-2}{e^x-x+1}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.**

**Λύση**

**Α)** Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=e^x-x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h'(x)=e^x-1$

Είναι $h'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0\Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow x>0$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης h είναι

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| h΄(x) | $-$ | 0 | $+$ |
| h(x) | ↘ | 2<br>ελάχιστο | ↗ |

$h(0)=2$

Η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ με ελάχιστη τιμή $h(0)=0$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$h(x)\ge h(0)\Leftrightarrow h(x)\ge 2$, άρα $h(x)>0\Leftrightarrow e^x-x+1>0$

**Β) α)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\left(f'(x)-f(x)\right)e^x=(x-1)f'(x)-f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^x-f(x)e^x-x\cdot f'(x)+f'(x)+f(x)=0\Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(e^x-x+1\right)-f(x)\cdot\left(e^x-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(e^x-x+1\right)-f(x)\cdot\left(e^x-x+1\right)'=0\Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot\left(e^x-x+1\right)-f(x)\cdot\left(e^x-x+1\right)'}{\left(e^x-x+1\right)^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{e^x-x+1}\right)'=0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^x-x+1}=c\Leftrightarrow f(x)=c\cdot\left(e^x-x+1\right).$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=c\cdot\left(e^0-0+1\right)\Leftrightarrow c=1$. Άρα $f(x)=e^x-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

**β)** Η $f(x)=e^x-x+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ (βλέπε (Α) ερώτημα), άρα για κάθε $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}$ με $\kappa<\lambda$ ισχύει

$$f(\kappa)<f(\lambda)\Leftrightarrow e^{\kappa}-\kappa+1<e^{\lambda}-\lambda+1\Leftrightarrow e^{\kappa}-\kappa<e^{\lambda}-\lambda\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{e^{\kappa}-\kappa}<e^{e^{\lambda}-\lambda}\Leftrightarrow\frac{e^{e^{\kappa}}}{e^{\kappa}}<\frac{e^{e^{\lambda}}}{e^{\lambda}}\Leftrightarrow\frac{e^{e^{\kappa}}}{e^{e^{\lambda}}}<\frac{e^{\kappa}}{e^{\lambda}}\Leftrightarrow e^{e^{\kappa}-e^{\lambda}}<e^{\kappa-\lambda}$$

**γ)** Αναζητούμε $A,B\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $x-2=A\cdot f'(x)+B\cdot f(x)\Leftrightarrow$

$$x-2=A\cdot\left(e^x-1\right)+B\cdot\left(e^x-x+1\right)\Leftrightarrow x-2=(A+B)e^x-Bx+B-A$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε θα ισχύει και για συγκεκριμένες τιμές του x.

Για $x=0$ έχουμε $0-2=(A+B)e^0-B\cdot0+B-A\Leftrightarrow-2=\cancel{A}+B+B-\cancel{A}\Leftrightarrow2B=-2\Leftrightarrow B=-1$

Για $x=1$ έχουμε $1-2=(A+B)e^1-B\cdot1+B-A\Leftrightarrow-1=(A+B)e-\cancel{B}+\cancel{B}-A\overset{B=-1}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow-1=(A-1)e-A\Leftrightarrow(A-1)(e-1)=0\Leftrightarrow A=1$$

**δ)** Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_g$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$ είναι:

$$E(\Omega)=-\int_0^1 g(x)dx=-\int_0^1\frac{x-2}{e^x-x+1}dx=-\int_0^1\frac{\left(e^x-1\right)-\left(e^x-x+1\right)}{e^x-x+1}dx=$$

$$=-\int_0^1\frac{e^x-1}{e^x-x+1}dx+\int_0^1\frac{e^x-x+1}{e^x-x+1}dx=-\int_0^1\frac{\left(e^x-x+1\right)'}{e^x-x+1}dx+\int_0^1 1dx=$$

$$=-\left[\ln\left(e^x-x+1\right)\right]_0^1+1(1-0)=-(\ln e-\ln2)+1=\ln2\text{ τ.μ.}$$

## ΘΕΜΑ $19^o$

**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$, $x>0$.**

**i) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$**

**ii) Έστω η συνάρτηση g με $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$, $x>0$ και $g(0)=0$.**

**α) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.**

**β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 g(x)dx$.**

**Λύση**

**i)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right) \underset{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\left(u^2 e^{-u}\right) = \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u^2}{e^u} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}$

$$= \lim_{u\to+\infty}\frac{\left(u^2\right)'}{\left(e^u\right)'} = \lim_{u\to+\infty}\frac{2u}{e^u} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{u\to+\infty}\frac{(2u)'}{\left(e^u\right)'} = \lim_{u\to+\infty}\frac{2}{e^u} = 0$$

**ii) α)** Για να είναι η $g$ συνεχής στο $[0,1]$ πρέπει και αρκεί να είναι συνεχής στο $(0,1)$ και επιπλέον

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1)$$

Η $g$ είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \left(1+\frac{1}{1}\right)e^{-\frac{1}{1}} = g(1)$, άρα η $g$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0 = g(0)$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \underset{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$, άρα η $g$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επομένως η $f$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

**β) 1ος τρόπος**

Η συνάρτηση $g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα και η αρχική της στο $[0,1]$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη:

$$G(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}}, & 0 < x \le 1 \\ c, & x = 0 \end{cases} \quad \text{με} \quad c = \lim_{x\to 0^+} G(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(xe^{-\frac{1}{x}}\right) = 0, \quad \text{άρα} \quad c = 0$$

Επομένως $I = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 G'(x)\,dx = \left[G(x)\right]_0^1 = G(1) - G(0) = \frac{1}{e} - 0 = \frac{1}{e}$

**2ος τρόπος**

$$I = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}dx = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt = \lim_{x\to 0^+}\left[\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt + \int_x^1\frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\int_x^1 (t)'\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt + \int_x^1\frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\left[t\cdot e^{-\frac{1}{t}}\right]_x^1 - \int_x^1 t\cdot\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)'dt + \int_x^1\frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[ e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \cancel{\int_x^1 t\cdot\frac{1}{t^2}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt} + \cancel{\int_x^1 \frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e} - xe^{-\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{e}$$

Γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\right) = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$.

## ΘΕΜΑ 20$^{o}$

**Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2+1}$**

**α) Να μελετήσετε την $f$ ως προς την κυρτότητα.**

**β) Να αποδείξετε ότι $x < f(x) < \dfrac{x}{x^2+1}$ για κάθε $x < 0$.**

**γ) Να αποδείξετε ότι $f(\varepsilon\varphi x) = x$ για κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και να υπολογίσετε το $f(1)$.**

**δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από την $C_f$ και τις ευθείες με εξισώσεις $y = 0$, x=0 και x=1.**

**Λύση**

**α)** Η συνάρτηση $g(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $0 \in \mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί λοιπόν $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $A_f = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \left(\int_0^x \frac{dt}{t^2+1}\right)' = \dfrac{1}{x^2+1} > 0$, άρα $f$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x < 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$, ενώ για $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) = \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = -\dfrac{2x}{x^2+1}$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2x}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Το πρόσημο της $f''$ καθώς και η κυρτότητα της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | 0 | − |
| f(x) | | 0 | |
| | | Σ.Κ. | |

Η $f$ είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο $O(0, f(0))$, δηλαδή στο $O(0, 0)$.

**β)** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και σε κάθε διάστημα $[x, 0]$ με $x < 0$. Ισχύει λοιπόν Θ.Μ.Τ.

οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(0)-f(x)}{0-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(x)}{x}$

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, άρα η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, οπότε για

$$x < \xi < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(0) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} < \frac{f(x)}{x} < 1 \overset{\cdot x<0}{\Leftrightarrow} x < \frac{f(x)}{x} < \frac{x}{x^2+1}$$

**γ)** Αρκεί να δείξουμε ότι $f(\varepsilon\varphi x) = x \Leftrightarrow f(\varepsilon\varphi x) - x = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{dt}{t^2+1} - x = 0$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \displaystyle\int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{dt}{t^2+1} - x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $g'(x) = \left(\displaystyle\int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{dt}{t^2+1}\right)' - (x)' \Leftrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2 x + 1}(\varepsilon\varphi x)' - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Είναι $g(0) = f(0) = 0$, άρα $c = 0$, οπότε $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(\varepsilon\varphi x) - x = 0 \Leftrightarrow f(\varepsilon\varphi x) = x$.

Είναι $f(\varepsilon\varphi x) = x$ για κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, οπότε $f(1) = f\left(\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

**δ)** Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$. Από (α) ερώτημα έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$,

άρα $E = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 1\cdot f(x)dx = \int_0^1 (x)'\cdot f(x)dx = \left[x\cdot f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x\cdot f'(x)dx =$

$$= f(1) - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\ln(x^2+1)\right)'dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi - 2\ln 2}{4} = \frac{\pi - \ln 4}{4}\ \text{τ.μ}$$

## ΘΕΜΑ 21ο

**Δίνεται η συνάρτηση** $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x-1} \frac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}}dt$

**α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της F.**

**β) i) Να αποδείξετε ότι** $F(\eta\mu x) = x - \dfrac{\pi}{6}$ **για κάθε** $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

**ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την** $C_f$ : $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}}$,

**τον άξονα** $x'x$ **και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και** $x = \sqrt{3} - 1$.

**γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα** $I = \displaystyle\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

**Λύση**

**α)** Η συνάρτηση $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}}$ είναι συνεχής στο $(-3,1)$, το $0\in(-3,1)$, άρα η F ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $-3<2x-1<1\Leftrightarrow -2<2x<2\Leftrightarrow -1<x<1$, οπότε $A_F=(-1\,,\,1)$.

Για κάθε $x\in(-1\,,\,1)$ είναι $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-(2x-1+1)^2}}(2x-1)'=\dfrac{2}{\sqrt{4-4x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**β) i)** Για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$\left[F(\eta\mu x)\right]'=\frac{1}{\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}(\eta\mu x)'=\frac{1}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}}\sigma\upsilon\nu x=1,\ \text{οπότε έχουμε}$$

$$\left[F(\eta\mu x)\right]'=(x)'\Leftrightarrow F(\eta\mu x)=x+c \qquad (1)$$

δηλαδή $\displaystyle\int_0^{2\eta\mu x-1} f(t)dt=x+c\ ,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Από την τελευταία σχέση για $x=\dfrac{\pi}{6}$, βρίσκουμε $\displaystyle\int_0^0 f(t)dt=\frac{\pi}{6}+c\Leftrightarrow c=-\frac{\pi}{6}$, οπότε η (1) γίνεται $F(\eta\mu x)=x-\dfrac{\pi}{6},\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (2)

**ii)** Επειδή $f(t)>0$, για κάθε $t\in\left[0,\sqrt{3}-1\right]$ έχουμε $\displaystyle E=\int_0^{\sqrt{3}-1} f(t)dt=\int_0^{2\eta\mu\frac{\pi}{3}-1} f(t)dt=$

$$E=\int_0^{\sqrt{3}-1} f(t)dt=\int_0^{2\eta\mu\frac{\pi}{3}-1} f(t)dt=F\left(\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)\overset{(2)}{=}\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\ \text{τ.μ}$$

**γ)** Από (ii) έχουμε $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}}dt=\frac{\pi}{6}$ (3)

Θέτουμε $x=t+1$, οπότε $dx=dt$. Για $t=0$ είναι $x=1$ και για $t=\sqrt{3}-1$ είναι $x=\sqrt{3}$.

Επομένως η (3) γράφεται $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{\pi}{6}$

## ΘΕΜΑ 22ο

**Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε:**

$$\left(f(x)\right)^2-x\cdot f(x)+x^2-3=0\ \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

**α) Αν το $x=\alpha$ είναι κρίσιμο σημείο της f, να αποδείξετε ότι $f(\alpha)=2\alpha$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε το α.**

**β) Να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει καμπή.**

**γ) Να αποδείξετε ότι η $C_f$ δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.**

**Λύση**

**α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $x=\alpha$ είναι κρίσιμο σημείο της f, οπότε $f'(\alpha)=0$ (1)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $\left(f(x)\right)^2-xf(x)+x^2-3=0$ (2)

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (2) έχουμε $\left[2f(x)-x\right]f'(x)+2x-f(x)=0$ (3)

Για $x=\alpha$ η (3) γίνεται $\left[2f(\alpha)-\alpha\right]\cdot f'(\alpha)+2\alpha-f(\alpha)=0 \overset{f'(\alpha)=0}{\Leftrightarrow} f(\alpha)=2\alpha.$ (4)

Για $x=\alpha$ η (2) γίνεται

$$\left(f(\alpha)\right)^2-\alpha\cdot f(\alpha)+\alpha^2-3=0 \overset{f(\alpha)=2\alpha}{\Leftrightarrow} 4\alpha^2-2\alpha^2+\alpha^2-3=0 \Leftrightarrow 3\alpha^2=3 \Leftrightarrow \alpha^2=1 \Leftrightarrow \alpha=\pm 1.$$

**β)** Έστω ότι η $C_f$ έχει σημείο καμπής το $M\left(x_0, f(x_0)\right)$, τότε $f''(x_0)=0$ (5)

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (3) έχουμε $2\left(f'(x)\right)^2-2f'(x)+2+\left[2f(x)-x\right]f''(x)=0$ (6)

Για $x=x_0$ η (6) γίνεται $2\left(f'(x_0)\right)^2-2f'(x_0)+2+\left[2f(x_0)-x_0\right]f''(x_0)=0$ και λόγω της (5) έχουμε $\left(f'(x_0)\right)^2-f'(x_0)+1=0$ άτοπο, γιατί αν το θεωρήσουμε ως τριώνυμο του $f'(x_0)$, τότε έχει $\Delta=-3<0$, άρα η f δεν παρουσιάζει καμπή.

**γ)** Αν η $C_f$ έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathbb{R}$, όμως για κάθε $x\neq 0$ έχουμε $\left(f(x)\right)^2-x\cdot f(x)+x^2-3=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2-\dfrac{f(x)}{x}+1-\dfrac{3}{x^2}=0$, οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2-\frac{f(x)}{x}+1-\frac{3}{x^2}\right]=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda+1=0$$ άτοπο, άρα η $C_f$ δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

## ΘΕΜΑ 23ο

**Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(0)=g(0)=1$, οι οποίες για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ ικανοποιούν τις σχέσεις $2f'(x)+f^2(x)\cdot g(x)=2g'(x)+g^2(x)\cdot f(x)=0$ (1), $f(x)\neq 0$ και $g(x)\neq 0$.**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.**

**β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.**

**γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.**

**δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$, $x=\alpha+1$ όπου $\alpha>0$, καθώς και το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$.**

**Λύση**

**α)** Από (1) έχουμε $2f'(x)+f^2(x)\cdot g(x)=0 \overset{g(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} 2f'(x)\cdot g(x)+f^2(x)\cdot g^2(x)=0$ (2) και

$2g'(x)+g^2(x)\cdot f(x)=0 \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} 2g'(x)\cdot f(x)+f^2(x)\cdot g^2(x)=0$ (3)

Από (2), (3) έχουμε $2f'(x)\cdot g(x)+\cancel{f^2(x)\cdot g^2(x)}=2g'(x)\cdot f(x)+\cancel{f^2(x)\cdot g^2(x)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x)=g'(x)\cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)=0 \overset{g(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=c,\ x\in(-1,+\infty).$$

Για $x=0$ είναι $\frac{f(0)}{g(0)}=c \Leftrightarrow c=\frac{1}{1}=1$, άρα $\frac{f(x)}{g(x)}=1 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$, $x\in(-1,+\infty)$.

Οι $f$, $g$ είναι συνεχείς στο $(-1,+\infty)$, $f(x)\neq 0$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$. Άρα οι $f$, $g$ διατηρούν σταθερό πρόσημο και επειδή $f(0)=g(0)=1>0$ έχουμε $f(x)>0$ και $g(x)>0$.

**β)** Είναι $2f'(x)+f^2(x)\cdot g(x)=0 \overset{f(x)=g(x)}{\Leftrightarrow} 2f'(x)+f^3(x)=0 \Leftrightarrow 2f'(x)=-f^3(x) \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow -\frac{2f'(x)}{f^3(x)}=1 \Leftrightarrow -2f^{-3}(x)f'(x)=1 \Leftrightarrow \left(f^{-2}(x)\right)'=(x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)}=x+c$$

Για $x=0$ έχουμε $\frac{1}{f^2(0)}=0+c \Leftrightarrow c=1$

Άρα για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι $f^2(x)=\frac{1}{x+1} \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

**γ)** Για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)'=\frac{-\left(\sqrt{x+1}\right)'}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=-\frac{(x+1)'}{2\left(\sqrt{x+1}\right)(x+1)}=-\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}\right)(x+1)}<0$$

Άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,+\infty)$.

Για $x\in(-1,+\infty)$ έχουμε $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=+\infty$, γιατί για $x>-1$ είναι $\sqrt{x+1}>0$ και $\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{x+1}=0$. Άρα η $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$.

Για $x\in(0,+\infty)$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{x}\right)=0=\lambda\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=0=\beta\in\mathbb{R}$$

Άρα η ευθεία $y=0x+0=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

**δ)** $E(\alpha)=\int_\alpha^{\alpha+1}|f(x)|dx \overset{f(x)>0}{=} \int_\alpha^{\alpha+1}f(x)dx=\int_\alpha^{\alpha+1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=\left[2\sqrt{x+1}\right]_\alpha^{\alpha+1}=2\sqrt{\alpha+2}-2\sqrt{\alpha+1}$

Άρα $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}2\left[\sqrt{\alpha+2}-\sqrt{\alpha+1}\right]=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{2\left(\sqrt{\alpha+2}-\sqrt{\alpha+1}\right)\left(\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}\right)}{\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}}=$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2\left[\left(\sqrt{\alpha+2}\right)^2-\left(\sqrt{\alpha+1}\right)^2\right]}{\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2(\alpha+2-\alpha-1)}{\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}}=0.$$

## ΘΕΜΑ 24ο

**Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για $x\in\mathbb{R}^*$ η οποία είναι «1-1» και έχει την ιδιότητα:**

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{f(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x\neq 0$$

**Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta=(0,+\infty)$, τότε:**

**α) Να αποδείξετε ότι $f\left(f\left(x\right)\right)=\frac{1}{x}$ και $f\left(x\right)f\left(\frac{1}{x}\right)=1$ για κάθε $x\neq 0$**

**β) Να αποδείξετε ότι $f\left(1\right)=-1$ και $f\left(-1\right)=1$**

**γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}\left(x\right)=x$ είναι αδύνατη.**

**δ) Αν η f είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι:**

**i) $f\left(x\right)<0$ για κάθε $x>0$ και $f\left(x\right)>0$ για κάθε $x<0$**

**ii) Η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,0\right)$.**

**Λύση**

**α)** Είναι $f^{-1}\left(x\right)=\frac{1}{f\left(x\right)}$ για κάθε $x\neq 0$ (1)

Στη σχέση (1) θέτουμε όπου x το $f\left(x\right)\neq 0$ και έχουμε:

$$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=\frac{1}{f\left(f\left(x\right)\right)}\Leftrightarrow x=\frac{1}{f\left(f\left(x\right)\right)}\Leftrightarrow f\left(f\left(x\right)\right)=\frac{1}{x},\quad x\neq 0 \quad (2)$$

Στη σχέση (2) θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}\neq 0$ και έχουμε:

$$f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x,\ \text{άρα και}\ f^{-1}\left(f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)=f^{-1}\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=f^{-1}\left(x\right)\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f\left(x\right)f\left(\frac{1}{x}\right)=f^{-1}\left(x\right)f\left(x\right)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}f\left(x\right)f\left(\frac{1}{x}\right)=1 \quad \text{για κάθε } x\neq 0 \quad (3)$$

**β)** Από τη σχέση (3) για $x=1$ έχουμε $f\left(1\right)f\left(1\right)=1\Leftrightarrow f^{2}\left(1\right)=1\Leftrightarrow f\left(1\right)=1$ ή $f\left(1\right)=-1$

Έστω ότι $f\left(1\right)=1$, τότε $f^{-1}\left(1\right)=\frac{1}{f\left(1\right)}=1\Leftrightarrow f^{-1}\left(1\right)=1$, όμως η f είναι γνησίως αύξουσα

στο $\left(0,+\infty\right)$, άρα για $x>1\Leftrightarrow f\left(x\right)>f\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)>1\Leftrightarrow\frac{1}{f\left(x\right)}<1\Leftrightarrow f^{-1}\left(x\right)<1$ άτοπο, αφού $f^{-1}\left(1\right)=1$. Άρα $f\left(1\right)=-1$

Από τη σχέση (3) για $x=-1$ έχουμε $f\left(f\left(-1\right)\right)=-1\underset{\text{ερώτημα}}{\overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}}f\left(f\left(-1\right)\right)=f\left(1\right)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}f\left(-1\right)=1$

**γ)** Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$f^{-1}\left(x\right)=x\Leftrightarrow f\left(x\right)=x\Leftrightarrow\frac{1}{f\left(x\right)}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow f^{-1}\left(x\right)=\frac{1}{x},\ \text{άρα}\ x=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^{2}=1\Leftrightarrow x=-1\ \text{ή}\ x=1$$

Όμως για $x=1$ έχουμε $f\left(1\right)=1$ άτοπο, αφού $f\left(1\right)=-1$ και για $x=-1$ έχουμε $f\left(-1\right)=-1$ άτοπο, αφού $f\left(-1\right)=1$. Άρα η εξίσωση $f^{-1}\left(x\right)=x$ είναι αδύνατη.

**δ) i)** Η f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $\left(0,+\infty\right)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f\left(1\right)=-1<0$, οπότε $f\left(x\right)<0$ για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$.

Η f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $\left(-\infty,0\right)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι

$f(-1)=1>0$, οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

**ii)** Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$, τότε για κάθε $x_1,x_2\,(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$ θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{1}{f^{-1}(x_1)}<\frac{1}{f^{-1}(x_2)}\Leftrightarrow f^{-1}(x_1)>f^{-1}(x_2)$ άτοπο αφού $f^{-1}(x_1)$, $f^{-1}(x_2)$ είναι ομόσημοι και $f^{-1}$ διατηρεί τη μονοτονία της f.

## ΘΕΜΑ 25$^o$

**Δίνονται:**

- **Η ευθεία (ε): $y=x-e$**
- **Η συνάρτηση $g(x)=x\ln x-x$ και**
- **Μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f'(\ln x)=x\ln x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$**

**Να αποδείξετε ότι:**

**α) Η ευθεία (ε) εφάπτεται της $C_g$.**

**β) i) Αν η $C_f$ διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$ τότε ισχύει $f(x)=g(e^x)$, $x\in\mathbb{R}$**

**ii) Για κάθε $x\in(0,1)$, ισχύει $-1<f(x)<xe-1$**

**Λύση**

**α)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $g'(x)=\ln x$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y=x-e$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση $C_g$ της συνάρτησης g, αν και μόνο αν, υπάρχει σημείο $M(x_o, g(x_o))$ τέτοιο, ώστε $\begin{cases} g(x_o)=x_o-e \\ g'(x_o)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o\ln x_o-x_o=x_o-e \\ \ln x_o=1 \end{cases} \Leftrightarrow x_o=e$

Έχουμε λοιπόν $\begin{cases} g(e)=0 \\ g'(e)=1 \end{cases}$, συνεπώς η ευθεία (ε): $y=x-e$ εφάπτεται της $C_g$ στο σημείο $M(e,0)$.

**β) i)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε: $f'(\ln x)=x\ln x\Leftrightarrow f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}=\ln x\Leftrightarrow$

$[f(\ln x)]'=(x\ln x-x)'$, άρα: $f(\ln x)=x\ln x-x+c$. Για $x=1$ έχουμε $f(0)=0-1+c\Leftrightarrow c=0$

Άρα $f(\ln x)=x\ln x-x\Leftrightarrow f(\ln x)=g(x)$.

Αν θέσουμε όπου x το $e^x$ έχουμε $g(e^x)=f(\ln e^x)\Leftrightarrow f(x)=g(e^x)$.

**ii)** Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα $[0,x]$, $0<x<1$ με $f'(x)=xe^x$. Ισχύει λοιπόν το Θ.Μ.Τ. άρα θα υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow\xi e^{\xi}=\frac{f(x)+1}{x}$ (1)

Είναι $0<\xi<x<1\Leftrightarrow e^0<e^{\xi}<e^x<e^1\Leftrightarrow 1<e^{\xi}<e^x<e$ άρα $1<e^{\xi}<e$. Έχουμε λοιπόν

$\begin{cases} 0<\xi<1 \\ 1<e^{\xi}<e \end{cases}$ άρα $0<\xi e^{\xi}<e\overset{(1)}{\Leftrightarrow}0<\frac{f(x)+1}{x}<e\Leftrightarrow -1<f(x)<xe-1$

## ΘΕΜΑ 26ο

**Έστω συνεχής συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in (-1,1)$ ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x) \neq 0$ και $ημ\left(\int_0^x f(t)dt\right) = x$. Να αποδείξετε ότι:**

**α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$**

**β) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$**

**Λύση**

**α)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-1,1)$, το $0 \in (-1,1)$, άρα η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$.

Η συνάρτηση $ημ\left(\int_0^x f(t)dt\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in (-1,1)$ έχουμε $\left[ημ\left(\int_0^x f(t)dt\right)\right]' = (x)' \Leftrightarrow συν\left(\int_0^x f(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^x f(t)dt\right)' = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow συν\left(\int_0^x f(t)dt\right)\cdot f(x) = 1 \underset{x\in(-1,1)}{\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}} συν\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{1}{f(x)} \qquad (1)$$

Η f είναι συνεχής στο $(-1,1)$ και δε μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Από (1) για $x = 0$ έχουμε $συν0 = \dfrac{1}{f(0)} \Leftrightarrow f(0) = 1 > 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

**β)** Έχουμε $ημ^2\left(\int_0^x f(t)dt\right) + συν^2\left(\int_0^x f(t)dt\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f^2(x)} = 1 - x^2$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{1-x^2} \overset{f(x)>0,\ x\in(-1,1)}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1).$$

## ΘΕΜΑ 27ο

**Έστω συνάρτηση $f:[0,1] \to R$ με πρώτη παράγωγο γνησίως φθίνουσα και συνεχή. Αν $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ και για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \geq 0$ και $f'(x) \neq 0$ να αποδείξετε ότι:**

**α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.**

**β) Η εξίσωση $f'(x) = f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.**

**γ) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)+1} < \frac{f(1)}{f'(1)}$**

**Λύση**

**α)** Η $f'$ είναι συνεχής και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, άρα η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f'(0) > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

**β)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, άρα ισχύει Θ.Μ.Τ. οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1} = f(1)$ (1).
Άρα η εξίσωση $f'(x) = f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

**γ)** Για $\xi < 1 \overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) > f'(1) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(1) > f'(1) \overset{f'(1)>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(1)}{f'(1)} > 1$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)+1} \leq 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)+1} \leq \int_0^1 1dx \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{1}{f^2(x)+1} - 1\right)dx \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\int_0^1 \frac{f^2(x)}{f^2(x)+1}dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f^2(x)}{f^2(x)+1}dx \geq 0,$$ το οποίο ισχύει.

## ΘΕΜΑ 28ο

**Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ικανοποιούν τις σχέσεις:**

- $f(x) \neq 0$ **και** $g(x) \neq 0$
- $1 + \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{g(x)}$ **και** $1 + \displaystyle\int_0^x g(t)dt = \frac{1}{f(x)}$

**Να αποδείξετε ότι:**

**α)** $f(x) > 0$ **και** $g(x) > 0$ **για κάθε** $x \in [0, +\infty)$

**β)** $f(x) = g(x)$ **για κάθε** $x \in [0, +\infty)$

**γ)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ **για κάθε** $x \in [0, +\infty)$

**Λύση**

**α)** Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[0, +\infty)$ και δε μηδενίζονται στο διάστημα αυτό, άρα διατηρούν σταθερό πρόσημο. Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = g(0) = 1 > 0$, άρα $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

**β)** Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[0, +\infty)$, άρα οι συναρτήσεις $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ και $\displaystyle\int_0^x g(t)dt$ ορίζονται και είναι παραγωγίσιμες στο $[0, +\infty)$. Η συνάρτηση $1 + \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, άρα και η συνάρτηση $\dfrac{1}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, αφού από υπόθεση είναι $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$, άρα και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{g(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

Ομοίως και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ έχουμε:

$$\left(1+\int_0^x f(t)dt\right)'=\left(\frac{1}{g(x)}\right)'\Leftrightarrow f(x)=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{g(x)}=-f(x)g(x)\quad(1)$$

$$\left(1+\int_0^x g(t)dt\right)'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'\Leftrightarrow g(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-f(x)g(x)\quad(2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}\Leftrightarrow(\ln f(x))'=(\ln g(x))'\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln g(x)+c\ ,\ x\in[0,+\infty)\quad(3).$$

Για $x=0$ από τις αρχικές σχέσεις έχουμε ότι $f(0)=g(0)=1$ και από τη σχέση (3) έχουμε ότι c=0.

Άρα $\ln f(x)=\ln g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\,,\ x\in[0,+\infty)$ (4).

**γ)** Είναι $1+\int_0^x f(t)dt=\dfrac{1}{g(x)}\overset{(4)}{\Leftrightarrow}1+\int_0^x f(t)dt=\dfrac{1}{f(x)}$, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε

$$f(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\Leftrightarrow f^{-3}(x)f'(x)=-1\Leftrightarrow\left(\frac{f^{-2}(x)}{-2}\right)'=(-x)'\Leftrightarrow\frac{f^{-2}(x)}{-2}=-x+c\Leftrightarrow f^{-2}(x)=2x-2c\quad(5)$$

Για $x=0$ έχουμε $1=-2c\Leftrightarrow c=-\dfrac{1}{2}$, οπότε

$$f^{-2}(x)=2x+1\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}\frac{1}{f^2(x)}=2x+1\Leftrightarrow f^2(x)=\frac{1}{2x+1}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\ ,\ x\ge 0.$$

## ΘΕΜΑ 29ο

**Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)=\int_0^x f(x+t)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο R, να αποδείξετε ότι:**

**α) $F'(x)=F(2x)-F(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**β) Για κάθε $\kappa<0$, υπάρχει $\xi_\kappa\in(2\kappa,\kappa)$ έτσι, ώστε $F'(\kappa)F'(\xi_\kappa)\le 0$.**

**γ) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει άπειρες λύσεις στο $(-\infty,0)$.**

**Λύση**

**α)** Θέτουμε $u = x + t$, άρα $du = dt$.

Για $t = 0$ είναι $u_1 = x$ και για $t = x$ είναι $u_2 = 2x$. Επομένως έχουμε

$$f(x) = \int_0^x f(x+t)dt = \int_x^{2x} f(u)du = \int_x^{2x} F'(u)du = \left[F(u)\right]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$$

Επειδή η F είναι μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$F'(x) = F(2x) - F(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

**β)** Για κάθε $\kappa < 0$ θεωρούμε το διάστημα $[2\kappa, \kappa]$

- Η F είναι συνεχής στο $[2\kappa, \kappa]$, ως παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$
- Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(2\kappa, \kappa)$ με $F'(x) = f(x)$.

Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_\kappa \in (2\kappa, \kappa)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi_\kappa) = \frac{F(\kappa) - F(2\kappa)}{\kappa - 2\kappa} = \frac{F(2\kappa) - F(\kappa)}{\kappa} \overset{(1)}{=} \frac{F'(\kappa)}{\kappa}$$

Όμως $\kappa < 0$, άρα $F'(\xi_\kappa)F'(\kappa) = \dfrac{F'(\kappa)}{\kappa}F'(\kappa) = \dfrac{1}{\kappa}\left(F'(\kappa)\right)^2 \le 0$

( Η ισότητα ισχύει όταν $F'(\kappa) = 0$, δηλαδή $F(\kappa) = F(2\kappa)$, οπότε $F'(\xi_\kappa) = 0$ ).

**γ)** Από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι για κάθε $\kappa < 0$ έχουμε $f(\xi_\kappa)f(\kappa) \le 0$ γιατί $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως:

- Η f είναι συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[\xi_\kappa, \kappa]$
- $f(\xi_\kappa)f(\kappa) \le 0$

Άρα i) αν $f(\xi_\kappa) \cdot f(\kappa) < 0$ τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (\xi_\kappa, \kappa)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$

ii) αν $f(\xi_\kappa) \cdot f(\kappa) = 0 \Leftrightarrow f(\xi_\kappa) = 0$ ή $f(\kappa) = 0$, δηλαδή $x_1 = \xi_\kappa$ ή $x_1 = \kappa$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\xi_\kappa, \kappa]$. Άρα υπάρχουν άπειρες ρίζες της $f(x) = 0$ στο $(-\infty, 0)$.

## Θέμα 30ο

**Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_2^x \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt$**

**Α. 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F και να αποδείξετε ότι η F είναι κοίλη.**

**2) Αν $1 < \alpha \le \beta$ να αποδείξετε ότι: $\int_2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{2}{\sqrt{t^2+1}} dt \ge \int_2^\alpha \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + \int_2^\beta \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$**

**Β. 1) Να αποδείξετε ότι: (i) $F\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) = \ln x + c$, για κάθε $x > 1$, όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά**

**(ii) $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c$, για κάθε $x > 1$.**

**2) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ και τις ευθείες $x=\sqrt{3}$ και $x=\sqrt{5}$.**

**Λύση**

Α. 1) Η συνάρτηση $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ και επειδή $2\in(1,+\infty)$ η F έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(1,+\infty)$.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ και $F''(x)=-\dfrac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}<0$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$

Άρα η F είναι κοίλη στο $(1,+\infty)$.

2) Για $\alpha=\beta$ η ανισοταυτότητα ισχύει ως ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$ από Θ.Μ.Τ. για την F σε καθένα από τα διαστήματα: $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

Επομένως θα υπάρχει: $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_1)=\dfrac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha)}{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$ (1) και

$\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_2)=\dfrac{F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$ (2)

Όμως η $F'\downarrow$ $(1,+\infty)$, οπότε για $\xi_1<\xi_2\Leftrightarrow F'(\xi_1)>F'(\xi_2)$ και από (1), (2) προκύπτει:

$$F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha)>F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow 2F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>F(\alpha)+F(\beta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{2}{\sqrt{t^2-1}}dt>\int_2^{\alpha}\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}+\int_2^{\beta}\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει $\displaystyle\int_2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{2}{\sqrt{t^2-1}}dt\ge\int_2^{\alpha}\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}+\int_2^{\beta}\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$

**Β. 1)** Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε: $\left[F\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)\right]'=F'\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2-1}}\cdot\dfrac{x^2-1}{2x^2}=$

$=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{2x}}\cdot\dfrac{x^2-1}{2x^2}=\dfrac{2x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-1}{2x^2}=\dfrac{1}{x}=(\ln x)'$. Έχουμε $\left[F\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)\right]'=(\ln x)'$, $x\in(1,+\infty)$

Άρα $F\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)=\ln x+c$ (3)

**2)** Θέτουμε $\dfrac{x^2+1}{2x}=y\Leftrightarrow x^2-2yx+1=0\overset{x>1}{\Leftrightarrow}x=y+\sqrt{y^2-1}$, $y>1$ (4)

Είναι $y>1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{2x}>1 \overset{(x>1)}{\Leftrightarrow} x^2+1>2x \Leftrightarrow (x-1)^2>0$ που ισχύει.

Η $(3) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} F(y)=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)+c,\ y>1$. Άρα $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+c,\quad x>1$.

3) Είναι $E=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt=\int_{2}^{\sqrt{5}} \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt-\int_{2}^{\sqrt{3}} \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt=F\left(\sqrt{5}\right)-F\left(\sqrt{3}\right)=$

$$=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\ln\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\ \text{τ.μ}$$

## ΘΕΜΑ 31ο

**Έστω συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f^3(x)+3f(x)=x^5+x+1$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**Να αποδείξετε ότι:**

**α) Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.**

**β) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $\rho\in(-1,0)$.**

**γ) Η $f$ αντιστρέφεται.**

**δ) Το σημείο $N(0,\rho)\in C_{f^{-1}}$.**

**ε) Η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.**

**Υπόδειξη**

Θεωρείται γνωστό ότι:

$$\text{αν } f \nearrow \text{ στο A, τότε } f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x,\ \ x\in B=A\cap f(A)$$

**Λύση**

**α)** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και η $f^3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης η συνάρτηση $x^5+x+1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x)+3f'(x)=5x^4+1\Leftrightarrow$$

$$3\left(f^2(x)+1\right)f'(x)=5x^4+1\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{5x^4+1}{3\left(f^2(x)+1\right)}>0\ ,\quad x\in\mathbb{R}$$

οπότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

**β)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)\left(f^2(x)+3\right)=x^5+x+1\Rightarrow f(x)=\frac{x^5+x+1}{f^2(x)+3}\quad (2)$$

Είναι $f(0)=\dfrac{1}{f^2(0)+3}>0$ και $f(-1)=\dfrac{-1}{f^2(-1)+3}<0$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η $f$ είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και $f(-1)f(0)<0$. Ισχύει λοιπόν το Θ. Bolzano, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα στο $(-1,0)$ και μάλιστα μοναδική, αφού η $f$ είναι γνησίως αύξουσα.

**γ)** Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και "1 - 1", άρα αντιστρέφεται.

**δ)** Αφού $\rho$ ρίζα της $f(x)=0$ ισχύει $f(\rho)=0 \Leftrightarrow M(\rho,0)\in C_f \Leftrightarrow N(0,\rho)\in C_{f^{-1}}$.

**ε)** Η $f$ είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα ισχύει η ισοδυναμία $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f^3(x)+3f(x)=x^5+x+1 \Leftrightarrow$$

$$f^3(x)-x^3+3f(x)-3x=x^5+x+1-x^3-3x \Leftrightarrow$$

$$\left[f(x)-x\right]\cdot\left[f^2(x)+xf(x)+x^2+3\right]=x^5-x^3-2x+1 \qquad (2)$$

Είναι γνωστό ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f^2(x)+xf(x)+x^2\geq 0 \Leftrightarrow f^2(x)+xf(x)+x^2+3\geq 3$.

Αρκεί λοιπόν η συνάρτηση $g(x)=x^5-x^3-2x+1$, $x\in\mathbb{R}$, να έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Παρατηρούμε ότι

- Η $g$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.
- $g(0)g(1)=1\cdot(-1)<0$.

Ισχύει λοιπόν το Θ. Bolzano, οπότε η $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

## Θέμα 32ο

**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\alpha}(x+\alpha)e^{\alpha-x}, x\in R$ και $\alpha>0$**

**α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.**

**β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.**

**γ) Να δείξετε ότι για κάθε α>0 οι γραφικές παραστάσεις των f και f΄ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.**

**δ) Η ευθεία x=1 ορίζει με τις γραφικές παραστάσεις των f και f΄ ένα ευθύγραμμο τμήμα. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε το τμήμα αυτό να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.**

**ε) Η γραφική παράσταση της f για α=1, ο άξονας x΄x και η ευθεία $x=\lambda$ με $\lambda>-1$ ορίζουν ένα χωρίο με εμβαδόν Ε(λ). Να βρείτε το Ε(λ) και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.**

**Λύση**

**α)**

- Η f είναι συνεχής στο R, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\quad\infty$, η f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\alpha}{e^{x-\alpha}}=\dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-\alpha}}=0$, οπότε η ευθεία y=0, δηλαδή ο άξονας x΄x, είναι οριζόντια ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της $f$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha-x}-\dfrac{1}{\alpha}(x+\alpha)e^{\alpha-x}=\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{x}{\alpha}-1\right)e^{\alpha-x}$ και $f''(x)=\left(\dfrac{x}{\alpha}+1-\dfrac{2}{\alpha}\right)e^{\alpha-x}$

$f'(x)=0\ x=1-\alpha,\quad f'(x)<1-\alpha$ και $f''(x)=0\ x=2-\alpha,\quad f''(x)>2-\alpha$

| x | $-\infty$ | 1-α | | 2-α | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f΄(x) | + | 0 | − | | − |
| f΄΄(x) | − | | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | | ↘ | | ↘ |

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο $\left(-n, 1-a\right]$, γνησίως φθίνουσα και κοίλη στο $[1-\alpha, 2-\alpha]$, γνησίως φθίνουσα και κυρτή στο $[2-\alpha, +\infty)$. Η f έχει μοναδικό μέγιστο για $x=1-\alpha$ το $f(1-\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}\cdot e^{2\alpha-1}$ και μοναδικό σημείο καμπής το $K\left(2-\alpha, \dfrac{2}{\alpha}e^{2\alpha-2}\right)$

**γ)** Έχουμε $f'(x)=f(x)\Leftrightarrow \dfrac{x}{\alpha}+1=\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{x}{\alpha}-1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}-\alpha$, που σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f΄ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

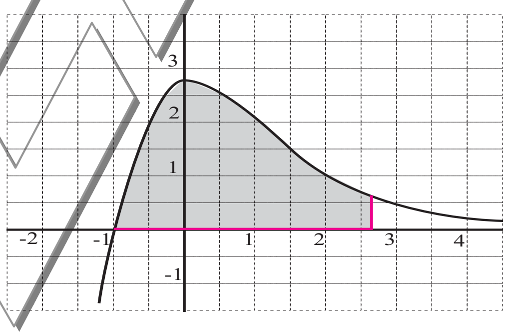
**δ)** Έστω d(α) το μήκος του τμήματος, τότε $d(\alpha)=\left|f(1)-f'(1)\right|=\left(\dfrac{1}{\alpha}+2\right)e^{\alpha-1}$ και

$d'(\alpha)=d'(\alpha)=\left(-\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}+2\right)e^{\alpha-1}$. Επομένως $d'(\alpha)=0\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{2}$ και $d'(\alpha)>0\Leftrightarrow \alpha>\dfrac{1}{2}$.

| x | $-\infty$ | ½ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f΄(x) | − | 0 | + |
| f(x) | ↓ | | ↑ |

Άρα για $\alpha=\dfrac{1}{2}$ το d έχει ελάχιστο μήκος.

**ε)** $E(\lambda)=\int_{-1}^{\lambda}f(x)dx=\int_{-1}^{\lambda}(x+1)e^{x-1}dx=\left[(x+1)\left(-e^{1-x}\right)\right]_{-1}^{\lambda}-\int_{-1}^{\lambda}\left(-e^{1-x}\right)dx=e^2-(\lambda+2)e^{1-\lambda}$




και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=e^2-\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda+2}{e^{\lambda-1}}=e^2$

# ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

## ΘΕΜΑ 1ο :

**Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z(t)=\dfrac{1}{2+it}$ , $t\in R$. Να αποδείξετε ότι:**

**α) $z(t)+\overline{z(t)}=4z(t)\cdot\overline{z(t)}$.**

**β) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K\left(\dfrac{1}{4}\,,0\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{4}$.**

**γ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ και $z\left(-\dfrac{4}{t}\right)$, $t\in R^*$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του προηγούμενου κύκλου.**

**δ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$, $z(-4)$ και $z(2010)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Είναι $z(t)+\overline{z(t)}=4z(t)\cdot\overline{z(t)}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2+it}+\overline{\left(\dfrac{1}{2+it}\right)}=4\cdot\dfrac{1}{2+it}\cdot\overline{\left(\dfrac{1}{2+it}\right)}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2+it}+\frac{1}{2-it}=4\cdot\frac{1}{2+it}\cdot\frac{1}{2-it}\Leftrightarrow 2-it+2+it=4\Leftrightarrow 4=4 \text{ αληθές.}$$

**β)** Είναι $\left|z(t)-\dfrac{1}{4}\right|=\left|\dfrac{1}{2+it}-\dfrac{1}{4}\right|=\left|\dfrac{4-(2+it)}{4(2+it)}\right|=\dfrac{|2-it|}{|4(2+it)|}=\dfrac{|2+it|}{4|(2+it)|}=\dfrac{1}{4}$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ είναι ο κύκλος $(C)$ με κέντρο το σημείο $K\left(\dfrac{1}{4}\,,0\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{4}$.

**γ)** Στο (β) ερώτημα αποδείξαμε ότι για κάθε $t\in R$ ο μιγαδικός αριθμός $z(t)=\dfrac{1}{2+it}$ ανήκει στον κύκλο $(C)$ με κέντρο το σημείο $K\left(\dfrac{1}{4}\,,0\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{4}$, άρα και για $-\dfrac{4}{t}\in R$ ο μιγαδικός αριθμός $z\left(-\dfrac{4}{t}\right)$ ανήκει στον ίδιο κύκλο.

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $\left|z(t)-z\left(-\frac{4}{t}\right)\right|=2\rho=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Είναι $\left|z(t)-z\left(-\frac{4}{t}\right)\right|=\left|\frac{1}{2+it}-\frac{1}{2+i\left(-\frac{4}{t}\right)}\right|=\left|\frac{1}{2+it}-\frac{t}{2t-4i}\right|=\left|\frac{1}{2+it}-\frac{t}{2(t-2i)}\right|=$

$$=\left|\frac{1}{2+it}-\frac{it}{2(2+it)}\right|=\left|\frac{2-it}{2(2+it)}\right|=\frac{|2-it|}{|2(2+it)|}=\frac{|2+it|}{2|(2+it)|}=\frac{1}{2}.$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ και $z\left(-\frac{4}{t}\right)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου $(C)$ για κάθε $t\in R^*$.

**δ)** Για $t=1$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$ και $z\left(-\frac{4}{1}\right)=z(-4)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου $(C)$, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

Είναι $z(1)\neq z(2010)\neq z(-4)$. Πράγματι

$\frac{1}{2+i}\neq\frac{1}{2+2010i}\neq\frac{1}{2-4i}\Leftrightarrow 2+i\neq 2+2010i\neq 2-4i\Leftrightarrow i\neq 2010i\neq -4i$ αληθές, οπότε οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$, $z(-4)$ και $z(2010)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών $z(1)$ και $z(-4)$.

## ΘΕΜΑ 2ο :

**Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\lambda(1+i)+1-i$, $\lambda\in R$.**

**α) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκει η εικόνα του $z$.**

**β) Για ποια τιμή του λ, το $|z|$ γίνεται ελάχιστο;**

**γ) Υποθέτουμε ότι $\lambda>0$. Αν $|z|=2\sqrt{2}$ και $w=\frac{z}{\sqrt{3}-i}$ τότε:**

**i) Να αποδείξετε ότι $\lambda=\sqrt{3}$.**

**ii) Να βρείτε τις τιμές του θετικού ακέραιου αριθμού ν, ώστε $w^{2\nu}\in R$.**

## ΛΥΣΗ

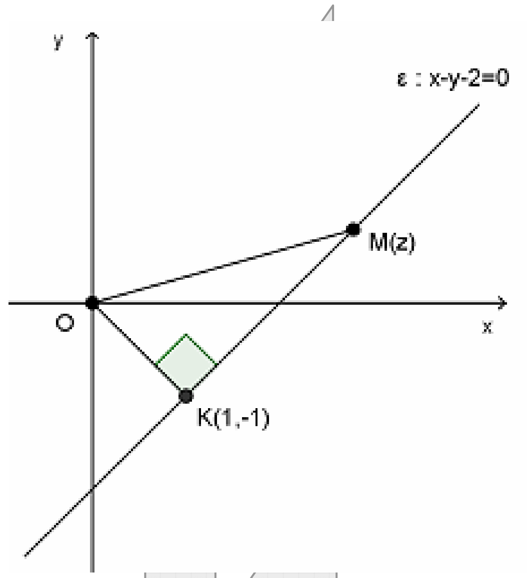
**α)** Θέτουμε $z=x+yi$, $x,y\in R$ και έχουμε:

$$z=\lambda+\lambda i+1-i\Leftrightarrow x+yi=(\lambda+1)+(\lambda-1)i\Leftrightarrow\begin{cases}x=\lambda+1\\ y=\lambda-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=x-1\\ \lambda=y+1\end{cases}\Rightarrow y+1=x-1\Leftrightarrow$$

$x-y-2=0$. Άρα η εικόνα του z κινείται στην ευθεία $\varepsilon: x-y-2=0$.

**β)** Η εικόνα $M(z)$ ανήκει στην ευθεία ε, επομένως το $|z| = (OM)$ γίνεται ελάχιστο, όταν το M συμπίπτει με το ίχνος K της κάθετης από το O στην ευθεία ε. Προσδιορίζουμε το K ως σημείο τομής της OK με την ευθεία ε. Είναι:

$$OK \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{OK} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = -1.$$




Άρα η εξίσωση της ευθείας OK είναι: $OK: y = -x$.

Λύνουμε το σύστημα : $\begin{cases} y = -x \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Άρα $K(1,-1)$, οπότε το $|z|$ γίνεται ελάχιστο, όταν $z = 1 - i$. Επομένως $\lambda = x - 1 = 1 - 1 = 0$.

**γ) i)** Έχουμε:

$$|z| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda+1)^2 + (\lambda-1)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(\lambda^2+1)} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \lambda^2 = 3 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda = \sqrt{3}.$$

**ii)** Για $\lambda = \sqrt{3}$ έχουμε:

$$w = \frac{\sqrt{3}(1+i) + (1-i)}{\sqrt{3} - i} = \frac{\sqrt{3}(1+i) - i(1+i)}{\sqrt{3} - i} = \frac{(\sqrt{3} - i)(1+i)}{\sqrt{3} - i} = 1 + i.$$

Επομένως $w^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ και $w^{2\nu} = (w^2)^{\nu} = 2^{\nu} \cdot i^{\nu}$.

Επειδή $w^{2\nu} \in R \Leftrightarrow i^{\nu} \in R \Leftrightarrow \begin{cases} \nu = 4\kappa & , \ \kappa \in N^* \\ \nu = 4\kappa + 2 & , \ \kappa \in N \end{cases}$. Άρα $\nu \in \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.

## ΘΕΜΑ 3ο :

**Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, u και w, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:**

$$|z| = \sqrt{2}, \quad \mathrm{Re}\left(\frac{u+3i}{u-3i}\right) = 0, \quad u \neq 3i \quad \text{και} \quad (w+2)^8 = 16(w+1)^8.$$

**α) Να βρείτε τα μέτρα των u και w.**

**β) Να αποδείξετε ότι $z + u + w \neq 0$.**

**γ) Να αποδείξετε ότι $|z + u + w| = \dfrac{1}{6}|2zu + 2uw + 9zw|$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Είναι:

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{u+3i}{u-3i}\right) = 0$, άρα ο αριθμός $\dfrac{u+3i}{u-3i}$ είναι φανταστικός, οπότε έχουμε:

$$\frac{u+3i}{u-3i} = -\overline{\left(\frac{u+3i}{u-3i}\right)} \Leftrightarrow \frac{u+3i}{u-3i} = -\frac{\overline{u+3i}}{\overline{u-3i}} \Leftrightarrow \frac{u+3i}{u-3i} = -\frac{\overline{u}-3i}{\overline{u}+3i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u+3i)(\bar{u}+3i)=-(u-3i)(\bar{u}-3i) \Leftrightarrow u\bar{u}+3iu+3i\bar{u}-9=-u\bar{u}+3iu+3i\bar{u}+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2u\bar{u}=18 \Leftrightarrow 2|u|^2=18 \Leftrightarrow |u|^2=9 \Leftrightarrow |u|=3.$$

Είναι:

$$(w+2)^8=16(w+1)^8 \Rightarrow \left|(w+2)^8\right|=\left|16(w+1)^8\right| \Leftrightarrow |w+2|^8=16|w+1|^8 \Leftrightarrow$$

$$|w+2|=\sqrt{2}|w+1| \Leftrightarrow |w+2|^2=2|w+1|^2 \Leftrightarrow (w+2)(\bar{w}+2)=2(w+1)(\bar{w}+1) \Leftrightarrow$$

$$w\bar{w}+2w+2\bar{w}+4=2w\bar{w}+2w+2\bar{w}+2 \Leftrightarrow w\bar{w}=2 \Leftrightarrow |w|^2=2 \Leftrightarrow |w|=\sqrt{2}.$$

**β)** Υποθέτουμε ότι:

$z+u+w=0 \Leftrightarrow z+w=-u \Rightarrow |u|=|z+w| \le |z|+|w| \Rightarrow 3 \le \sqrt{2}+\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \le 2\sqrt{2}$, που είναι άτοπο.

Άρα $z+u+w \neq 0$.

**γ)** Έχουμε:

$|z|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2=2 \Leftrightarrow z\bar{z}=2 \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{2}{z}$. Όμοίως είναι $\bar{u}=\dfrac{9}{u}$ και $\bar{w}=\dfrac{2}{w}$.

Είναι:

$$|z+u+w|=\left|\overline{z+u+w}\right|=|\bar{z}+\bar{u}+\bar{w}|=\left|\frac{2}{z}+\frac{9}{u}+\frac{2}{w}\right|=\left|\frac{2uw+9zw+2zu}{z\cdot u\cdot w}\right|=$$

$$=\frac{|2uw+9zw+2zu|}{|z|\cdot|u|\cdot|w|}=\frac{|2uw+9zw+2zu|}{\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{6}|2uw+9zw+2zu|.$$

## ΘΕΜΑ 4ο :

**Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z, w, u$. Αν ισχύουν οι σχέσεις:**

$$|z|=|w|=|u|=1 \quad (1), \qquad z+w+u\neq 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad z^2+w^2+u^2=0 \quad (3)$$

**να αποδείξετε ότι:**

**α)** $|z^2+w^2|=|w^2+u^2|=|u^2+z^2|$

**β)** $\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{w^2}+\dfrac{1}{u^2}=0$

**γ) Οι εικόνες των αριθμών $z, w, u$, $zwu$ και $\dfrac{zw+wu+uz}{z+w+u}$ είναι ομοκυκλικά σημεία.**

**δ)** $|z+w+u|=2$

## ΛΥΣΗ

**α)** Από τη σχέση (3) έχουμε:

- $z^2+w^2=-u^2 \Rightarrow |z^2+w^2|=|-u^2| \Rightarrow |z^2+w^2|=|u|^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} |z^2+w^2|=1.$
- $w^2+u^2=-z^2 \Rightarrow |w^2+u^2|=|-z^2| \Rightarrow |w^2+u^2|=|z|^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} |w^2+u^2|=1.$
- $u^2+z^2=-w^2 \Rightarrow |u^2+z^2|=|-w^2| \Rightarrow |u^2+z^2|=|w|^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} |u^2+z^2|=1.$

Επομένως $|z^2+w^2|=|w^2+u^2|=|u^2+z^2|.$

**β)** Είναι:

$$|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \overset{z\neq 0}{\Leftrightarrow} \bar{z}=\frac{1}{z}.$$

Ομοίως έχουμε $\bar{w}=\dfrac{1}{w}$ και $\bar{u}=\dfrac{1}{u}$.

Έχουμε:

$$z^2+w^2+u^2=0 \Rightarrow \overline{z^2+w^2+u^2}=\bar{0} \Rightarrow \overline{z^2}+\overline{w^2}+\overline{u^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\bar{z})^2+(\bar{w})^2+(\bar{u})^2=0 \Rightarrow \frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}+\frac{1}{u^2}=0.$$

**γ)** Είναι:

- $|z|=|w|=|u|=1.$
- $|zwu|=|z|\cdot|w|\cdot|u|=1\cdot 1\cdot 1=1.$
- $\left|\dfrac{zw+wu+uz}{z+w+u}\right|=\dfrac{|zw+wu+uz|}{|z+w+u|}=\dfrac{|zw+wu+uz|}{|\overline{z+w+u}|}=\dfrac{|zw+wu+uz|}{|\bar{z}+\bar{w}+\bar{u}|}=$

$$=\frac{|zw+wu+uz|}{\left|\frac{1}{z}+\frac{1}{w}+\frac{1}{u}\right|}=\frac{|zw+wu+uz|}{\left|\frac{wu+uz+zw}{zwu}\right|}=\frac{|zw+wu+uz|}{|zw+wu+uz|}\cdot|zwu|=1.$$

Άρα οι εικόνες των αριθμών $z$, $w$, $u$, $zwu$ και $\dfrac{zw+wu+uz}{z+w+u}$ ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο, οπότε είναι ομοκυκλικά σημεία.

**δ)** Είναι:

$$(z+w+u)^2=z^2+w^2+u^2+2zw+2wu+2uz \overset{(3)}{\Rightarrow} (z+w+u)^2=2zw+2wu+2uz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(z+w+u)^2|=|2(zw+wu+uz)| \Rightarrow |z+w+u|^2=2|zw+wu+uz| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z+w+u|=2\frac{|zw+wu+uz|}{|z+w+u|} \Rightarrow |z+w+u|=2\left|\frac{zw+wu+uz}{z+w+u}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z+w+u|=2\cdot 1 \Rightarrow |z+w+u|=2.$$

## ΘΕΜΑ 5ο :

**Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 2 + συν(\pi t) + (5 + ημ(\pi t))i$, $t \in [0, +\infty)$.**

**α) Να αποδείξετε ότι $|z - 2 - 5i| = 1$.**

**β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.**

**γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $t \in [0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $\delta : y = x$.**

**δ) Έστω $w \in C$ τέτοιος, ώστε $|w - 1| = |w - i|$. Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Είναι $|z - 2 - 5i| = |συν(\pi t) + iημ(\pi t)| = \sqrt{συν^2(\pi t) + ημ^2(\pi t)} = 1$.

**β)** Επειδή $|z - (2 + 5i)| = 1$, η εικόνα M(z) κινείται στον κύκλο C με κέντρο $K(2,5)$ και ακτίνα ρ=1.

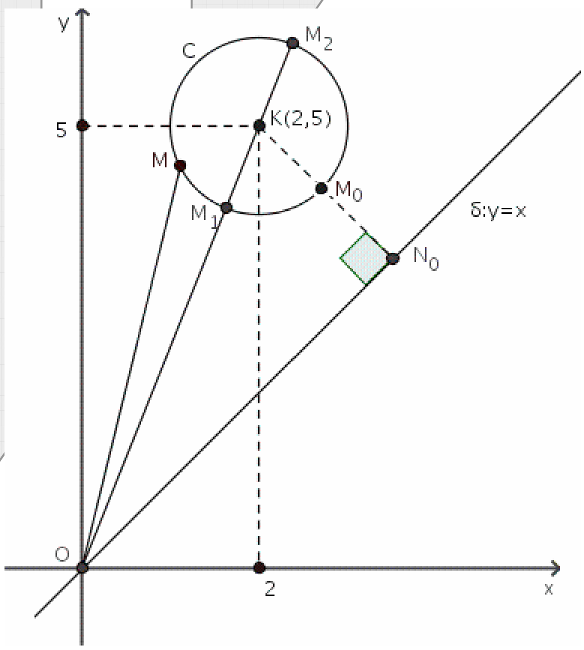
Καθώς η εικόνα M(z) κινείται στον κύκλο C, διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$(OM_1) \leq (OM) \leq (OM_2) \Leftrightarrow (OM_1) \leq |z| \leq (OM_2)$,

όπου $M_1$ , $M_2$ είναι τα σημεία τομής της ευθείας OK και του κύκλου C.

Επομένως:

- Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι:
  $\min|z| = (OK) - \rho = \sqrt{29} - 1$
- Η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι
  $\max|z| = (OK) + \rho = \sqrt{29} + 1$




**γ)** Βρίσκουμε την απόσταση $d(K,\delta) = \frac{|2-5|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} > 1 = \rho$, άρα ο κύκλος C και η ευθεία δ δεν έχουν κοινό σημείο, επομένως δεν υπάρχει εικόνα M(z) η οποία να ανήκει στην ευθεία δ.

**δ)** Επειδή $|w - 1| = |w - i|$, η εικόνα N(w) κινείται στην ευθεία $\delta : y = x$. Καθώς η εικόνα M(z) κινείται στον κύκλο C και η εικόνα N(w) κινείται στην ευθεία $\delta : y = x$, διαπιστώνουμε ότι η ελάχιστη τιμή του $|z - w| = (MN)$ είναι $\min|z - w| = (M_0N_0) = d(K,\delta) - \rho = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

Επομένως ισχύει: $|z - w| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

## ΘΕΜΑ 6ο :

**α) Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ=1, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w=\frac{1-2z}{z-2}$ , $z\neq 2$ .**

**β) Αν $z=x+yi$, $x,y\in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\left|z-w\right| = 2\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}}$ , $-1\leq x\leq 1$ .**

**γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς $z$ και $w$ ώστε, το $\left|z-w\right|$ να είναι μέγιστο και να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Είναι:

$$w=\frac{1-2z}{z-2}\Leftrightarrow w\left(z-2\right)=1-2z\Leftrightarrow wz-2w=1-2z\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow wz+2z=1+2w\Leftrightarrow \left(w+2\right)z=1+2w\Leftrightarrow z=\frac{1+2w}{w+2}.$$

Επειδή $\left|z\right|=1$ έχουμε:

$$\left|\frac{1+2w}{w+2}\right|=1\Leftrightarrow\left|1+2w\right|=\left|w+2\right|\Leftrightarrow\left|1+2w\right|^2=\left|w+2\right|^2\Leftrightarrow(1+2w)(1+2\overline{w})=(w+2)(\overline{w}+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+2\overline{w}+2w+4w\overline{w}=w\overline{w}+2w+2\overline{w}+4\Leftrightarrow 3\left|w\right|^2=3\Leftrightarrow\left|w\right|^2=1\Leftrightarrow\left|w\right|=1.$$

**β)** Είναι:

$$\left|z\right|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1\Leftrightarrow y^2=1-x^2.$$

Επειδή $y^2\geq 0$ έχουμε:

$$1-x^2\geq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1.$$

Είναι:

$$\left|z-w\right|=\left|z-\frac{1-2z}{z-2}\right|=\left|\frac{z^2-2z-1+2z}{z-2}\right|=\left|\frac{z^2-1}{z-2}\right|=\left|\frac{\left(x+yi\right)^2-1}{x+yi-2}\right|=\left|\frac{x^2-y^2+2xyi-1}{x-2+yi}\right|\overset{(1)}{=}$$

$$=\left|\frac{x^2+x^2-1+2xyi-1}{\left(x-2\right)+yi}\right|=\frac{2\left|x^2-1+xyi\right|}{\left|\left(x-2\right)+yi\right|}=\frac{2\sqrt{\left(x^2-1\right)^2+\left(xy\right)^2}}{\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}}=\frac{2\sqrt{x^4-2x^2+1+x^2y^2}}{\sqrt{x^2-4x+4+y^2}}\overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{2\sqrt{x^4-2x^2+1+x^2\left(1-x^2\right)}}{\sqrt{x^2-4x+4+1-x^2}}=\frac{2\sqrt{x^4-2x^2+1+x^2-x^4}}{\sqrt{5-4x}}=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{5-4x}}=2\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}}.$$

**γ)** Η μέγιστη τιμή του $\left|z-w\right|$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f\left(x\right)=2\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}}$ με $-1\leq x\leq 1$.

Έχουμε:

$$f'(x)=2\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}}}\left(\frac{1-x^2}{5-4x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}}}\frac{-2x(5-4x)-(1-x^2)(-4)}{(5-4x)^2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}}}\frac{2(2x^2-5x+2)}{(5-4x)^2}.$$

Αν $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{5\pm3}{4}$. Άρα $x=\frac{1}{2}$ δεκτή ή $x=2$ απορρίπτεται.

Για $x=\frac{1}{2}$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{5-4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{\frac{3}{4}}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα $\max|z-w|=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Επίσης για $x=\frac{1}{2}$ έχουμε $y^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα είναι $z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ και

$$w=\frac{1-2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-2}=\frac{i\sqrt{3}}{-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad w=\frac{1-2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-2}=\frac{-i\sqrt{3}}{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

## ΘΕΜΑ 7ο :

**Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=2$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x))+4f(x)=6-x^4$ (1).**

**α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$.**

**β) Να αποδείξετε ότι $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=0$.**

**γ) Αν $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+4f(x)-5}{x-1}=-4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to1}f(f(x))$.**

**δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x))+1=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για $x=0$ από την (1) έχουμε: $f(f(0))+4f(0)=6\Rightarrow f(2)+4\cdot2=6\Rightarrow f(2)=-2$.

Για $x=2$ από την (1) έχουμε: $f(f(2))+4f(2)=6-2^4\Rightarrow f(-2)+4\cdot(-2)=6-16\Rightarrow f(-2)=-2$.

**β)** Είναι $f(-2)=-2<0<2=f(0)$ και η f είναι συνεχής στο $[-2,0]$, επομένως από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(-2\ ,\ 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=0$.

Για $x=x_o$ από την (1) έχουμε:

$$f(f(x_o))+4f(x_o)=6-x_o^4\Rightarrow f(0)+4\cdot0=6-x_o^4\Rightarrow 2=6-x_o^4\Rightarrow x_o^4=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_o=\sqrt{2}\text{ ή } x_o=-\sqrt{2}\Rightarrow x_o=-\sqrt{2}, \text{ αφού } x_o\in(-2\ ,\ 0). \quad \text{Άρα } f(-\sqrt{2})=0.$$

Είναι $f(2)=-2<0<2=f(0)$ και η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, επομένως από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0\,,\,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

Για $x=x_1$ από την (1) έχουμε:

$$f(f(x_1))+4f(x_1)=6-x_1^4 \Rightarrow f(0)+4\cdot 0=6-x_1^4 \Rightarrow 2=6-x_1^4 \Rightarrow x_1^4=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\sqrt{2} \text{ ή } x_1=-\sqrt{2} \Rightarrow x_1=\sqrt{2}, \text{ αφού } x_1\in(0\,,\,2). \text{ Άρα } f\left(\sqrt{2}\right)=0.$$

**γ)** Για $x\neq 1$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x^4+4f(x)-5}{x-1}$, οπότε $f(x)=\dfrac{(x-1)g(x)-x^4+5}{4}$ (2)

Από υπόθεση είναι $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=-4$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)g(x)-x^4+5}{4}=1$, και

$\lim\limits_{x\to 1}f(f(x))\overset{u=f(x)}{=}\lim\limits_{u\to 1}f(u)=1.$

**δ)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(f(x))+1,\quad x\in R$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\sqrt{2},0\right]$ και $\left[0,\sqrt{2}\right]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, της $f(f(x))$ που είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών και της σταθερής συνάρτησης 1.

Είναι:

- $g\left(-\sqrt{2}\right)=f\left(f\left(-\sqrt{2}\right)\right)+1=f(0)+1=2+1=3.$
- $g(0)=f(f(0))+1=f(2)+1=-2+1=-1.$
- $g\left(\sqrt{2}\right)=f\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right)+1=f(0)+1=2+1=3.$

Επομένως $g\left(-\sqrt{2}\right)\cdot g(0)=-3<0$ και $g(0)\cdot g\left(\sqrt{2}\right)=-3<0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano σε δύο διαστήματα, άρα η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(f(x))+1=0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\sqrt{2}\,,\,0\right)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0\,,\,\sqrt{2}\right)$, δηλαδή δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $\left(-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right)$.

## ΘΕΜΑ 8ο :

**Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:R\to R$. Αν $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{f(x+1)}=1$, τότε:**

**α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.**

**β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$.**

**γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y=x-1$ σε ένα ακριβώς σημείο $(x_o\,,\,y_o)$ με $x_o\in(0\,,\,1)$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Είναι $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{f(x+1)}=1 \overset{u=x+1}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{f(u)}=1 \qquad (1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(u)=\dfrac{u}{f(u)}$, για u κοντά στο 0, οπότε $g(u)\cdot f(u)=u$ και από (1) έχουμε $\lim\limits_{u\to 0}g(u)=1 \quad (2)$.

Είναι $\lim\limits_{u\to 0}\left[g(u)\cdot f(u)\right]=\lim\limits_{u\to 0}u \Leftrightarrow \lim\limits_{u\to 0}g(u)\cdot\lim\limits_{u\to 0}f(u)=0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{u\to 0}f(u)=0$ και αφού η f είναι συνεχής ισχύει $f(0)=0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**β)** Για x κοντά στο 0 είναι:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x}=\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\overset{u=\eta\mu x}{=}\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{u}{f(u)}}\overset{(1)}{=}\frac{1}{1}=1.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1.$$

**γ)** Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=x-1$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_o\in(0\,,1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x+1,\ x\in R$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0\,,1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h(0)=f(0)-0+1\overset{(\alpha)}{=}1>0$ και $h(1)=f(1)-1+1=f(1)<0$, γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, οπότε $1>0\Leftrightarrow f(1)<f(0)=0$. Άρα $h(0)h(1)<0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, άρα η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x-1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_o\in(0\,,1)$.

Για $x_1, x_2\in(0\,,1)$ με $x_1<x_2$ ισχύουν:

$$f(x_1)>f(x_2) \qquad \text{και} \qquad -x_1+1>-x_2+1,$$

οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$f(x_1)-x_1+1>f(x_2)-x_2+1\Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2).$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\,,1)$, οπότε η ρίζα $x_o$ είναι μοναδική.

Δηλαδή η εξίσωση $f(x)=x-1$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_o\in(0\,,1)$.

## ΘΕΜΑ 9ο :

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ που ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) = x^6$ για κάθε $x \in R$.**

**α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.**

**β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.**

**γ) Αν $f(-2) > 0$ και $f(2) < 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = -x^3$.**

**δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}$.**

**ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και $f^{-1}$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο R μοναδική ρίζα την $x = 0$.

**β)** Η συνάρτηση f στο $(-\infty, 0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Η συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

**γ)** Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$ και από υπόθεση είναι $f(-2) > 0$, οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$. Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f^2(x) = x^6 \Leftrightarrow f(x) = -x^3, \text{ αφού } x < 0.$$

Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0] \quad (1).$$

Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και από υπόθεση είναι $f(2) < 0$, οπότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f^2(x) = x^6 \Leftrightarrow f(x) = -x^3, \text{ αφού } x > 0.$$

Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in R.$$

**δ)** Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$-x_1^3 = -x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1 – 1» στο R, οπότε αντιστρέφεται.

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση $f^{-1}$, λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x.

Έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=-x^3\Leftrightarrow(-x)^3=y\Leftrightarrow -x=\begin{cases}-\sqrt[3]{-y}\ , & y<0\\ \sqrt[3]{y}\ , & y\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\begin{cases}\sqrt[3]{-y}\ , & y<0\\ -\sqrt[3]{y}\ , & y\geq 0\end{cases}.$$

Επειδή ισχύει η ισοδυναμία $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ έχουμε $f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{-y}\ , & y<0\\ -\sqrt[3]{y}\ , & y\geq 0\end{cases}.$

Επομένως:

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \text{ με }\ f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{-x}\ , & x<0\\ -\sqrt[3]{x}\ , & x\geq 0\end{cases}.$$

**ε)** Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}y=f(x)\\ y=f^{-1}(x)\end{cases}\overset{f:1\text{-}1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=f(x)\\ f(y)=f\left(f^{-1}(x)\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ f(y)=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ x=f(y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x^3\\ x=-y^3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x^3\\ x+y=-x^3-y^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x^3\\ x^3+y^3+x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x^3\\ (x+y)\left(\underbrace{x^2-xy+y^2+1}_{\neq 0}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x^3\\ x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x^3\\ y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x=-x^3\\ y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-x=0\\ y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+1)(x-1)=0\\ y=-x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\ \text{ ή }\ x=0\ \text{ ή }\ x=-1\\ y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\ (x,y)=(-1,1)\ \text{ ή }\ (0,0)\ \text{ ή }\ (1,-1).$$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f$ και $f^{-1}$ είναι τα:

$$A(-1\,,1)\ ,\quad O(0\,,0)\quad\text{και}\quad B(1\,,-1).$$

## ΘΕΜΑ 10ο :

**Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $z\in\mathbb{C}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ έτσι, ώστε να ισχύουν:**

**(1)** $\quad f^2(x)+\eta\mu^2 x=2x\,f(x)$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **και**

**(2)** $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\ell\ ,$ **με** $\ell=\dfrac{|z-2|}{|2z-1|}.$

**α) Να αποδείξετε ότι:**

**i)** $\ |z-2|=|2z-1|$

**ii) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z$ ανήκουν στον κύκλο $C:\ x^2+y^2=1$ .**

**β) Να βρείτε το** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}$**.**

**γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.**

**δ) Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της συνάρτησης $f$.**

**ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(|z+3-4i|+5)x = x^3+10$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$.**

## ΛΥΣΗ

**α) i)** Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με $x^2 \neq 0$ έχουμε

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 2\frac{f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x \in R^* \quad (3).$$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \ell$, $\ell \in R$. Αν πάρουμε τα όρια και των δύο μελών στη σχέση (3) έχουμε:

$$\ell^2+1=2\ell \Leftrightarrow \ell^2-2\ell+1=0 \Leftrightarrow (\ell-1)^2=0 \Leftrightarrow \ell=1, \quad \text{δηλαδή } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1 \quad (4).$$

Επομένως έχουμε $\frac{|z-2|}{|2z-1|}=1 \Leftrightarrow |z-2|=|2z-1|$.

**ii)** Είναι $|z-2|^2=|2z-1|^2 \Leftrightarrow (z-2)(\bar{z}-2)=(2z-1)(2\bar{z}-1) \Leftrightarrow z\bar{z}-2z-2\bar{z}+4=4z\bar{z}-2z-2\bar{z}+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3z\bar{z}=3 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$. Αν θέσουμε $z = x+yi$, τότε $x^2+y^2=1$.

Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν στον κύκλο $C: x^2+y^2=1$.

**β)** Για x κοντά στο $x_o = 0$ έχουμε:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x^2-x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x^2-x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x-1}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \overset{u=\eta\mu x}{=} \lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} \overset{(4)}{=} 1 \quad (5)$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x^2-x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1} \overset{(5)}{=} 1\cdot 1\cdot(-1) = -1.$$

**γ)** Για κάθε $x \in R$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$f^2(x)-2x f(x)+x^2 = x^2-\eta\mu^2 x \Leftrightarrow (f(x)-x)^2 = x^2-\eta\mu^2 x \Leftrightarrow g^2(x) = x^2-\eta\mu^2 x \quad (6)$.

Είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow g^2(x)=0 \Leftrightarrow x^2-\eta\mu^2 x=0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = x^2 \Leftrightarrow |\eta\mu x|=|x| \Leftrightarrow x=0$.

Θυμίζουμε ότι, για κάθε $x \in R$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ και ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα για $x \neq 0$ έχουμε $|\eta\mu x|<|x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x < x^2 \Leftrightarrow x^2-\eta\mu^2 x > 0 \Leftrightarrow g^2(x)>0 \Leftrightarrow g(x)\neq 0$

Η συνάρτηση λοιπόν $g(x)=f(x)-x$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και δε μηδενίζεται στο $R^*$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

**δ)** Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ έχουμε:
  - Αν $g(x) < 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = -\sqrt{x^2 - ημ^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 - ημ^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 - ημ^2 x} \quad (I).$$

  - Αν $g(x) > 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = \sqrt{x^2 - ημ^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 - ημ^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 - ημ^2 x} \quad (II).$$

- Στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:
  - Αν $g(x) < 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = -\sqrt{x^2 - ημ^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 - ημ^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 - ημ^2 x} \quad (III).$$

  - Αν $g(x) > 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = \sqrt{x^2 - ημ^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 - ημ^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 - ημ^2 x} \quad (IV).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις:

- (I) και (III) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = x - \sqrt{x^2 - ημ^2 x}$ , $x \in R$.
- (I) και (IV) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - ημ^2 x} , & x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 - ημ^2 x} , & x \geq 0 \end{cases}$.
- (II) και (III) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - ημ^2 x} , & x < 0 \\ x - \sqrt{x^2 - ημ^2 x} , & x \geq 0 \end{cases}$.
- (II) και (IV) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = x + \sqrt{x^2 - ημ^2 x}$ , $x \in R$.

**ε)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - (|z+3-4i| + 5)x + 10$, $x \in [1, 2]$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και ισχύει:

$h(1) = 1 - (|z+3-4i| + 5) \cdot 1 + 10 = 6 - |z+3-4i|$

$h(2) = 8 - (|z+3-4i| + 5) \cdot 2 + 10 = 8 - 2 \cdot |z+3-4i| = 2 \cdot (4 - |z+3-4i|)$

Όμως $\left||z| - |3-4i|\right| \leq |z+3-4i| \leq |z| + |3-4i| \Leftrightarrow |1-5| \leq |z+3-4i| \leq 1+5 \Leftrightarrow 4 \leq |z+3-4i| \leq 6$.

Άρα $h(1) \geq 0$ και $h(2) \leq 0$, οπότε $h(1)h(2) \leq 0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $h(1)h(2) = 0$, τότε h(1)=0 ή h(2)=0**,** άρα ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.
- Αν $h(1)h(2) < 0$, τότε ισχύει το Θεώρημα Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_o \in (1, 2)$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_o \in [1, 2]$.

## ΘΕΜΑ 11ο :

**Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί $z$, $w$. Αν $\frac{z}{w}=1+i\sqrt{3}$ και η εικόνα Α του μιγαδικού αριθμού $z$, στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στο κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$, τότε:**

**Α) Να αποδείξετε ότι:**

**α) Η εικόνα Β του μιγαδικού $w$ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.**

**β) $|z-w|=\sqrt{3}$ και $|z+w|=\sqrt{7}$.**

**Β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $|(\xi^3-2)z+\xi w|+|\xi^2 z+w|=2e^{\xi}$.**

**Γ) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|(3i-4)x-xz|-2010}{\eta\mu x+x}=\kappa$, να αποδείξετε ότι $3\le\kappa\le 7$.**

## ΛΥΣΗ

**Α) α)** Η εικόνα Α του μιγαδικού αριθμού $z$ στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$, άρα ισχύει $|z|=2$. Είναι $\frac{z}{w}=1+i\sqrt{3}\Leftrightarrow w=\frac{z}{1+i\sqrt{3}}$.

Άρα $|w|=\left|\frac{z}{1+i\sqrt{3}}\right|\Leftrightarrow|w|=\frac{|z|}{|1+i\sqrt{3}|}\Leftrightarrow|w|=\frac{2}{\sqrt{1+3}}\Leftrightarrow|w|=\frac{2}{2}\Leftrightarrow|w|=1.$

Επομένως η εικόνα Β του μιγαδικού $w$ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

**β)** Είναι:

$$\frac{z}{w}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1}\Leftrightarrow\frac{z-w}{w}=\frac{1+i\sqrt{3}-1}{1}\Leftrightarrow\frac{z-w}{w}=i\sqrt{3}$$

Άρα $$\left|\frac{z-w}{w}\right|=|i\sqrt{3}|\Leftrightarrow\frac{|z-w|}{|w|}=\sqrt{0^2+(\sqrt{3})^2}\overset{|w|=1}{\Leftrightarrow}|z-w|=\sqrt{3}.$$

Είναι:

$$\frac{z}{w}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1}\Leftrightarrow\frac{z+w}{w}=\frac{1+i\sqrt{3}+1}{1}\Leftrightarrow\frac{z+w}{w}=2+i\sqrt{3}$$

Άρα $$\left|\frac{z+w}{w}\right|=|2+i\sqrt{3}|\Leftrightarrow\frac{|z+w|}{|w|}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}\overset{|w|=1}{\Leftrightarrow}|z+w|=\sqrt{7}.$$

**Β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=|(x^3-2)z+xw|+|x^2z+w|-2e^x$ στο διάστημα $[0,1]$.

- Η $h$ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξη συνεχών.
- $h(0)=|-2z|+|w|-2e^0=2|z|+|w|-2=3>0$

  $h(1)=|-z+w|+|z+w|-2e=|z-w|+|z+w|-2e=\sqrt{3}+\sqrt{7}-2e<0$

  Άρα $h(0)\cdot h(1)<0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi)=0$.

Είναι $h(\xi)=0\Leftrightarrow|(\xi^3-2)z+\xi w|+|\xi^2z+w|-2e^{\xi}=0\Leftrightarrow|(\xi^3-2)z+\xi w|+|\xi^2z+w|=2e^{\xi}$

**Γ)** Για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ έχουμε:

- $$\frac{\left|(3i-4)x - xz\right| - 2010}{\eta\mu x + x} = \frac{\left|(3i-4)-z\right|\cdot x - 2010}{\eta\mu x + x} = \frac{\left|(3i-4)-z\right| - \dfrac{2010}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}+1}$$

- $$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}\ , \text{ οπότε } \ -\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|(3i-4)x - xz\right| - 2010}{\eta\mu x + x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|(3i-4)-z\right| - \dfrac{2010}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}+1} = \left|(3i-4)-z\right|$, οπότε $\kappa = \left|(3i-4)-z\right|$.

Ισχύει $\big||3i-4|-|z|\big| \le \left|(3i-4)-z\right| \le |3i-4|+|z| \Leftrightarrow |5-2| \le \kappa \le 5+2 \Leftrightarrow 3 \le \kappa \le 7$.

## ΘΕΜΑ 12ο :

**Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $u = \dfrac{1}{f(\alpha)} + \beta i$ και $w = \dfrac{1}{f(\beta)} - \alpha i$.**

**α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(uw) = \dfrac{1}{f(\alpha)f(\beta)} + \alpha\beta$ και $\mathrm{Im}(uw) = \dfrac{\beta}{f(\beta)} - \dfrac{\alpha}{f(\alpha)}$.**

**β) Αν $\mathrm{Im}(uw) = 0$ και $0 \notin [\alpha\,,\beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha\,,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi}$.**

**γ) Αν $\mathrm{Re}(uw) = 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha\,,\beta$ είναι ετερόσημοι.**

**δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(2004)f(2010)\cdot x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Είναι $uw = \left(\dfrac{1}{f(\alpha)}+\beta i\right)\left(\dfrac{1}{f(\beta)}-\alpha i\right) = \left(\dfrac{1}{f(\alpha)f(\beta)}+\alpha\beta\right) + \left(\dfrac{\beta}{f(\beta)} - \dfrac{\alpha}{f(\alpha)}\right)i$,

άρα $\mathrm{Re}(uw) = \dfrac{1}{f(\alpha)f(\beta)} + \alpha\beta$ και $\mathrm{Im}(uw) = \dfrac{\beta}{f(\beta)} - \dfrac{\alpha}{f(\alpha)}$.

**β)** Είναι $\mathrm{Im}(uw) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{f(\beta)} = \dfrac{\alpha}{f(\alpha)} \Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{f(\beta)}{\beta}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha,\beta]$.

- Η συνάρτηση $h$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.
- $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, οπότε θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

**γ)** Είναι $\mathrm{Re}(uw)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(\alpha)f(\beta)}+\alpha\beta=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(\alpha)f(\beta)}=-\alpha\beta$ (1).

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η $f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, επομένως $f(\alpha)f(\beta)>0$ (2). Από (1) και (2) έχουμε $\alpha\beta<0$, άρα οι αριθμοί $\alpha,\beta$ είναι ετερόσημοι.

**δ)** Για κάθε $x\in(-\infty,0)$ έχουμε:

$$f(2004)f(2010)\cdot x^2\eta\mu\frac{1}{x}=f(2004)f(2010)\cdot x\cdot\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Έχουμε:

- Επειδή η $f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οι αριθμοί $f(2004)$ και $f(2010)$ είναι ομόσημοι, άρα $f(2004)\cdot f(2010)>0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\eta\mu t}{t}=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(2004)f(2010)\cdot x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(2004)f(2010)\cdot x\cdot\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=-\infty$.

# ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

## ΘΕΜΑ 13ο :

**Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,e)\to R$ με $f(1)=0$ η οποία για κάθε $x\in(0,e)$ ικανοποιεί τη σχέση $\ell n\big(f'(x)\big)=f(x)-\ell nx$.**

**Α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f$.**

**Β. Αν $f(x)=-\ell n\big(1-\ell nx\big),\ x\in(0,e)$.**

**α) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e)$.**

**β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f$.**

**γ) Να βρείτε την τιμή του $x$ για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f$ γίνεται ελάχιστος.**

**δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1-\ell nx=\dfrac{1}{e^{\alpha}}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$.**

## ΛΥΣΗ

**Α.** Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι:

$$\ell n\big(f'(x)\big)=f(x)-\ell nx \Leftrightarrow f'(x)=e^{f(x)-\ell nx} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{e^{f(x)}}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{-f(x)}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\Big(-e^{-f(x)}\Big)'=\big(\ell nx\big)'\Leftrightarrow -e^{-f(x)}=\ell nx+c.$$

Είναι $f(1)=0$, οπότε $-e^{o}=\ell n1+c\Leftrightarrow c=-1$.

Επομένως έχουμε:

$$-e^{-f(x)}=\ell nx-1\Leftrightarrow e^{-f(x)}=1-\ell nx\Leftrightarrow -f(x)=\ell n\big(1-\ell nx\big)\Leftrightarrow f(x)=-\ell n\big(1-\ell nx\big),\ \ x\in(0,e).$$

**Β. α)** Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι:

$$f'(x)=\big(-\ell n(1-\ell nx)\big)'=-\frac{1}{1-\ell nx}\big(1-\ell nx\big)'=\frac{1}{x\big(1-\ell nx\big)}.$$

Είναι $0<x<e\Rightarrow \ell nx<\ell ne\Rightarrow \ell nx<1\Rightarrow 1-\ell nx>0$. Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,e)$.

Επομένως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e)$.

**β)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0\,,e)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to e^-} f(x)\right)$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\ell n\left(1-\ell nx\right)\right)\overset{1-\ell nx=t}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\ell nt\right)=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\left(-\ell n\left(1-\ell nx\right)\right)\overset{1-\ell nx=t}{=}\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\ell nt\right)=+\infty.$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A)=R$.

**γ)** Για κάθε $x\in(0\,,e)$ είναι:

$$f''(x)=\left(\frac{1}{x\left(1-\ell nx\right)}\right)'=\frac{-\left[x\left(1-\ell nx\right)\right]'}{\left[x\left(1-\ell nx\right)\right]^2}=\frac{-\left(1-\ell nx\right)+1}{x^2\left(1-\ell nx\right)^2}=\frac{\ell nx}{x^2\left(1-\ell nx\right)^2}$$

Το πρόσημο της $f''$, η μονοτονία και τα ακρότατα της $f'$, φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

| x | 0 | | 1 | | e |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | \|\| | $-$ | 0 | $+$ | \|\| |
| $f'$ | \|\| | ↘ | 1 | ↗ | \|\| |
| | | | ελάχ. | | |

Έχουμε:

- Η $f'$ είναι συνεχής στο $\left(0\,,1\right]$ και $f''(x)<0$ στο $\left(0\ ,\ 1\right)$, άρα η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0\,,1\right]$.
- Η $f'$ είναι συνεχής στο $\left[1\ ,\ e\right)$ και $f''(x)>0$ στο $\left(1\ ,\ e\right)$, άρα η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1\ ,\ e\right)$.
- Η $f'$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=1$, με ελάχιστη τιμή $f'(1)=1$.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος, όταν $x=1$.

**δ)** Για κάθε $x\in(0\,,e)$ είναι:

$$1-\ell nx=\frac{1}{e^{\alpha}}\Leftrightarrow \ell n\left(1-\ell nx\right)=-\alpha\Leftrightarrow -\ell n\left(1-\ell nx\right)=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\ ,e)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $f\left((0,e)\right)=R$.

Άρα για κάθε $\alpha\in R$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση.

## ΘΕΜΑ 14ο :

**Θεωρούμε συνάρτηση $g: R \to R$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $R$ και το μιγαδικό αριθμό $z = e^x + g(x)\,i$.**

**Α. Αν ισχύει $|z|^2 = (\mathrm{Re}(z))^2(1+x^2)$, $g(1) = e$ και $g(-1) = -\frac{1}{e}$ να αποδείξετε ότι $g(x) = xe^x$.**

**Β. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f: R \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $R$, με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $g(x) = f'(x) - f(x)$ για κάθε $x \in R$.**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$, $x \in R$.**

**β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B\left(\frac{3e}{2}, 1\right)$.**

**γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.**

**δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = e^{-x} - 2$ έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.**

**ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της $C_f$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: ex - 2y + 3 = 0$.**

## ΛΥΣΗ

**Α.** Έχουμε:

$$|z|^2 = (\mathrm{Re}(z))^2(1+x^2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{e^{2x} + g^2(x)}\right)^2 = e^{2x}(1+x^2) \Leftrightarrow g^2(x) = e^{2x}x^2 \Leftrightarrow |g(x)| = |xe^x| \quad (1).$$

Είναι:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 0 \Leftrightarrow |xe^x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει στο $R$ μοναδική ρίζα την $x = 0$.

- Η συνάρτηση $g$ στο $(-\infty, 0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(-1) = -\frac{1}{e} < 0$, οπότε $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

  Επομένως στο διάστημα $(-\infty, 0)$ έχουμε:

  $$|g(x)| = |xe^x| \Leftrightarrow g(x) = xe^x, \text{ αφού } x < 0.$$

  Επειδή $g(0) = 0$ έχουμε τελικά:

  $$g(x) = xe^x \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0] \quad (1).$$

- Η συνάρτηση $g$ στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(1) = e > 0$, οπότε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επομένως στο διάστημα $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$|g(x)| = |xe^x| \Leftrightarrow g(x) = xe^x, \text{ αφού } x>0.$$

Επειδή $g(0)=0$ έχουμε τελικά:

$$g(x) = xe^x \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις (1) και (2) έχουμε $g(x) = xe^x$ για κάθε $x \in R$.

**Β. α)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) = f'(x) - f(x) \Leftrightarrow xe^x = f'(x) - f(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'. \text{ Άρα } \frac{f(x)}{e^x} = \frac{x^2}{2} + c,\ x \in R.$$

Είναι $f(0)=1$ άρα $c=1$, επομένως $f(x) = e^x\left(\frac{x^2}{2}+1\right)$, $x \in R$.

**β)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \left[e^x\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\right]' = e^x\left(\frac{x^2}{2}+1\right) + e^x x = e^x\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right) = \frac{1}{2}\left(x^2+2x+2\right)e^x > 0,$$

επομένως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι και «1 – 1» , οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$f(0)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=0 \qquad \text{και} \qquad f(1) = \frac{3}{2}e \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}e\right) = 1$$

Άρα η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1,0)$ και $B\left(\frac{3e}{2}, 1\right)$.

**γ)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Έχουμε:

- $$\lim_{x\to-\infty} e^x\left(\frac{x^2}{2}+1\right) \overset{0\cdot(+\infty)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{2}+1}{e^{-x}} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-e^{-x}} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$
- $$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{x^2}{2}+1\right) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2}+1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2} = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = (0, +\infty)$.

**δ)** Η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 = e^{-x} - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x\left(x^2+2\right) = 1 \Leftrightarrow e^x\left(\frac{x^2}{2}+1\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Επειδή το $\frac{1}{2} \in \left(0\ ,\ +\infty\right) = f(A)$ η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$, άρα και η ισοδύναμή της εξίσωση $x^2 = e^{-x} - 2$ έχει μία πραγματική ρίζα, η οποία είναι και μοναδική, γιατί η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

**ε)** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0\ ,1]$ με $f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+2x+2\right)e^x$, άρα ισχύει Θ.Μ.Τ. επομένως θα υπάρχει $x_o \in (0\ ,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{\frac{3e}{2}-e}{1-0} = \frac{e}{2}$.

Είναι $\varepsilon : y = \frac{e}{2}x + \frac{3}{2}$, άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{e}{2}$.

Παρατηρούμε ότι $f'(x_o) = \lambda_\varepsilon$, οπότε υπάρχει σημείο της $C_f$ με τετμημένη $x_o \in (0\ ,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : ex - 2y + 3 = 0$.

## ΘΕΜΑ 15ο :

**Α)** **Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι ″1-1″ και συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι γνησίως μονότονη στο Δ.**

**Β)** **Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R με $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Αν $f'(2) > 0$, $f^{(3)}(2) > 0$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει $f(x) + f(4-x) = 3$, τότε:**

**α) Να αποδείξετε ότι η $f''$ είναι γνησίως μονότονη.**

**β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.**

**γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=3$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο R.**

**δ) Αν η γραφική παράσταση $C_g$ της συνάρτησης $g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_g$ στο σημείο Μ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $45^o$.**

**ε) Για $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x+1) = f(x) + f(x+2)$ είναι αδύνατη.**

## ΛΥΣΗ

**Α)** Έστω $x_1, x_2, x_3 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 < x_3$, οπότε αφού η f είναι ″1-1″ οι τιμές $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ θα είναι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο.

Υποθέτουμε επίσης ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη, οπότε δεν θα ισχύει καμία από τις σχέσεις $f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)$ και $f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)$. Δηλαδή το $f(x_2)$ δεν θα βρίσκεται ανάμεσα στο $f(x_1)$ και στο $f(x_3)$.

Επομένως θα ισχύει μία από τις παρακάτω ανισότητες:

$f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$ (1) $\qquad f(x_2)<f(x_3)<f(x_1)$ (2)

$f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)$ (3) $\qquad f(x_3)<f(x_1)<f(x_2)$ (4)

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (1), τότε εφόσον το $f(x_3)$ βρίσκεται μεταξύ του $f(x_1)$ και του $f(x_2)$, θα υπάρχει σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=f(x_3)$. Επομένως για $x_1<\xi<x_2<x_3$, δηλαδή για $\xi<x_3$ έχουμε $f(\xi)=f(x_3)$ που είναι άτοπο, αφού η f είναι ″1-1″. Ομοίως θα καταλήξουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι ισχύει μία από τις ανισότητες (2), (3) και (4).

**B) α)** Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f''$ είναι ″1-1″.

Αν υποθέσουμε ότι η $f''$ δεν είναι ″1-1″, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2\in R$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια, ώστε $f''(x_1)=f''(x_2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1<x_2$, οπότε έχουμε:

- Η $f''$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1,x_2]$, αφού η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R.
- $f''(x_1)=f''(x_2)$.

Άρα η $f''$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi)=0$, που είναι άτοπο, αφού από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η συνάρτηση $f''$ είναι ″1-1″ στο R.

Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R, οπότε η $f''$ είναι συνεχής στο R. Επίσης η $f''$ είναι ″1-1″, οπότε σύμφωνα με το (Α) ερώτημα η $f''$ είναι γνησίως μονότονη.

**β)** Για κάθε $x\in R$ είναι $f(x)+f(4-x)=3$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$f'(x)-f'(4-x)=0 \quad \text{και} \quad f''(x)+f''(4-x)=0 \quad \text{για κάθε } x\in R$$

Για $x=2$ είναι $f''(2)+f''(4-2)=0\Leftrightarrow 2f''(2)=0\Leftrightarrow f''(2)=0$ (1).

Η $f''$ είναι γνησίως μονότονη στο R και επειδή από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει ή $f^{(3)}(x)>0$ ή $f^{(3)}(x)<0$. Όμως $f^{(3)}(2)>0$, άρα $f^{(3)}(x)>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε η $f''$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Για $x<2$ είναι $f''(x)<f''(2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f''(x)<0$, ενώ για $x>2$ είναι $f''(x)>f''(2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f''(x)>0$.

Το πρόσημο της $f''$ καθώς και η κυρτότητα της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\cap$ | $3/2$ | $\cup$ | |
| | | | Σ. Κ. | | |

Για $x=2$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(2)+f(4-2)=3 \Leftrightarrow 2f(2)=3 \Leftrightarrow f(2)=\frac{3}{2} \quad (2).$$

Έχουμε:

- Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,2]$ και $f''(x)<0$ στο $(-\infty,2)$, άρα η $f$ κοίλη στο $(-\infty,2]$.
- Η $f$ είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και $f''(x)>0$ στο $(2,+\infty)$, άρα η $f$ κυρτή στο $[2,+\infty)$.
- Η $f$ παρουσιάζει καμπή στο $x_o=2$ και το σημείο καμπής είναι το $A\left(2,\frac{3}{2}\right)$.

**γ)** Από τη σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $2f(x)=3$ έχει ρίζα τον αριθμό $x=2$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

Από το (β) ερώτημα έχουμε:

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'$ | | $\searrow$ | $f'(2)$ | $\nearrow$ | |
| | | | ελάχ. | | |

Η συνάρτηση $f'$ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_o=2$, άρα $f'(x)\geq f'(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Όμως από υπόθεση είναι $f'(2)>0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα $x=2$ είναι μοναδική.

**δ)** Αν $x_o$ η τετμημένη του σημείου Μ, στο οποίο η $C_g$ τέμνει τον άξονα $x'x$, τότε έχουμε:

$$g(x_o)=0 \Leftrightarrow \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}=0 \Leftrightarrow f(x_o)=0 \qquad (3).$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g'(x)=\dfrac{\left[f'(x)\right]^2-f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$.

Άρα $g'(x_o)=\dfrac{\left[f'(x_o)\right]^2-f(x_o)f''(x_o)}{\left[f'(x_o)\right]^2}\overset{(3)}{=}\dfrac{\left[f'(x_o)\right]^2}{\left[f'(x_o)\right]^2}=1$, οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης $C_g$, της συνάρτησης $g$ στο σημείο Μ, στο οποίο η $C_g$ τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι $\lambda_\varepsilon=g'(x_o)=1$, οπότε η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$ είναι $45^o$.

**ε)** Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $f(x+1)-f(x)=f(x+2)-f(x+1)$ (4).
Για $x\geq 2$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[x,x+1]$ και $[x+1\,,\,x+2]$, άρα θα υπάρχει:

- $\xi_1 \in (x\,,\,x+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=f'(\xi_1)$.
- $\xi_2 \in (x+1\,,\,x+2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x+2)-f(x+1)}{(x+2)-(x+1)} \Leftrightarrow f(x+2)-f(x+1)=f'(\xi_2)$

Η εξίσωση (4) ισοδύναμα γράφεται $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ (5). Η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$, άρα θα είναι και "1-1", οπότε από (5) έχουμε $\xi_1=\xi_2$ που είναι αδύνατο, γιατί τα $\xi_1$, $\xi_2$ ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

Άρα η εξίσωση $2f(x+1)=f(x)+f(x+2)$ είναι αδύνατη, για $x\geq 2$.

## ΘΕΜΑ 16ο :

**Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:**

$$f'(x)=\frac{2e^x+x^2}{e^x+x^2} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

**α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f, ως προς την κυρτότητα.**

**β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.**

**γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.**

**δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+2010)-f(x)\big)$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x)=\left(\frac{2e^x+x^2}{e^x+x^2}\right)'=\frac{(2e^x+x^2)'(e^x+x^2)-(2e^x+x^2)(e^x+x^2)'}{(e^x+x^2)^2}=$$

$$=\frac{(2e^x+2x)(e^x+x^2)-(2e^x+x^2)(e^x+2x)}{(e^x+x^2)^2}=$$

$$=\frac{2e^{2x}+2x^2e^x+2xe^x+2x^3-2e^{2x}-4xe^x-x^2e^x-2x^3}{(e^x+x^2)^2}=$$

$$=\frac{x^2e^x-2xe^x}{(e^x+x^2)^2}=\frac{(x^2-2x)e^x}{(e^x+x^2)^2}=\frac{x(x-2)e^x}{(e^x+x^2)^2}\,.$$

Το πρόσημο της $f''$ καθώς και η κυρτότητα της $f$ φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f''$ | $+$ | $0$ $-$ | $0$ $+$ | |
| $f$ | $\cup$ | $\cap$ | $\cup$ | |

Έχουμε:

- Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f''(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η $f$ κυρτή στο $(-\infty, 0]$.
- Η $f$ είναι συνεχής στο $[0\ ,\ 2]$ και $f''(x) < 0$ στο $(0\ ,\ 2)$, άρα η $f$ κοίλη στο $[0\ ,\ 2]$.
- Η $f$ είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και $f''(x) > 0$ στο $(2\ , +\infty)$, άρα η $f$ κυρτή στο $[2\ , +\infty)$.

**β)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} - 1 = \frac{2e^x + x^2 - e^x - x^2}{e^x + x^2} = \frac{e^x}{e^x + x^2} > 0.$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $R$.

**γ)** Για κάθε $x \in R$ είναι $f'(x) > 0$, επομένως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο R. Επίσης η $f$ είναι συνεχής, οπότε το σύνολο τιμών της $f$ είναι το $f(R) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Για κάθε $x \in (-\infty\ , 0)$ έχουμε:

$$g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) - x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < x + f(0) \qquad (2).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} (x + f(0)) = -\infty$, άρα $x + f(0) < 0$, επομένως και $f(x) < 0$ σε περιοχή του $-\infty$, οπότε από (2) έχουμε $f(x) < x + f(0) < 0 \Leftrightarrow 0 > \dfrac{1}{f(x)} > \dfrac{1}{x + f(0)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x + f(0)} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} 0 = 0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ και $f(x) < 0$ σε περιοχή του $-\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Για κάθε $x \in (0\ , +\infty)$ έχουμε:

$$g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - x > f(0) \Leftrightarrow f(x) > x + f(0) \qquad (1).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + f(0)) = +\infty$, άρα $x + f(0) > 0$, επομένως και $f(x) > 0$ σε περιοχή του $+\infty$, οπότε από (1) έχουμε $f(x) > x + f(0) > 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{x + f(0)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x + f(0)} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ και $f(x) > 0$ σε περιοχή του $+\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της $f$ είναι το $f(R) = (-\infty\ , +\infty)$.

**δ)** Η συνάρτηση $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left[x\ ,\ x+2010\right]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x\ ,\ x+2010\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+2010)-f(x)}{x+2010-x} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x+2010)-f(x)}{2010} \Leftrightarrow f(x+2010)-f(x)=2010f'(\xi).$$

Για $x>2$ η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή, οπότε η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως για $\quad 2<x<\xi<x+2010 \Rightarrow f'(x)<f'(\xi)<f'(x+2010) \overset{\cdot 2010}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow 2010f'(x)<2010f'(\xi)<2010f'(x+2010) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2010f'(x)<f(x+2010)-f(x)<2010f'(x+2010).$$

Για $x>2$ είναι:

- $$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+x^2}{e^x+x^2} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+2x}{e^x+2x} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+2}{e^x+2} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x}{e^x}=2.$$

  Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2010f'(x)\right)=2010\cdot 2=4020$.

- Αν θέσουμε $x+2010=u$, τότε όταν το $x\to+\infty$ και το $u\to+\infty$, άρα έχουμε:

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(2010f'(x+2010)\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(2010f'(u)\right)=2010\cdot 2=4020.$$

Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+2010)-f(x)\right)=4020$.

## ΘΕΜΑ 17ο :

**Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f(1)=0$. Αν η συνάρτηση $f\circ f'$ ορίζεται στο $(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\left(f\circ f'\right)(x)=-f(x)$ (1), να αποδείξετε ότι:**

**α)** **Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f'$ είναι το $A_{f'}=(0,+\infty)$.**

**β)** **Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.**

**γ)** **$f'(1)=1$.**

**δ)** **$\left(f'\circ f'\right)(x)=x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.**

**ε)** **$xf''(x)+f'(x)=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.**

**στ)** **$f(x)=\ell n x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Κατ' αρχάς είναι $A_{f'}\subseteq A_f=(0,+\infty)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- ή $A_{f'}=(0,+\infty)$
- ή θα υπάρχει $x_o\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $x_o\notin A_{f'}$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $x_o \notin A_{f'}$ τότε και με δεδομένο ότι $A_{f o f'} = \left\{ x \in A_{f'} \,/\, f'(x) \in A_f \right\}$ συμπεραίνουμε ότι το $x_o \notin A_{f o f'}$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί $x_o \in (0,+\infty)$ και $A_{f o f'} = (0,+\infty)$ από υπόθεση. Άρα $A_{f'} = (0,+\infty)$.

**β)** Από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f'$:

$$A_{f o f'} = \left\{ x \in A_{f'} \,/\, f'(x) \in A_f \right\} = \left\{ x \in A_{f'} \,/\, f'(x) \in (0,+\infty) \right\}$$

προκύπτει ότι $f'(x) \in (0,+\infty)$ για κάθε $x \in A_{f'}$ δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

**γ)** Για $x = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\left(f \circ f'\right)(1) = -f(1) \overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} \left(f \circ f'\right)(1) = 0 \overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f\left(f'(1)\right) = f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f'(1) = 1.$$

**δ)** Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ μπορούμε να θέσουμε στη σχέση (1) όπου $x$ το $f'(x)$, οπότε για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$$\left(f \circ f'\right)(f'(x)) = -f(f'(x)) \Leftrightarrow f\left(f'(f'(x))\right) = -\left(f \circ f'\right)(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f\left(f'(f'(x))\right) = -\left(-f(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(f'(f'(x))\right) = f(x) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f'(f'(x)) = x \Leftrightarrow \left(f' o f'\right)(x) = x \qquad (2).$$

**ε)** Επειδή η $f$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, παραγωγίζοντας τα μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$\left(f(f'(x))\right)' = \left(-f(x)\right)' \Leftrightarrow f'(f'(x)) \cdot f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow \left(f' o f'\right)(x) \cdot f''(x) = -f'(x) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow x f''(x) + f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

**στ)** Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$$x f''(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x f'(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow x f'(x) = c_1,\ c_1 \in R.$$

Για $x = 1$ είναι $f'(1) = c_1 \overset{(\gamma)}{\Leftrightarrow} c_1 = 1$, άρα $x f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ell n x + c_2,\ x \in (0,+\infty)$.

Όμως $f(1) = 0$, άρα $c_2 = 0$, οπότε $f(x) = \ell n x$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

## ΘΕΜΑ 18ο :

**Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση**

$$f^2(x)+2xf(x)=1, \text{ για κάθε } x\in R.$$

**Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.**

**Β. Αν $f(0)=1$, τότε:**

**α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$, $x\in R$.**

**β. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.**

**γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu f(x)\right)$.**

**δ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}$.**

**ε. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$.**

## ΛΥΣΗ

**Α.** Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$f^2(x)+2xf(x)=1 \Leftrightarrow f^2(x)+2xf(x)+x^2=1+x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)+x\right)^2=1+x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g^2(x)=1+x^2 \quad (1), \text{ όπου } g(x)=f(x)+x,\ x\in R.$$

Για κάθε $x\in R$ είναι $1+x^2>0 \Leftrightarrow g^2(x)>0 \Leftrightarrow g(x)\neq 0$ και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο R, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

**Β. α)** Για $x=0$ έχουμε $g(0)=f(0)+0=1>0$, οπότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Αφού $g(x)>0$ για κάθε $x\in R$, από (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x)=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{1+x^2}-x,\ x\in R.$$

**β)** Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\geq x-x=0$$

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ (2).

**γ)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$\left|\eta\mu f(x)\right|\leq\left|f(x)\right|\overset{(2)}{=}f(x), \text{ άρα } -f(x)\leq\eta\mu f(x)\leq f(x).$$

Είναι $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x=\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$,

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+1}\right)=0\cdot\dfrac{1}{2}=0$.

Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-f(x)\right)=0$.

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu f(x)\right)=0$.

**δ)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)' = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \overset{(2)}{<} 0.$$

Επομένως η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R, άρα είναι «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται. Για να ορίσουμε τη συνάρτηση $f^{-1}$, λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς $x$. Έχουμε:

$$y = \sqrt{1+x^2} - x \Leftrightarrow y + x = \sqrt{1+x^2} \overset{y+x\geq 0}{\Leftrightarrow} \left(y+x\right)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2xy + \cancel{x^2} = 1 + \cancel{x^2} \Leftrightarrow 2xy = 1 - y^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x = \frac{1-y^2}{2y} \quad (3).$$

Είναι $y + x \geq 0 \Leftrightarrow y + \dfrac{1-y^2}{2y} \geq 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2y^2 + 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 0$, που είναι αληθές.

Η $(3) \Leftrightarrow f^{-1}\left(y\right) = \dfrac{1-y^2}{2y}$ , $y > 0$.

Επομένως $f^{-1} : \left(0 , +\infty\right) \to R$ με $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x^2}{2x}$.

**ε.** Από το (δ) ερώτημα έχουμε $f'(x) = \dfrac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, άρα

$$\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_1^0 -\frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\int_1^0 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left[\ln\left(f(x)\right)\right]_0^1 = \ln\left(\sqrt{2}-1\right).$$

## ΘΕΜΑ 19ο :

**Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \left[\alpha, \beta\right] \to R$ με $0<\alpha<\beta$ τέτοια, ώστε για τους μιγαδικούς $z_1 = \alpha + i f(\alpha)$ και $z_2 = \beta + i f(\beta)$ να ισχύει $w = \dfrac{z_1}{z_2} \in R$ .**

**α) Να αποδείξετε ότι $\left|z_1 + iz_2\right| = \left|z_1 - iz_2\right|$**

**β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\alpha , \beta\right]$.**

**γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.**

**δ) Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha} \displaystyle\int_\alpha^x \frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt = 1$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha , \beta)$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Ισχύει $z_1 = wz_2$, με $w \in R$. Άρα

$$|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2| \Leftrightarrow |wz_2 + iz_2| = |wz_2 - iz_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_2| \cdot |w + i| = |z_2| \cdot |w - i| \overset{z_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} |w + i| = |w - i| \overset{w \in R}{\Leftrightarrow} \sqrt{w^2 + 1} = \sqrt{w^2 + 1}$$, αληθής.

**β)** Έχουμε $w = \dfrac{\alpha + if(\alpha)}{\beta + if(\beta)} = \dfrac{(\alpha + if(\alpha))(\beta - if(\beta))}{(\beta + if(\beta))(\beta - if(\beta))} = \dfrac{\alpha\beta + f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)} + \dfrac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)} i$

Είναι $w \in R \Leftrightarrow \dfrac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)} = 0 \Leftrightarrow \beta f(\alpha) - \alpha f(\beta) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{f(\beta)}{\beta}$ (1).

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$, με $0 < \alpha < \beta$.

- Η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με $g'(x) = \dfrac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$.
- Είναι $g(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{f(\beta)}{\beta} = g(\beta)$.

Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

**γ)** Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_o) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_o f'(x_o) - f(x_o)}{x_o^2} = 0 \Leftrightarrow x_o f'(x_o) - f(x_o) = 0 \quad (2).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο της $(x_o, f(x_o))$ είναι:

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \Leftrightarrow y = f'(x_o)x + f(x_o) - x_o f'(x_o) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} y = f'(x_o)x$$

Άρα υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**δ)** Είναι $\displaystyle\int_\alpha^x \frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)} dt = \frac{1}{x-\alpha}\int_\alpha^x \frac{f(x+\alpha-t)}{x+\alpha-t} dt$. Θέτουμε $x+\alpha-t = u$, οπότε $-dt = du$.

Για $t = \alpha$ το $u = x$ και για $t = x$ το $u = \alpha$, οπότε

$$\int_\alpha^x \frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)} dt = \frac{1}{x-\alpha}\int_\alpha^x \frac{f(x+\alpha-t)}{x+\alpha-t} dt = \frac{1}{x-\alpha}\int_x^\alpha -\frac{f(u)}{u} du = \frac{1}{x-\alpha}\int_\alpha^x \frac{f(u)}{u} du.$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to\alpha}\int_\alpha^x \frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{x-\alpha}\int_\alpha^x \frac{f(u)}{u}du=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\int_\alpha^x \frac{f(u)}{u}du}{x-\alpha}=1 \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{\Leftrightarrow}}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{f(x)}{x}}{1}=1 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha}=1 \qquad (3).$$

Από (1) και (3) έχουμε $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)=\alpha \\ f(\beta)=\beta \end{cases}$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$, $x\in[\alpha,\beta]$, με $0<\alpha<\beta$.

- Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(x) - 1$.
- Είναι $\begin{cases} h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=0 \\ h(\beta)=f(\beta)-\beta=0 \end{cases} \Rightarrow h(\alpha)=h(\beta)$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-1=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=1$.

## ΘΕΜΑ 20ο :

**Έστω συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση**

$$f(x)=\int_1^x \frac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}dt \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

**α) Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.**

**β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.**

**γ) Αν $0<\alpha<\beta<\gamma$ να αποδείξετε ότι $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.**

**δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης g, για την οποία ισχύει $g^2(x)=f\left(\frac{e^x}{x}\right)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $g(1)=1$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση $\frac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, το $1\in(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση

$f(x)=\int_1^x \frac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)}$.

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)} \Leftrightarrow x e^{f(x)} f'(x) + x f'(x) = x + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)} + f(x)\right)' = \left(x + \ln x\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x + c.$$

Για $x = 1$ έχουμε $e^{f(1)} + f(1) = 1 + \ln 1 + c \Leftrightarrow e^0 + 0 = 1 + 0 + c \Leftrightarrow c = 0.$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$.

**β)** Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = e^{\ln x} + \ln x \quad (1).$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x) = e^x + x, \quad x \in R$.

Για κάθε $x \in R$ είναι $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$, οπότε η συνάρτηση $\varphi$ είναι γνησίως αύξουσα στο $R$, άρα είναι και «$1-1$».

Από (1) ισοδύναμα έχουμε $\varphi(f(x)) = \varphi(\ln x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

**γ)** Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ και } f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

άρα η συνάρτηση $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ και
- $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

Είναι $0 < \alpha < \xi_1 < \beta < \xi_2 < \gamma$ και η συνάρτηση $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε $f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \dfrac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

**δ)** Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$g^2(x) = f\left(\frac{e^x}{x}\right) \Leftrightarrow g^2(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x}\right) \Leftrightarrow g^2(x) = \ln e^x - \ln x \Leftrightarrow g^2(x) = x - \ln x \quad (2).$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o > 0$ τέτοιο, ώστε $g(x_o) = 0$, τότε $x_o - \ln x_o = 0 \Leftrightarrow \ln x_o = x_o$ που είναι άτοπο, γιατί $\ln x \le x - 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. (Εφαρμογή 2 σχολ. Βιβλίου σελ. 266).

Άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Η συνάρτηση $g$ λοιπόν είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και δε μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Επομένως από (2) προκύπτει ότι $g(x)=\sqrt{x-\ln x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$g'(x)=\left(\sqrt{x-\ln x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x-\ln x}}\left(x-\ln x\right)'=\frac{x-1}{2x\sqrt{x-\ln x}}.$$

Είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ και $g'(x)>0\Leftrightarrow x>1$, άρα ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης $g$ είναι:

| x | 0 | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|
| g′ | − | 0 | + |
| g | ↘ | 1<br>ελάχ. | ↗ |

Η $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=1$ με ελάχιστη τιμή $g(1)=1$.

Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x-\ln x}=+\infty,\ \text{γιατί}\ \lim_{x\to0^+}(x-\ln x)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{\ln x}{x}}\right)=+\infty,\quad \text{γιατί}\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \text{οπότε}\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{\ln x}{x}}=1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της $g$ είναι το $g(A)=[1,+\infty)$.

## ΘΕΜΑ 21ο :

**Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)\geq xe^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.**

**β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f^2(x)}{xημx}=1$.**

**γ) Αν $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx=1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f$ στο διάστημα $[0,1]$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - xe^{2x}$ , $x \in R$ .

Για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow f(x) - xe^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $g$ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_o = 0$ του πεδίου ορισμού της τοπικό ακρότατο.

Επίσης η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων με $g'(x) = \left(f(x) - xe^{2x}\right)' = f'(x) - e^{2x} - 2xe^{2x}$, άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_o = 0$ με $g'(0) = f'(0) - 1$ .

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Fermat, οπότε $g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

**β)** Είναι $f'(0) = 1$, οπότε για $x \neq 0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$

Έχουμε $$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{x\,\eta\mu x} = \lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{x^2\,\dfrac{\eta\mu x}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}\right] = 1^2 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

**γ)** Για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow f(x)e^{-x} \geq xe^{x} \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - xe^{x} \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0$, όπου $h(x) = f(x)e^{-x} - xe^{x}$, $x \in R$ .

Είναι $$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x(e^x)'\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 x'e^x\,dx = e - \int_0^1 e^x\,dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1,$$

οπότε $$\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \left(f(x)e^{-x} - xe^{x}\right)dx = \int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx - \int_0^1 xe^{x}\,dx = 1 - 1 = 0.$$

Έχουμε λοιπόν $h(x) = f(x)e^{-x} - xe^{x} \geq 0$ για κάθε $x \in R$ και $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx = 0$ (1).

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $h(x_o) \neq 0$, τότε $h(x_o) > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ αλλά η συνεχής συνάρτηση $h$ δεν είναι παντού μηδέν, οπότε $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx > 0$, που είναι άτοπο λόγω της (1).

Επομένως για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - xe^{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = xe^{2x}$.

## ΘΕΜΑ 22ο :

**Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1)=\frac{1}{e-1}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $x f'(x) - f(x) = \frac{-x^2 e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.**

**α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x}{(e^x-1)^2}dx$.**

**β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.**

**γ) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$ και $f'(0) = -\frac{1}{2}$.**

**δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Θέτουμε $u = e^x - 1$, οπότε $du = e^x dx$. Άρα:

$$\int \frac{e^x}{(e^x-1)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}du = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{e^x-1} + c,$$ όπου $x \in (-\infty, 0)$ ή $x \in (0, +\infty)$.

**β)** Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$x f'(x) - f(x) = \frac{-x^2 e^x}{\left(e^x-1\right)^2} \Leftrightarrow \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = -\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\int \frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\left(-\frac{1}{e^x-1} + c_1\right) \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{e^x-1} - c_1 x.$$

Για $x=1$ έχουμε $f(1) = \frac{1}{e-1} - c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{e-1} = \frac{1}{e-1} - c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$. Άρα $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

**γ)** Η $f$ είναι συνεχής στο $x_o = 0$, οπότε $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^x-1} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^x} = 1$, άρα $f(0) = 1$.

Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$, οπότε ισχύει:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{e^x-1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - e^x + 1}{x\left(e^x-1\right)} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{-e^x}{2e^x + xe^x} = -\frac{1}{2},$$

άρα $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

**δ)** Για κάθε $x\in(-\infty,0)$ ομοίως έχουμε:

$$xf'(x)-f(x)=\frac{-x^2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=-\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=-\int\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}dx\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=-\left(-\frac{1}{e^x-1}+c_2\right)\Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{e^x-1}-c_2x.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ ισχύει:

$$f'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x}{e^x-1}-c_2x-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x-c_2x\left(e^x-1\right)-e^x+1}{x\left(e^x-1\right)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{1-c_2\left(e^x-1\right)-c_2xe^x-e^x}{e^x-1+xe^x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H.}{=}}\lim_{x\to0^-}\frac{-2c_2e^x-c_2xe^x-e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{-2c_2-1}{2}$$

Είναι $f'(0)=-\frac{1}{2}$, άρα έχουμε $\frac{-2c_2-1}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow c_2=0$. Άρα $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

Επομένως $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x-1}&,\ x\neq0\\ 1&,\ x=0\end{cases}$.

## ΘΕΜΑ 23ο :

**Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=\int_0^x\frac{2}{1+3f^2(t)}dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x)+f(x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.**

**γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\frac{2}{1+3f^2(t)}dt$.**

**δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o)=2x_o$.**

**ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^x f(t)dt\le x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**στ) Αν $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ να βρείτε τα όρια:**

**i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και ii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f^3(x)}{x}$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση $\dfrac{2}{1+3f^2(t)}$ είναι συνεχής στο R, οπότε η συνάρτηση $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{2}{1+3f^2(t)}dt$ ορίζεται στο R και είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{2}{1+3f^2(x)}$ (1).

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=\frac{2}{1+3f^2(x)} \Leftrightarrow f'(x)+3f^2(x)f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[f(x)+f^3(x)\right]'=(2x)' \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)=2x+c.$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=\displaystyle\int_0^0 \frac{2}{1+3f^2(t)}dt=0$. Άρα $f^3(0)+f(0)=0+c \Leftrightarrow c=0$.

Επομένως $f^3(x)+f(x)=2x$, $x\in R$ (2).

**β)** Από τη σχέση (1) έχουμε $f'(x)=\dfrac{2}{3f^2(x)+1}>0$, επομένως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

**γ)** Είναι $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)}dt=f(1)$.

Από τη σχέση (2) για $x=1$ έχουμε $f^3(1)+f(1)=2 \Leftrightarrow f^3(1)+f(1)-2=0$ (3).

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

| **1** | **0** | **1** | **–2** | **1** |
|---|---|---|---|---|
| /// | 1 | 1 | 2 | |
| **1** | **1** | **2** | **0** | |

η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται

$$\left(f(1)-1\right)\underbrace{\left(f^2(1)+f(1)+2\right)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow f(1)=1.$$

Άρα $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)}dt=1$.

**δ)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, $x\in R$.

- Η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο $[0,1]$ με $g'(x)=f'(x)-2x$.
- Είναι $g(0)=g(1)$, αφού $g(0)=0$ και $g(1)=0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_o)=0 \Leftrightarrow f'(x_o)-2x_o=0 \Leftrightarrow f'(x_o)=2x_o$.

**ε)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt - x^2$ , $x\in R$ .

Για κάθε $x\in R$ είναι $\varphi'(x)=\left(\int_0^x f(t)dt - x^2\right)' = f(x)-2x \overset{(2)}{=} -f^3(x)$.

Από τη σχέση (2) έχουμε $f(x)\left(f^2(x)+1\right)=2x \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2x}{f^2(x)+1}$, άρα $\varphi'(x)=-\dfrac{8x^3}{\left(f^2(x)+1\right)^3}$, $x\in R$.

Είναι:

$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow -8x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ και $\varphi'(x)>0 \Leftrightarrow -8x^3>0 \Leftrightarrow x^3<0 \Leftrightarrow x<0$.

Το πρόσημο της $\varphi'$, η μονοτονία και τα ακρότατα της $\varphi$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi$ | | $\nearrow$ | **0** | $\searrow$ | |
| | | | μέγ. | | |

Η $\varphi$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o=0$, οπότε για κάθε $x\in R$ ισχύει $\varphi(x)\le\varphi(0)$. Άρα είναι

$\int_0^x f(t)dt - x^2 \le 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt \le x^2$ , $x\in R$.

**στ) i)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f^3(x)+f(x)=2x \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=2x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{2}{1+f^2(x)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+f^2(x)\right)=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{1+f^2(x)}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

**ii)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f^3(x)+f(x)=2x \Leftrightarrow f^3(x)=2x-f(x) \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{x}=2-\frac{f(x)}{x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{f(x)}{x}\right)=2-0=2$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^3(x)}{x}=2$.

## ΘΕΜΑ 24ο :

**Δίνεται η συνάρτηση $f$, που είναι ορισμένη και συνεχής στο $R$ και ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=\int_x^0\left(\int_0^\pi f(t)\eta\mu x\,dx\right)dt+x^2$, για κάθε $x\in R$.**

**α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$.**

**β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f$.**

**γ) Αν $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-2x}+x-\dfrac{1}{2}$, $x\in R$, τότε:**

**i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f$.**

**iii) Για τις διάφορες τιμές του $\kappa\in R$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f(x) = -\int_0^x f(t)\left(\int_0^{\pi} \eta\mu x\, dx\right)dt + x^2 \quad (1).$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \eta\mu x\, dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 2.$

Άρα η (1) γράφεται: $f(x) = -2\int_0^x f(t)\,dt + x^2,\ \ x \in R.$

Η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,dt$, είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $f$.

Άρα η συνάρτηση $f(x) = -2\int_0^x f(t)\,dt + x^2$ είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x) = -2f(x) + 2x,\ \ x \in R.$

**β)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) + 2f(x) = 2x \overset{\cdot e^{2x}}{\Leftrightarrow} e^{2x}f'(x) + e^{2x}2f(x) = e^{2x}2x \Leftrightarrow \left(e^{2x}f(x)\right)' = 2xe^{2x},\ \text{ άρα }\ e^{2x}f(x) = \int 2xe^{2x}dx \quad (2).$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int 2xe^{2x}dx = \int x(e^{2x})'dx = xe^{2x} - \int e^{2x}dx = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c \quad (3).$

Η $(2) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} e^{2x}f(x) = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c \Leftrightarrow f(x) = ce^{-2x} + x - \frac{1}{2},\ \ x \in R$. Όμως $f(0) = 0$, άρα $c = \frac{1}{2}$.

Επομένως $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2},\ \ x \in R.$

**γ) i)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = -e^{-2x} + 1 = 1 - \frac{1}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}}.$$

Είναι:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Το πρόσημο της $f'$, η μονοτονία και τα ακρότατα της $f$ φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | $0$ (ελάχ.) | $\nearrow$ |

Έχουμε:

- Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η $f$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 0$, με ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$.

**ii)** ∘ Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0]$, άρα $f(\Delta_1)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{e^{-2x}}{2x}+1-\frac{1}{2x}\right)\right]=+\infty,$$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)=1-0=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-2x}}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2e^{-2x}\right)=-\infty$.

Άρα $f(\Delta_1)=[0,+\infty)$.

∘ Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[0,+\infty)$, άρα $f(\Delta_2)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}\right)=+\infty,$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot 0=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Άρα $f(\Delta_2)=[0,+\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[0,+\infty)$.

**iii)** Αν $\kappa<0$, τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ είναι αδύνατη.

Αν $\kappa=0$, τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μια λύση.

Αν $\kappa>0$, τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει δύο λύσεις.

# ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

## ΘΕΜΑ 25ο :

**Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f$, με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\int_1^{f(x)} (3t^2+2)\,dt = x$, για κάθε $x \in R$.**

**α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x)+2f(x)=x+3$, για κάθε $x \in R$.**

**β) Να αποδείξετε ότι η $f$ αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}$.**

**γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$, της συνάρτησης $f$ και τους άξονες $x΄x$ και $y΄y$.**

**δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$, που διέρχεται από το σημείο $A(-1,0)$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$\int_1^{f(x)} (3t^2+2)\,dt = x \Rightarrow \left[t^3+2t\right]_1^{f(x)} = x \text{ άρα } f^3(x)+2f(x)-3=x \Leftrightarrow f^3(x)+2f(x)=x+3 \quad (1).$$

**β)** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, άρα και η $f^3$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1) έχουμε:

$$3f^2(x)f΄(x)+2f΄(x)=1 \Leftrightarrow f΄(x)\left(3f^2(x)+2\right)=1 \Leftrightarrow f΄(x)=\frac{1}{3f^2(x)+2} \quad (2).$$

Είναι $f΄(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+2}>0$ για κάθε $x \in R$, επομένως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $R$, άρα είναι και «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y) \quad \text{με } x,y\in R, \text{ αφού } f(R)=R.$$

Η (1) ισοδύναμα γράφεται $y^3+2y=f^{-1}(y)+3 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^3+2y-3$, $y \in R$.

Άρα $f^{-1}: R \to R$ με $f^{-1}(x)=x^3+2x-3$ (3).

**γ) 1ος τρόπος:**

Είναι $f^{-1}(0)=-3$, άρα $f(-3)=0$, οπότε το $K(-3,0)$ είναι το κοινό σημείο της $C_f$ με τον άξονα x΄x.

Είναι $f^{-1}(1)=0$, άρα $f(0)=1$, οπότε το $\Lambda(0,1)$ είναι το κοινό σημείο της $C_f$ με τον άξονα y΄y.

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη $C_f$ και τους άξονες x΄x και y΄y είναι:

$$E(\Omega)=\int_{-3}^{0}|f(x)|\,dx\,.$$

Θέτουμε $y=f(x)$ άρα $x=f^{-1}(y)=y^3+2y-3$ οπότε $dx=\left(y^3+2y-3\right)'dy=\left(3y^2+2\right)dy$.

Επίσης ισχύουν οι ισοδυναμίες $x=-3 \Leftrightarrow y=0$ και $x=0 \Leftrightarrow y=1$, οπότε έχουμε:

$$E(\Omega)=\int_{-3}^{0}|f(x)|\,dx=\int_{0}^{1}|y|(3y^2+2)\,dy=\int_{0}^{1}y(3y^2+2)\,dy=$$

$$=\int_{0}^{1}(3y^3+2y)\,dy=\left[\frac{3y^4}{4}+y^2\right]_0^1=\frac{3}{4}+1-0=\frac{7}{4}\ \text{τ. μ.}$$

**2ος τρόπος:**

Τα κοινά σημεία της $C_f$ με τους άξονες x΄x και y΄y είναι αντίστοιχα τα $K(-3,0)$ και $\Lambda(0,1)$.

Τα συμμετρικά των $K,\Lambda$ ως προς την ευθεία δ: y=x είναι τα σημεία $K'(0,-3)$ και $\Lambda'(1,0)$.

Είναι $f^{-1}(x)=x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3)$, οπότε στο διάστημα $[0,1]$ είναι $f^{-1}(x)\le 0$.

Λόγω συμμετρίας των $C_f$ και $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία δ: y=x το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=-\int_{0}^{1}f^{-1}(x)\,dx=-\int_{0}^{1}(x^3+2x-3)\,dx=-\left[\frac{x^4}{4}+x^2-3x\right]_0^1=-\left(\frac{1}{4}+1-3\right)=\frac{7}{4}\ \text{τ.μ.}$$

**δ) 1ος τρόπος:**

Έστω $M\big(x_o\,,\,f(x_o)\big)$ το σημείο επαφής και ε η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο Μ, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon:\ y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)\ \overset{(2)}{\Leftrightarrow}\ \varepsilon:\ y-f(x_o)=\frac{1}{3f^2(x_o)+2}(x-x_o)\,.$$

Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-1,0)$, θα ισχύει:

$$0-f(x_o)=\frac{1}{3f^2(x_o)+2}(-1-x_o)\Leftrightarrow 3f^3(x_o)+2f(x_o)=x_o+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f^3(x_o)+\left(f^3(x_o)+2f(x_o)\right)=x_o+1\overset{(1)}{\Leftrightarrow}2f^3(x_o)+x_o+3=x_o+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^3(x_o)=-1\Leftrightarrow f(x_o)=-1\,.$$

Από την (1) έχουμε $(-1)^3+2(-1)=x_o+3 \Leftrightarrow x_o=-6$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $M\left(-6,-1\right)$ είναι:

$$\varepsilon:\ y-(-1)=\frac{1}{3(-1)^2+2}\left(x-(-6)\right) \Leftrightarrow \varepsilon:\ y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}.$$

**2$^{ος}$ τρόπος:**

Το συμμετρικό του σημείου $A(-1,0)$ ως προς την ευθεία $\delta:\ y=x$ είναι το σημείο $B(0,-1)$.
Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ που διέρχεται από το σημείο Β.

Έστω $N\left(x_o\,,f^{-1}(x_o)\right)$ το σημείο επαφής και $\zeta$ η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $N$, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\zeta:\ y-f^{-1}(x_o)=\left(f^{-1}\right)'(x_o)\cdot(x-x_o) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \zeta:\ y-\left(x_o^3+2x_o-3\right)=\left(3x_o^2+2\right)(x-x_o).$$

Επειδή η ευθεία $\zeta$ διέρχεται από το σημείο $B(0,-1)$, θα ισχύει:

$$-1-\left(x_o^3+2x_o-3\right)=\left(3x_o^2+2\right)(0-x_o) \Leftrightarrow -x_o^3-2x_o+2=-3x_o^3-2x_o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_o^3=-2 \Leftrightarrow x_o^3=-1 \Leftrightarrow x_o=-1.$$

Για κάθε $x\in R$ είναι $\left(f^{-1}\right)'(x)=\left(x^3+2x-3\right)'=3x^2+2$ (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) για $x_o=-1$ έχουμε $f^{-1}(-1)=-6$ και $\left(f^{-1}\right)'(-1)=5$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $N\left(-1,-6\right)$ είναι:

$$\zeta:\ y-(-6)=5\left(x-(-1)\right) \Leftrightarrow \zeta:\ y=5x-1.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τη συμμετρική της $\zeta:\ y=5x-1$, ως προς την ευθεία $\delta:\ y=x$, που είναι η ευθεία ε. Αντιμεταθέτοντας τις μεταβλητές x, y έχουμε $\varepsilon:\ x=5y-1 \Leftrightarrow \varepsilon:\ y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$.

## ΘΕΜΑ 26ο :

**Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x=(x-2)\cdot\left(\sqrt{e^{2x}-2}+i\sqrt{2}\right)$, $1\le x\le 2$ και η συνάρτηση $f(x)=|z_x|$.**

**α) Να αποδείξετε ότι η $f(x)=(2-x)e^x$, $1\le x\le 2$.**

**β) Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z με το μέγιστο μέτρο.**

**γ) Να αποδείξετε ότι:**

**i) H f αντιστρέφεται.**

**ii) H γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης $f^{-1}$ και η ευθεία $y=x$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_o\in(1\,,2)$.**

**iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^e f^{-1}(x)\,dx$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Είναι $|z_x| = |x-2|\cdot\left|\sqrt{e^{2x}-2}+i\sqrt{2}\right| = |x-2|\cdot\sqrt{e^{2x}-2+2} = (2-x)e^x$, αφού $1 \le x \le 2$.

Άρα $f(x) = (2-x)e^x$, $x \in [1,2]$.

**β)** Για κάθε $x \in (1,2)$ είναι:

$$f'(x) = [(2-x)e^x]' = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$$

Η $f$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως γινόμενο συνεχών και $f'(x)<0$ στο $(1,2)$, άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$. Επομένως η $f$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o = 1$.

Άρα ο μιγαδικός αριθμός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $z = -\sqrt{e^2-2} - i\sqrt{2}$.

**γ) i)** Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ άρα είναι και «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

**ii)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $C_f$ με την ευθεία $\delta: y = x$, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αφού η ευθεία $\delta$ είναι ο άξονας συμμετρίας των $C_f$ και $C_{f^{-1}}$.

Τα κοινά σημεία των $C_f$ και της ευθείας $\delta$: $y=x$, προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = x \Leftrightarrow (2-x)e^x - x = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (2-x)e^x - x$, $x \in [1,2]$.

- Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $[1,2]$, ως πράξεις συνεχών.
- $g(1)g(2) = (e-1)(-2) < 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Για κάθε $x \in [1,2]$ είναι:

$$g'(x) = [(2-x)e^x - x]' = -e^x + (2-x)e^x - 1 = \underbrace{(1-x)e^x}_{\le 0} \underbrace{-1}_{<0} < 0.$$

Άρα η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

**iii)** Είναι $I = \int_0^e f^{-1}(x)\,dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$, άρα $dx = f'(u)du$.

Για $x = 0$ έχουμε $u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(2) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} u = 2$.

Για $x = e$ έχουμε $u = f^{-1}(e) \Leftrightarrow f(u) = e \Leftrightarrow f(u) = f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} u = 1$.

Άρα έχουμε:

$$I = \int_0^e f^{-1}(x)\,dx = \int_2^1 u f'(u)\,du = \left[u f(u)\right]_2^1 - \int_2^1 f(u)\,du = f(1) - 2f(2) + \int_1^2 (2-u)e^u\,du =$$

$$= e + \int_1^2 (2-u)(e^u)'\,du = e + \left[(2-u)e^u\right]_1^2 - \int_1^2 (2-u)'e^u\,du = e - e + \int_1^2 e^u\,du = \left[e^u\right]_1^2 = e^2 - e.$$

## ΘΕΜΑ 27ο :

**Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$ για τον οποίο ισχύει:**

$$\left(e^{|z-1|} - e\right)x \geq e^{|z+i|x^2} - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Α.** **Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του $z$ στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.**

**Β.** **Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - 2 + 3i|$.**

**Γ.** **Μια συνάρτηση $f$ είναι ορισμένη στο $(0,2)$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό και ικανοποιεί τις σχέσεις $f^2(x) + x^2 = 2x$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.**

**α) Να αποδείξετε ότι η $C_f$ δεν έχει σημεία καμπής.**

**β) Να αποδείξετε ότι η $C_f$ είναι τμήμα του κύκλου στον οποίο ανήκουν οι εικόνες του $z$.**

**γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $G(x) = \int_1^{\ell n x} f(t)\,dt$.**

## ΛΥΣΗ

**Α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \left(e^{|z-1|} - e\right)x - e^{|z+i|x^2} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

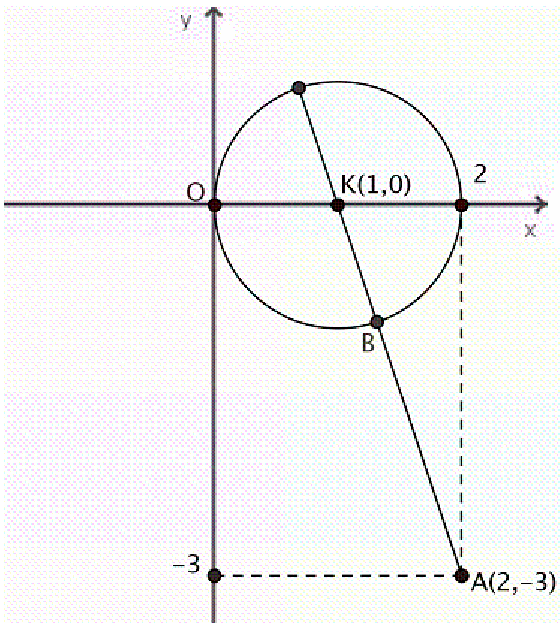
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\left(e^{|z-1|} - e\right)x \geq e^{|z+i|x^2} + 1 \Leftrightarrow \left(e^{|z-1|} - e\right)x - e^{|z+i|x^2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0).$$

Άρα η συνάρτηση $g$ παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_o = 0$ του πεδίου ορισμού της. Επίσης η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -2|z+i|xe^{|z+i|x^2} + e^{|z-1|} - e$, επομένως είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_o = 0$. Άρα ισχύει το Θεώρημα Fermat, οπότε

$g'(0) = 0 \Leftrightarrow e^{|z-1|} - e = 0 \Leftrightarrow e^{|z-1|} = e \Leftrightarrow |z-1| = 1.$

Άρα οι εικόνες του $z$ στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.




**Β.** Το μέτρο $|z - 2 + 3i|$ ισούται με την απόσταση της εικόνας του $z$ από το σημείο $A(2,-3)$.

$|z-2+3i|_{min} = (AB) = (AK) - R = \sqrt{1+9} - 1 = \sqrt{10} - 1.$

**Γ. α)** Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι:

- $2f(x)f'(x) + 2x = 2$
- $2\left(f'(x)\right)^2 + 2f(x)f''(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2 + f(x)f''(x) + 1 = 0$ (1).

Έστω ότι η $C_f$ έχει σημείο καμπής στο $x_o$, τότε $f''(x_o) = 0$.

Για $x = x_o$ από την (1) προκύπτει $\left(f'(x_o)\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(f'(x_o)\right)^2 = -1$, που είναι άτοπο.

Άρα η $C_f$ δεν έχει σημεία καμπής.

**β)** Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι:

$$f^2(x) + x^2 = 2x \overset{f(x)=y}{\Leftrightarrow} y^2 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow y^2 + x^2 - 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad (2).$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $(0,2)$, επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα από τη σχέση (2) έχουμε:

- $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$, $x \in (0,2)$ ή
- $f(x) = -\sqrt{1-(x-1)^2}$, $x \in (0,2)$

Επομένως η $C_f$ είναι τμήμα του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

**γ)** Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $(0,2)$ και οι συναρτήσεις $h(x) = 1$ και $\varphi(x) = \ell n x$, ορίζονται αντίστοιχα στο R και στο $(0,+\infty)$. Επομένως:

$$x \in A_G \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A_h \cap A_\varphi \\ h(x),\ \varphi(x) \text{ ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της } f. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \cap (0,+\infty) \\ \varphi(x) \in (0,2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0,+\infty) \\ 0 < \ell n x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0,+\infty) \\ e^0 < x < e^2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < e^2.$$ Άρα $A_G = (1, e^2)$.

## ΘΕΜΑ 28ο :

**Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $xy \neq 0$ με $|z^2 + i| = |z^2 - 3i|$.**

**α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού z είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{2x}$, $x \neq 0$.**

**β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R^*$ ισχύουν:**

**i) $(f o f)(x) = x$ και ii) $\mathrm{Im}(iz) - (f o f)(x) = 0$.**

**γ) Έστω τυχαίο σημείο $M(x_o, f(x_o))$ της $C_f$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο M και τους άξονες x΄x και y΄y είναι σταθερό.**

**δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $G(x) = \displaystyle\int_2^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Είναι:

$$\left|z^2+i\right| = \left|z^2-3i\right| \Leftrightarrow \left|z^2+i\right|^2 = \left|z^2-3i\right|^2 \Leftrightarrow \left(z^2+i\right)\left(\overline{z}^2-i\right) = \left(z^2-3i\right)\left(\overline{z}^2+3i\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{z^2\overline{z}^2} - iz^2 + i\overline{z}^2 + 1 = \cancel{z^2\overline{z}^2} + 3iz^2 - 3i\overline{z}^2 + 9 \Leftrightarrow 4i\overline{z}^2 - 4iz^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i\left(\overline{z}^2 - z^2\right) - 2 = 0 \overset{z=x+iy}{\Leftrightarrow} i\left(-4xyi\right) = 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}\,,\ x \neq 0.\ \text{Άρα}\ f(x) = \frac{1}{2x}\,,\ x \neq 0.$$

**β) i)** Έχουμε:

$$A_{f\circ f} = \left\{x \in A_f \ /\ f(x) \in A_f\right\} = \left\{x \neq 0 \ /\ \frac{1}{2x} \neq 0\right\} = R^*.$$

Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$\left(f\circ f\right)(x) = f\left(f(x)\right) = \frac{1}{2\,f(x)} = \frac{1}{2\,\frac{1}{2x}} = x\ ,\ \ x \neq 0.$$

**ii)** Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$iz = i\left(x+yi\right) = -y + ix\,,\ \text{άρα}\ \ \mathrm{Im}(iz) = x = \left(f\circ f\right)(x).$$

Επομένως $\mathrm{Im}(iz) - \left(f\circ f\right)(x) = x - x = 0.$

**γ)** Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης $f$ στο σημείο $M\left(x_o\,,\,f(x_o)\right)$ είναι:

$$\varepsilon : y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2x_o} = -\frac{1}{2x_o^2}(x - x_o)\,.$$

Η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως στα σημεία $A\left(2x_o\,,0\right)$ , $B\left(0\,,\,\frac{1}{x_o}\right)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $MAB$ είναι:

$$E = \frac{1}{2}\cdot\left|2x_o\right|\cdot\left|\frac{1}{x_o}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|2x_o\cdot\frac{1}{x_o}\right| = 1\ \text{τ.μ.}$$

**δ)** Η συνάρτηση $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $A_g = \left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$ και οι συναρτήσεις $h(x) = 2$ και $f(x) = \dfrac{1}{2x}$, ορίζονται αντίστοιχα στο $R$ και στο $R^*$. Επομένως:

$$x \in A_G \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A_h \cap A_f \\ h(x)\,,\,f(x)\ \text{ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της}\ g. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \cap R^* \\ f(x) \in \left(1\,,+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R^* \\ \dfrac{1}{2x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R^* \\ \dfrac{1-2x}{2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}.\ \text{Άρα}\ A_G = \left(0\,,\,\frac{1}{2}\right).$$

## ΘΕΜΑ 29ο :

**Θεωρούμε τη συνάρτηση** $F(x)=\int_1^{\frac{\alpha}{x}}\left(e^{t^2}-\frac{e^{\alpha}}{t}\right)dt$ **,** $\alpha>0$**.**

**α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης F.**

**β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη με** $F'(x)=\frac{e^{\alpha}}{x}-\frac{\alpha\cdot e^{\frac{\alpha^2}{x^2}}}{x^2}$, $x>0$**.**

**γ) Αν** $F(x)\geq 0$ **για κάθε** $x>0$**, να αποδείξετε ότι:**

**i)** $\alpha=1$ **και ii)** $\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{t^2}dt\leq e\ln 2$**.**

**ΛΥΣΗ**

**α)** Η συνάρτηση $g(t)=e^{t^2}-\frac{e^{\alpha}}{t}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $A_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και οι συναρτήσεις $h(x)=1$ και $\varphi(x)=\frac{\alpha}{x}$, ορίζονται αντίστοιχα στο R και στο $R^*$. Επομένως:

$$x\in A_F \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A_h\cap A_{\varphi} \\ h(x),\ \varphi(x) \text{ ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της } g. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in R\cap R^* \\ \varphi(x)\in(0,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R^* \\ \frac{\alpha}{x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R^* \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0,+\infty).\ \text{Άρα } A_F=(0,+\infty).$$

**β)** Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγισίμων συναρτήσεων $\varphi(x)=\frac{\alpha}{x}$ και $T(x)=\int_1^x g(t)\,dt$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης g.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$F'(x)=\left(e^{\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2}-\frac{e^{\alpha}}{\frac{\alpha}{x}}\right)\left(\frac{\alpha}{x}\right)'=\left(e^{\frac{\alpha^2}{x^2}}-\frac{xe^{\alpha}}{\alpha}\right)\left(-\frac{\alpha}{x^2}\right)=\frac{e^{\alpha}}{x}-\frac{\alpha\cdot e^{\frac{\alpha^2}{x^2}}}{x^2},\ x>0.$$

**γ)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $F(x)\geq 0\Leftrightarrow F(x)\geq F(\alpha)$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_o=\alpha>0$ του πεδίου ορισμού της ελάχιστο και αφού η F είναι παραγωγίσιμη ισχύει Θεώρημα Fermat, οπότε:

$$F'(\alpha)=0\Leftrightarrow\frac{e^{\alpha}}{\alpha}-\frac{\alpha\cdot e}{\alpha^2}=0\Leftrightarrow\frac{e^{\alpha}-e}{\alpha}=0\Leftrightarrow e^{\alpha}=e\Leftrightarrow\alpha=1.$$

**δ)** Για $\alpha=1$ έχουμε $F(x)=\int_1^{\frac{1}{x}}\left(e^{t^2}-\frac{e}{t}\right)dt$.

Για κάθε $x>0$ είναι $F(x)\geq 0$, οπότε

$$F(2)\geq 0 \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}}\left(e^{t^2}-\frac{e}{t}\right)dt\geq 0 \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}} e^{t^2}dt-\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{e}{t}dt\geq 0 \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}} e^{t^2}dt\geq \int_1^{\frac{1}{2}}\frac{e}{t}dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}} e^{t^2}dt\geq e\left[\ell nt\right]_1^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}} e^{t^2}dt\geq e\left(\ell n\frac{1}{2}-\ell n1\right) \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}} e^{t^2}dt\geq -e\ell n2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{t^2}dt\leq e\ell n2.$$

**ΘΕΜΑ 30ο :**

**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-1}$ , $x\neq\pm 1$**

**Α) Να βρείτε:**

**α) Το σύνολο τιμών της $f$.**

**β) Τις ασύμπτωτες της $C_f$.**

**Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_f$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=2$ και $x=e$.**

**Γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\kappa)=\displaystyle\int_2^{\kappa}\frac{x^3-5x}{x^2-1}dx-\int_{\kappa}^{2}f(x)dx$.**

**α) Να λύσετε την εξίσωση $g(\kappa)=6$.**

**β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in(-1\,,1)$ ισχύει $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)\,\text{συν}x\,dx=0$.**

**ΛΥΣΗ**

**Α) α)** Για κάθε $x\in A_f=R-\{-1\,,1\}$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{(4x)'(x^2-1)-(4x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{4(x^2-1)-(4x)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4(x^2+1)}{(x^2-1)^2}<0.$$

Το πρόσημο της $f'$ και η μονοτονία της $f$ φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | ‖ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f$ | | ↘ | ‖ | ↘ | ‖ | ↘ | |

Είναι:

- $f'(x)<0$ στο $(-\infty,-1)$, άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$.
- $f'(x)<0$ στο $(-1\,,1)$, άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1\,,1)$.
- $f'(x)<0$ στο $(1\,,+\infty)$, άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1\,,+\infty)$.

Βρίσκουμε τα όρια στα άκρα των διαστημάτων του $A_f$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-1^-} \left(\frac{4x}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right) = -\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{4x}{x-1} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-1^+} \left(\frac{4x}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right) = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{4x}{x-1} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \left(\frac{4x}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}\right) = -\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{4x}{x+1} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \left(\frac{4x}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}\right) = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{4x}{x+1} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f$ είναι το $f(A) = (-\infty, +\infty)$.

**β)** • Η ευθεία με εξίσωση y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

• Η ευθεία με εξίσωση y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• Η ευθεία με εξίσωση $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$, αφού $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$.

• Η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$, αφού $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$.

**Β)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[2, e]$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, e]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_f$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = e$, είναι:

$$E = \int_2^e f(x)dx = \int_2^e \frac{4x}{x^2-1}dx = 2\int_2^e \frac{2x}{x^2-1}dx = 2\int_2^e \frac{1}{x^2-1}(x^2-1)'dx =$$

$$= 2\left[\ell n\left|x^2-1\right|\right]_2^e = 2\ell n\left(e^2-1\right) - 2\ell n3 = 2\ell n\frac{e^2-1}{3} \quad \text{τ.μ.}$$

**Γ) α)** Η συνάρτηση g γράφεται:

$$g(\kappa) = \int_2^\kappa \frac{x^3-5x}{x^2-1}dx - \int_\kappa^2 \frac{4x}{x^2-1}dx = \int_2^\kappa \frac{x^3-5x}{x^2-1}dx + \int_2^\kappa \frac{4x}{x^2-1}dx = \int_2^\kappa \frac{x^3-5x+4x}{x^2-1}dx = \int_2^\kappa \frac{x^3-x}{x^2-1}dx$$

Η συνάρτηση $\frac{x^3-x}{x^2-1}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. Επειδή το $2 \in (1, +\infty)$ για να ορίζεται η g αρκεί το $\kappa \in (1, +\infty)$. Άρα $A_g = (1, +\infty)$.

Για κάθε $\kappa \in (1\,,+\infty)$ έχουμε:

$$g(\kappa)=\int_2^{\kappa}\frac{x^3-x}{x^2-1}dx=\int_2^{\kappa}\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}dx=\int_2^{\kappa}x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^{\kappa}=\frac{\kappa^2}{2}-\frac{2^2}{2}=\frac{\kappa^2-4}{2}.$$

Η εξίσωση $g(\kappa)=6$ ισοδύναμα γράφεται $\dfrac{\kappa^2-4}{2}=6 \Leftrightarrow \kappa^2-4=12 \Leftrightarrow \kappa^2=16 \Leftrightarrow \kappa=\pm 4$.

Η λύση $\kappa=4$ είναι δεκτή, ενώ η λύση $\kappa=-4$ απορρίπτεται γιατί $\kappa\in(1\,,+\infty)$.

**β)** Η συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)\cdot \text{συν}x=\dfrac{4x\,\text{συν}x}{x^2-1}$ είναι ορισμένη στο $(-1\,,1)$ και είναι περιττή.

Πράγματι, για κάθε $x\in(-1\,,1)$ έχουμε:

- $-x\in(-1\,,1)$
- $\varphi(-x)=\dfrac{4(-x)\text{συν}(-x)}{(-x)^2-1}=-\dfrac{4x\,\text{συν}x}{x^2-1}=-\varphi(x)$.

Είναι $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(x)\,dx=\int_{-\alpha}^{0}\varphi(x)\,dx+\int_{0}^{\alpha}\varphi(x)\,dx=I_1+I_2$

Θέτουμε $x=-u$, οπότε $dx=-du$. Για $x=-\alpha$ το $u=\alpha$, ενώ για $x=0$ το $u=0$.

$$I_1=\int_{-\alpha}^{0}\varphi(x)\,dx=\int_{\alpha}^{0}\varphi(-u)(-du)=-\int_{\alpha}^{0}\varphi(-u)du=$$

$$=\int_0^{\alpha}\varphi(-u)du\overset{\varphi:\text{περιττή}}{=}\int_0^{\alpha}-\varphi(u)du=-\int_0^{\alpha}\varphi(u)du=-I_2$$

Είναι $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(x)dx=I_1+I_2=-I_2+I_2=0$.

## ΘΕΜΑ 31ο :

**Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\displaystyle\int_0^{f(x)}(e^t+1)\,dt=x-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**α) Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)}+f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**β) Να αποδείξετε ότι η $f$ αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}$.**

**γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς την κοιλότητα και να βρείτε το πρόσημό της.**

**δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=1+e$.**

**ε) Να αποδείξετε ότι $(x-1)f'(x)<f(x)<\dfrac{x-1}{2}$, για κάθε $x\in(1\,,+\infty)$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\int_0^{f(x)} (e^t + 1)\,dt = x - 1 \Leftrightarrow \left[e^t + t\right]_o^{f(x)} = x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) - \left(e^o + 0\right) = x - 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = x \quad (1).$$

**β)** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, άρα και η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως σύνθεση παραγωγισίμων, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1) έχουμε:

$$\left(e^{f(x)} + f(x)\right)' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} f\,'(x) + f\,'(x) = 1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} + 1\right) f\,'(x) = 1 \Leftrightarrow f\,'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1} \quad (2).$$

Είναι $f\,'(x) = \dfrac{1}{e^{f(x)} + 1} > 0$ για κάθε $x \in R$, επομένως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $R$, άρα είναι και «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \text{με} \quad x, y \in R, \quad \text{αφού } f(R) = R.$$

Η (1) ισοδύναμα γράφεται $e^y + y = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y + y$, $y \in R$.

Άρα $f^{-1}: R \to R$ με $f^{-1}(x) = e^x + x \quad (3).$

**γ)** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, οπότε και η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως σύνθεση παραγωγισίμων, άρα και η $\dfrac{1}{e^{f(x)} + 1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$ ως πηλίκο παραγωγισίμων, οπότε η συνάρτηση $f$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $R$ με $f\,''(x) = -\dfrac{e^{f(x)} f\,'(x)}{\left(e^{f(x)} + 1\right)^2} < 0$, άρα η συνάρτηση $f$ είναι κοίλη στο $R$.

Για $x = 0$ από τη σχέση (3) έχουμε $f^{-1}(0) = 1$ άρα $f(1) = 0 \quad (4).$

Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $R$, οπότε:

- Για $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$
- Για $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$.

**δ)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[1, e+1]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e+1]$, επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = 1 + e$ είναι:

Είναι $E(\Omega)=\int_1^{1+e} f(x)\,dx$. Θέτουμε $f(x)=u \Leftrightarrow x=f^{-1}(u) \Leftrightarrow x=e^u+u$, άρα $dx=(e^u+1)du$.

Για $x=1$ έχουμε $1=f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(0)=f^{-1}(u) \Leftrightarrow u=0$.

Για $x=1+e$ έχουμε $1+e=f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(1)=f^{-1}(u) \Leftrightarrow u=1$.

Άρα έχουμε:

$$E(\Omega)=\int_1^{1+e} f(x)\,dx=\int_0^1 u(e^u+1)du=\int_0^1 ue^u du+\int_0^1 u\,du=\int_0^1 u(e^u)'du+\int_0^1 u\,du=$$

$$=\left[ue^u\right]_0^1-\int_0^1 (u)'e^u du+\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=e-\int_0^1 e^u du+\frac{1}{2}=e-\left[e^u\right]_0^1+\frac{1}{2}=e-(e-1)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

**ε)** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, x]$, άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ. , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} f'(\xi)=\dfrac{f(x)}{x-1}$ (5).

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R, άρα η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R, επομένως για $1<\xi<x \Rightarrow f'(1)>f'(\xi)>f'(x) \Rightarrow f'(x)<f'(\xi)<f'(1)$ (6).

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε $f'(1)=\dfrac{1}{e^{f(1)}+1}\overset{(4)}{=}\dfrac{1}{e^o+1}=\dfrac{1}{2}$ (7).

Η (6) $\overset{(5),(7)}{\Rightarrow} f'(x)<\dfrac{f(x)}{x-1}<\dfrac{1}{2} \overset{x>1}{\Rightarrow} (x-1)f'(x)<f(x)<\dfrac{x-1}{2}$.

## ΘΕΜΑ 32ο :

**Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με $f(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $f^4(x)+3f'(x)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.**

**α) Να μελετήσετε τη συνάρτησης f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.**

**β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ , $x\geq 0$.**

**γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$.**

**δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x, την εφαπτομένη ε και την ευθεία με εξίσωση $x=7$.**

**ε) Να αποδείξετε ότι $2f(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)<f(1)+f(\sigma\upsilon\nu 2\alpha)$ με $\alpha\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ είναι:

- $f'(x) = -\frac{1}{3}f^4(x) < 0$, αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.
- $f''(x) = -\frac{4}{3}f^3(x)f'(x) = -\frac{4}{3}f^3(x)\left(-\frac{1}{3}f^4(x)\right) = \frac{4}{9}f^7(x)$.

  Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,+\infty)$. Επειδή $f(0)=1>0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$. Άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

**β)** Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ έχουμε:

$$f^4(x) + 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3f'(x) = f^4(x) \Leftrightarrow -3f^{-4}(x)f'(x) = 1, \text{ άρα}$$

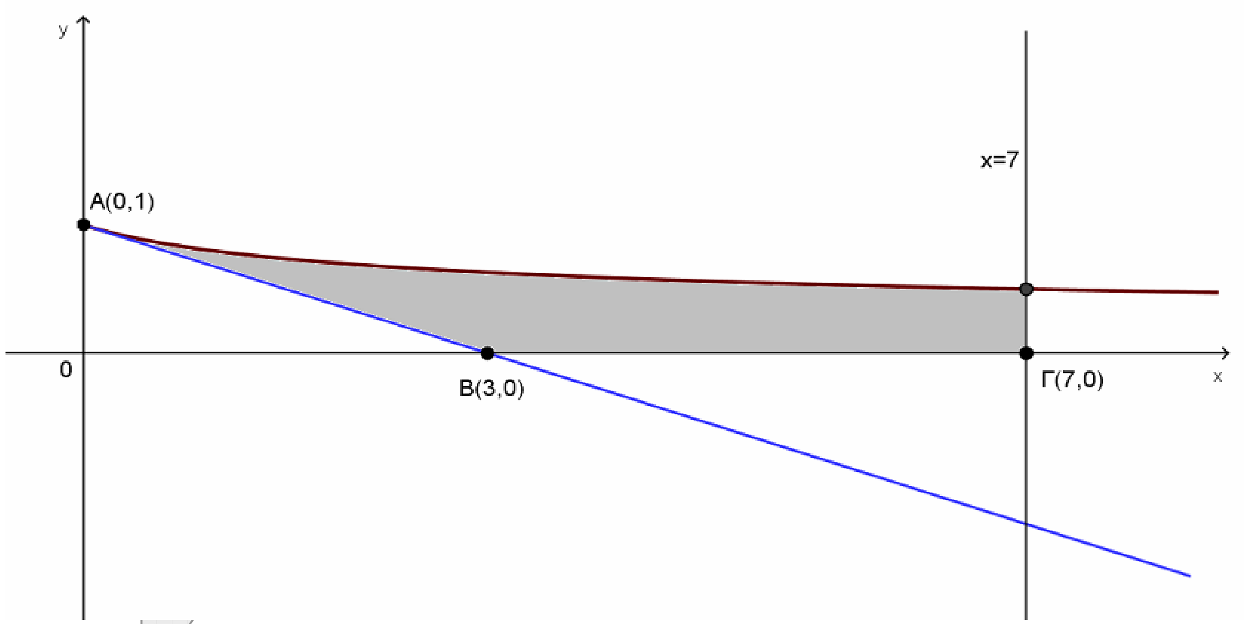
$$\int -3f^{-4}(x)f'(x)dx = \int 1dx \Leftrightarrow -3\frac{f^{-3}(x)}{-3} = x + c \Leftrightarrow \frac{1}{f^3(x)} = x + c.$$

Είναι $f(0)=1$, άρα $c=1$, οπότε $\frac{1}{f^3(x)} = x+1 \Leftrightarrow f^3(x) = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x \in [0,+\infty)$.

**γ)** Η εξίσωση εφαπτομένης ε της $C_f$ στο σημείο της $A(0,1)$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1 \quad (1).$$

**δ)** Για $y=0$ από την (1) έχουμε $-\frac{1}{3}x+1=0 \Leftrightarrow x=3$. Άρα η εφαπτομένη ε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $B(3,0)$. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x, την εφαπτομένη ε και την ευθεία με εξίσωση $x=7$, είναι:



$$E(\Omega)=\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx-(OAB)=\int_0^7 \left(x+1\right)^{-\frac{1}{3}}dx-\frac{1}{2}(OA)(OB)=$$

$$=\left[\frac{\left(x+1\right)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_0^7-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3=\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}\right]_0^7-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\left(4-1\right)-\frac{3}{2}=3 \quad \text{τ.μ.}$$

**ε)** Γνωρίζουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\ ,\ \text{άρα}\ \ \sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu 2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha>0\ \text{ για κάθε }\alpha\in\left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha\,,\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right]$ και $\left[\sigma\upsilon\nu^2\alpha\ ,\ 1\right]$, οπότε θα υπάρχει:

- $\xi_1\in\left(\sigma\upsilon\nu 2\alpha,\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi_1\right)=\dfrac{f\left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)-f\left(\sigma\upsilon\nu 2\alpha\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\dfrac{f\left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)-f\left(\sigma\upsilon\nu 2\alpha\right)}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ και
- $\xi_2\in\left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha\ ,\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi_2\right)=\dfrac{f\left(1\right)-f\left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\dfrac{f\left(1\right)-f\left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$.

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[0,+\infty\right)$, άρα η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$.

Άρα για $\xi_1<\xi_2$ είναι $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ οπότε έχουμε:

$$f\left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)-f\left(\sigma\upsilon\nu 2\alpha\right)<f\left(1\right)-f\left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)\Leftrightarrow 2f\left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)<f\left(1\right)+f\left(\sigma\upsilon\nu 2\alpha\right).$$

## ΘΕΜΑ 33ο :

**Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+f(x)=e^{-3x^2}+e^{-x^2}$ (1).**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.**

**β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{1}{f(x)}-e\cdot f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**γ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx+e\int_1^0 f(x)dx<e-1$.**

**δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\displaystyle\int_1^{2x}\frac{1}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την παράγωγό της.**

**ε) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)dx=\frac{1-e}{4}$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3+x$, $x\in R$, οπότε η (1) γράφεται $g\left(f(x)\right)=g\left(e^{-x^2}\right)$ $(2)$.
Η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'\left(x\right)=3x^2+1>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε είναι «1 – 1». Επομένως από τη σχέση (2) έχουμε $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in R$.

**β)** Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$\varphi(x)=\frac{1}{f(x)}-e\cdot f(x)=e^{x^2}-e\cdot e^{-x^2}=e^{x^2}-e^{1-x^2},\ x\in R.$$

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο R, με $\varphi'(x)=e^{x^2}2x-e^{1-x^2}\left(-2x\right)=2x\left(e^{x^2}+e^{1-x^2}\right)$.

Είναι:

- $\varphi'(x)=0\Leftrightarrow 2x\left(e^{x^2}+e^{1-x^2}\right)=0\Leftrightarrow x=0$.
- $\varphi'(x)>0\Leftrightarrow 2x\left(e^{x^2}+e^{1-x^2}\right)>0\Leftrightarrow x>0$.

Το πρόσημο της φ΄, η μονοτονία και τα ακρότατα της φ φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| φ΄ | $-$ | 0 | $+$ |
| φ | ↘ | $1-e$<br>ελάχ. | ↗ |

Έχουμε:

- Η φ είναι συνεχής στο $\left(-\infty,0\right]$ και $\varphi'(x)<0$ στο $\left(-\infty,0\right)$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$.
- Η φ είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$ και $\varphi'(x)>0$ στο $\left(0,+\infty\right)$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$.
- Η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=0$, με ελάχιστη τιμή $\varphi(0)=1-e$.

**γ)** Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_0^1 e^{x^2}dx+e\int_1^0 e^{-x^2}dx<e-1\Leftrightarrow\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 e^{1-x^2}dx<e-1\Leftrightarrow$

$$\int_0^1\left(e^{x^2}-e^{1-x^2}\right)dx<e-1\Leftrightarrow\int_0^1\varphi(x)\,dx<e-1.$$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[0,1\right]$, άρα για κάθε $x\in\left[0,1\right]$ είναι $\varphi(0)\le\varphi(x)\le\varphi(1)$. Είναι $\varphi(0)=e^0-e^{1-0}=1-e$ και $\varphi(1)=e-e^0=e-1$, άρα $1-e\le\varphi(x)\le e-1$.

Είναι $e-1\ge\varphi(x)\Leftrightarrow e-1-\varphi(x)\ge 0$, για κάθε $x\in\left[0,1\right]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

Επομένως $\int_0^1\left[e-1-\varphi(x)\right]dx>0\Leftrightarrow\int_0^1(e-1)dx-\int_0^1\varphi(x)dx>0\Leftrightarrow\int_0^1(e-1)dx>\int_0^1\varphi(x)dx\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\varphi(x)\,dx<\int_0^1(e-1)\,dx\Leftrightarrow\int_0^1\varphi(x)\,dx<e-1.$$

**δ)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h(x) = \int_1^{2x} \frac{1}{f(t)} dt \Leftrightarrow h(x) = \int_1^{2x} \frac{1}{e^{-t^2}} dt \Leftrightarrow h(x) = \int_1^{2x} e^{t^2} dt .$$

Η συνάρτηση $e^{t^2}$ είναι συνεχής στο R, η συνάρτηση 2x ορίζεται στο R και είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε και η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο R, με

$$h'(x) = \left( \int_1^{2x} e^{t^2} dt \right)' = e^{(2x)^2} (2x)' = 2e^{4x^2}.$$

**ε)** Είναι:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (x)' h(x)\, dx = \left[ x h(x) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x h'(x) dx = \frac{1}{2} h\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot 2e^{4x^2} dx =$$

$$= 0 - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(e^{4x^2}\right)' dx = -\frac{1}{4}\left[ e^{4x^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}(e-1) = \frac{1-e}{4}.$$

## ΘΕΜΑ 34ο :

**Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(0) = 1$, η οποία για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τις σχέσεις:**

$$f(x) > 0 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \int \frac{(x-1)^2 f(x)}{x^2+1} dx = f(x) + c\,, \quad c \in R \quad (2).$$

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ , $x \in R$.**

**β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$, ως προς τη μονοτονία.**

**γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f$**

**δ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - \ell n\left(x^4+1\right) < 1 - \ell n2$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2 f(x)}{x^2+1} dx = f(x) + c$, άρα

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 f(x)}{x^2+1} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{2x}{x^2+1} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(\ell n f(x)\right)' = \left(x - \ell n(x^2+1)\right)' \Leftrightarrow \ell n f(x) = x - \ell n(x^2+1) + c_1 .$$

Για $x = 0$ έχουμε $\ell n f(0) = -\ell n1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$.

Επομένως για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$\ell n f(x) = x - \ell n(x^2+1) \Leftrightarrow \ell n f(x) = \ell n e^x - \ell n(x^2+1) \Leftrightarrow \ell n f(x) = \ell n \frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x^2+1} .$$

**β)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^x\left(x^2+1\right) - 2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Το πρόσημο της $f'$ και η μονοτονία της $f$ φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $R$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $R$.

**γ)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $R$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι: $f(R) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x \cdot \dfrac{1}{x^2+1}\right) = 0$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x)'}{\left(x^2+1\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$.

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f$ είναι το $f(R) = (0, +\infty)$.

**δ)** Είναι:

$$x^2 - \ell n\left(x^4+1\right) < 1 - \ell n2 \Leftrightarrow x^2 < 1 - \ell n2 + \ell n\left(x^4+1\right) \Leftrightarrow x^2 < \ell ne - \ell n2 + \ell n\left(x^4+1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \ell n\frac{e\left(x^4+1\right)}{2} \Leftrightarrow e^{x^2} < \frac{e\left(x^4+1\right)}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{x^4+1} < \frac{e}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{(x^2)^2+1} < \frac{e}{2} \Leftrightarrow f\left(x^2\right) < f(1) \quad (3).$$

Για τους αριθμούς $x^2$ και $1$ υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις: ή $x^2 > 1$, ή $x^2 = 1$, ή $x^2 < 1$.
Αν υποθέσουμε ότι $x^2 > 1$ και με δεδομένο ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $R$, προκύπτει $f\left(x^2\right) > f(1)$ που είναι άτοπο λόγω της (3). Αν υποθέσουμε ότι $x^2 = 1$, τότε από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει $f\left(x^2\right) = f(1)$ που επίσης είναι άτοπο λόγω της (3).

Άρα από τη σχέση (3) προκύπτει $x^2 < 1$. Έχουμε λοιπόν $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

## ΘΕΜΑ 35ο :

**Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = f(x)+xi$, $x\in[\alpha,\beta]$ με $\alpha>0$.**

**α) Αν $Re(z_\alpha)=Im(\overline{z}_\beta)$ και $Re(\overline{z}_\beta)=Im(z_\alpha)$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$ τέμνει τον άξονα $x'x$, σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_o\in(\alpha,\beta)$.**

**β) Αν $\int_\alpha^{x_o} f(x)dx = -1$ και $\int_\beta^{x_o} f(x)dx = -3$, τότε:**

**i) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$, της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$ και $x=\beta$.**

**ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\dfrac{3}{f(\xi_2)}-\dfrac{1}{f(\xi_1)}=\beta-\alpha$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Έχουμε $z_\alpha = f(\alpha)+\alpha i$ και $\overline{z}_\beta = f(\beta)-\beta i$.

Είναι:

- $Re(z_\alpha)=Im(\overline{z}_\beta)$, οπότε $f(\alpha)=-\beta<0$,
- $Re(\overline{z}_\beta)=Im(z_\alpha)$, οπότε $f(\beta)=\alpha>0$, αφού $0<\alpha<\beta$.

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)=-\alpha\beta<0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα $x_o\in(\alpha,\beta)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=0$.

**β)** **i)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$, οπότε:

- Για $\alpha\le x\le x_o \Rightarrow f(x)\le f(x_o)$, άρα $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,x_o]$.
- Για $x_o\le x\le\beta \Rightarrow f(x_o)\le f(x)$, άρα $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[x_o,\beta]$.

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$, της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$ και $x=\beta$, είναι:

$$E=\int_\alpha^\beta |f(x)|dx = \int_\alpha^{x_o}(-f(x))dx+\int_{x_o}^\beta f(x)dx = -(-1)+3 = 4 \text{ τ.μ.}$$

**γ)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x\in[\alpha,\beta]$.

Η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, ως αρχική συνάρτηση της συνεχούς συνάρτησης $f$ στο $[\alpha,\beta]$ με $g'(x)=\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'=f(x)$. Άρα η συνάρτηση $g$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,x_o]$ και $[x_o,\beta]$, οπότε θα υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,x_o)$ και $\xi_2\in(x_o,\beta)$ τέτοια, ώστε:

- $$g'(\xi_1)=\frac{g(x_o)-g(\alpha)}{x_o-\alpha}=\frac{\int_{\alpha}^{x_o} f(t)dt-\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt}{x_o-\alpha}=\frac{-1-0}{x_o-\alpha}=\frac{-1}{x_o-\alpha}$$ και
- $$g'(\xi_2)=\frac{g(\beta)-g(x_o)}{\beta-x_o}=\frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt-\int_{\alpha}^{x_o} f(t)dt}{\beta-x_o}=\frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+\int_{x_o}^{\alpha} f(t)dt}{\beta-x_o}=\frac{\int_{x_o}^{\beta} f(t)dt}{\beta-x_o}=\frac{3}{\beta-x_o}.$$

Άρα έχουμε: $g'(\xi_1)=\dfrac{-1}{x_0-\alpha}\Leftrightarrow f(\xi_1)=\dfrac{-1}{x_0-\alpha}\Leftrightarrow x_0-\alpha=\dfrac{-1}{f(\xi_1)}$ (1)

και $g'(\xi_2)=\dfrac{3}{\beta-x_0}\Leftrightarrow f(\xi_2)=\dfrac{3}{\beta-x_0}\Leftrightarrow \beta-x_0=\dfrac{3}{f(\xi_2)}$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε $\dfrac{3}{f(\xi_2)}-\dfrac{1}{f(\xi_1)}=\beta-\alpha$.

## ΘΕΜΑ 36ο :

**Δίνεται συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, με $f(0)=0$ και $f'(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)=2f(x)f'(x)$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.**

**α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=f^2(x)+1$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.**

**β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ είναι «1 – 1» στο R.**

**γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=g(f(x))-g(\varepsilon\varphi x)$ είναι σταθερή στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της.**

**δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\varepsilon\varphi x$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.**

**ε) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_g$, της συνάρτησης $g$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $g(1)=E+\frac{\ell n2}{2}$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\left(f'(x)\right)' = \left(f^2(x)\right)' \Leftrightarrow f'(x) = f^2(x) + c.$$

Όμως $f'(0) = f^2(0) + c \Leftrightarrow 1 = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $f'(x) = f^2(x) + 1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

**β)** Η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\frac{1}{1+t^2}$, με $g'(x) = \left(\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\right)' = \frac{1}{1+x^2}$. Είναι $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in R$, άρα η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $R$, άρα η $g$ είναι και «1 – 1».

**γ)** Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$h'(x) = g'\left(f(x)\right)f'(x) - g'(\varepsilon\varphi x)(\varepsilon\varphi x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)}\left(1+f^2(x)\right) - \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\cdot\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right) = 1 - 1 = 0.$$

Επομένως η συνάρτηση $h$ είναι σταθερή. Έστω $h(x) = c_1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Για $x = 0$ έχουμε $h(0) = c_1 \Leftrightarrow g\left(f(0)\right) - g\left(\varepsilon\varphi 0\right) = c_1 \Leftrightarrow g(0) - g(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$.

Άρα $h(x) = 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

**δ)** Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow g\left(f(x)\right) - g(\varepsilon\varphi x) = 0 \Leftrightarrow g\left(f(x)\right) = g(\varepsilon\varphi x) \overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = \varepsilon\varphi x.$$

**ε)** Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, άρα για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $g(0) \le g(x) \le g(1)$, οπότε $g(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_g$, της συνάρτησης $g$, τον άξονα $x΄x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$, είναι:

$$E = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (x)' g(x)dx = \left[x\,g(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x\cdot g'(x)dx = g(1) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= g(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = g(1) - \frac{1}{2}\left[\ell n\left|1+x^2\right|\right]_0^1 = g(1) - \frac{1}{2}\left(\ell n2 - \ell n1\right) = g(1) - \frac{\ell n2}{2}.$$

Είναι $E = g(1) - \frac{\ell n2}{2}$, οπότε $g(1) = E + \frac{\ell n2}{2}$.

# ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

## ΘΕΜΑ 1ο :

**Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $Re(z_1) = -2$ και $Re(z_2) = 2$**

**Αν $f(x) = (x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)(x - \overline{z_2})$ και $f(i) = 64 - 8i$ , τότε να αποδείξετε ότι:**

**α)** $f(-i) = 64 + 8i$

**β)** $(1 + z_1^2)(1 + \overline{z_1}^2)(1 + z_2^2)(1 + \overline{z_2}^2) = 4160$

**γ)** $|z_1| = 3$ **και** $|z_2| = \sqrt{7}$

## ΛΥΣΗ

**α)** Είναι:

- $f(i) = (i - z_1)(i - \overline{z_1})(i - z_2)(i - \overline{z_2})$
- $f(-i) = (-i - z_1)(-i - \overline{z_1})(-i - z_2)(-i - \overline{z_2}) =$

$$= (\overline{i} - z_1)(\overline{i} - \overline{z_1})(\overline{i} - z_2)(\overline{i} - \overline{z_2}) =$$

$$= (\overline{i - \overline{z_1}})(\overline{i - z_1})(\overline{i - \overline{z_2}})(\overline{i - z_2}) =$$

$$= \overline{(i - \overline{z_1})(i - z_1)(i - \overline{z_2})(i - z_2)} =$$

$$= \overline{(i - z_1)(i - \overline{z_1})(i - z_2)(i - \overline{z_2})} =$$

$$= \overline{f(i)} = \overline{64 - 8i} = 64 + 8i$$

**β)** Είναι:

$$(1 + z_1^2)(1 + \overline{z_1}^2)(1 + z_2^2)(1 + \overline{z_2}^2) =$$

$$= (z_1^2 - i^2)(\overline{z_1}^2 - i^2)(z_2^2 - i^2)(\overline{z_2}^2 - i^2) =$$

$$= (z_1 - i)(z_1 + i)(\overline{z_1} - i)(\overline{z_1} + i)(z_2 - i)(z_2 + i)(\overline{z_2} - i)(\overline{z_2} + i) =$$

$$=\left[(z_1-i)(\overline{z_1}-i)(z_2-i)(\overline{z_2}-i)\right]\left[(z_1+i)(\overline{z_1}+i)(z_2+i)(\overline{z_2}+i)\right]=$$

$$=\left[(i-z_1)(i-\overline{z_1})(i-z_2)(i-\overline{z_2})\right]\left[(-i-z_1)(-i-\overline{z_1})(-i-z_2)(-i-\overline{z_2})\right]=$$

$$=f(i)f(-i)=(64-8i)(64+8i)=64^2+8^2=4096+64=4160$$

**γ)** Είναι:

$$z_1+\overline{z_1}=2\operatorname{Re}(z_1)=2\cdot(-2)=-4 \qquad (1)$$

$$z_2+\overline{z_2}=2\operatorname{Re}(z_2)=2\cdot 2=4 \qquad (2)$$

Έχουμε:

- $f(i)=(i-z_1)(i-\overline{z_1})(i-z_2)(i-\overline{z_2})=$

$$=\left[(i-z_1)(i-\overline{z_1})\right]\left[(i-z_2)(i-\overline{z_2})\right]=$$

$$=\left[-1-i(z_1+\overline{z_1})+|z_1|^2\right]\left[-1-i(z_2+\overline{z_2})+|z_2|^2\right]\overset{(1),(2)}{=}$$

$$=\left[|z_1|^2-1+4i\right]\left[|z_2|^2-1-4i\right]=$$

$$=\left[|z_1|^2-1+4i\right]\left[|z_2|^2-1-4i\right]=$$

$$=\left[\left(|z_1|^2-1\right)\left(|z_2|^2-1\right)+16\right]+\left[4\left(|z_2|^2-1\right)-4\left(|z_1|^2-1\right)\right]i=$$

$$=\left[\left(|z_1|^2-1\right)\left(|z_2|^2-1\right)+16\right]+\left[4|z_2|^2-4|z_1|^2\right]i$$

Όμως:

- $f(i)=64-8i$

Άρα έχουμε:

$$\begin{cases}\left(|z_1|^2-1\right)\left(|z_2|^2-1\right)+16=64\\ 4|z_2|^2-4|z_1|^2=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(|z_1|^2-1\right)\left(|z_2|^2-1\right)=48\\ |z_2|^2-|z_1|^2=-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left(|z_2|^2+1\right)\left(|z_2|^2-1\right)=48\\ |z_1|^2=|z_2|^2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z_2|^4-1=48\\ |z_1|^2=|z_2|^2+2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}|z_2|^4=49\\ |z_1|^2=|z_2|^2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z_2|=\sqrt{7}\\ |z_1|^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z_2|=\sqrt{7}\\ |z_1|=3\end{cases}$$

## ΘΕΜΑ 2ο :

**Δίνεται η παράσταση** $f(z) = \dfrac{(\sqrt{3}+i)z}{|z+10i|-|z-10i|}$ **. Να αποδείξετε ότι:**

**α) Το ευρύτερο υποσύνολο του $C$ στο οποίο ορίζεται η παράσταση $f(z)$ είναι το $C-R$**

**β)** $\big||z+10i|-|z-10i|\big| \le 2|z|$

**γ)** $|f(z)| \ge 1$

**δ) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$, για τους οποίους ισχύει $|f(z)| = \dfrac{1}{6}|z|$, είναι υπερβολή, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Έστω $z = x+yi$, $x, y \in R$ και $M(x, y)$ η εικόνα του στο επίπεδο.

Για να ορίζεται η παράσταση $f$ αρκεί $|z+10i|-|z-10i| \ne 0$

Εξετάζουμε λοιπόν για ποιους μιγαδικούς αριθμούς $z$ ισχύει $|z+10i|-|z-10i| = 0$

Είναι:

$$|z+10i|-|z-10i| = 0 \Leftrightarrow |z+10i| = |z-10i| \Leftrightarrow$$

$$|x+(y+10)i| = |x+(y-10)i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+(y+10)^2} = \sqrt{x^2+(y-10)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+20y+100 = x^2+y^2-20y+100 \Leftrightarrow$$

$$20y = -20y \Leftrightarrow 40y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα, για να ορίζεται η παράσταση $f$ αρκεί $y \ne 0$, δηλαδή $z \in C-R$

**β)** Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \quad \text{για κάθε } z_1, z_2 \in C,$$

οπότε για $z_1 = z+10i$ και $z_2 = z-10i$ έχουμε:

$$\big||z+10i|-|z-10i|\big| \le |(z+10i)+(z-10i)| = |2z| = 2|z|$$

**γ)** Για κάθε $z \in C$ είναι:

$$\big||z+10i|-|z-10i|\big| \le 2|z|$$

οπότε για κάθε $z \in C-R$ είναι:

$$\frac{1}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} \ge \frac{1}{2|z|} \qquad (1)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$|f(z)| = \left|\frac{(\sqrt{3}+i)z}{|z+10i|-|z-10i|}\right| = \frac{|(\sqrt{3}+i)z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} = \frac{|\sqrt{3}+i|\cdot|z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} =$$

$$= \frac{2|z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} = 2|z|\cdot\frac{1}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} \overset{(1)}{\geq} 2|z|\cdot\frac{1}{2|z|} = 1$$

**δ)** Είναι:

$$|f(z)| = \frac{1}{6}|z| \Leftrightarrow \left|\frac{(\sqrt{3}+i)z}{|z+10i|-|z-10i|}\right| = \frac{1}{6}|z| \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{3}+i|\cdot|z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} = \frac{1}{6}|z| \Leftrightarrow$$

$$\frac{2|z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} = \frac{1}{6}|z| \Leftrightarrow |z|\cdot\big||z+10i|-|z-10i|\big| = 12|z| \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \big||z+10i|-|z-10i|\big| = 12$$

Είναι:

$$\big||z+10i|-|z-10i|\big| = 12 \Leftrightarrow \big||z-(0-10i)|-|z-(0+10i)|\big| = 12 \Leftrightarrow |(ΜΕ΄)-(ΜΕ)| = 12,$$

όπου Μ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z$, $Ε΄(0,-10)$ και $Ε(0,10)$

Παρατηρούμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων της εικόνας Μ του μιγαδικού αριθμού $z$ από τα σταθερά σημεία Ε΄, Ε είναι $2\alpha = 12$ σταθερή και μικρότερη του (Ε΄Ε) = 20.

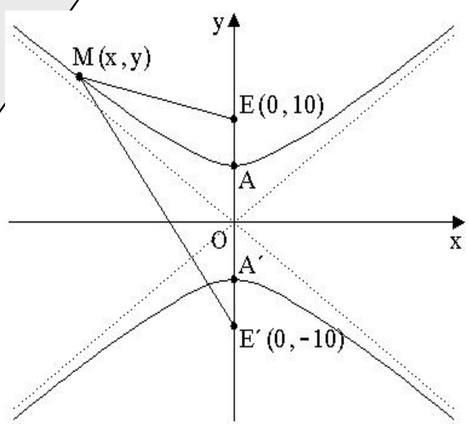
Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$ είναι η υπερβολή με εστίες τα σημεία $Ε΄(0,-10)$ και $Ε(0,10)$, άρα $\gamma = 10$

Επιπλέον είναι $2\alpha = 12 \Leftrightarrow \alpha = 6$, οπότε

$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow \beta^2 = 64 \Leftrightarrow \beta = 8$

και η εξίσωση της υπερβολής είναι:

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$




## ΘΕΜΑ 3ο :

**Δίνονται τρεις μιγαδικοί αριθμοί $z$, $w$, $u$ με $|z| = 3$, $|w| = 4$, $|u| = 5$ και $z + w + u = 0$, οι οποίοι έχουν εικόνες τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα.**

**α) Να αποδείξετε ότι $16z^2 + 9w^2 = 0$**

**β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.**

**γ) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $z$, $w$, $u$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Από την υπόθεση έχουμε:

- $|z| = 3 \Leftrightarrow |z|^2 = 9 \Leftrightarrow z\bar{z} = 9 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{9}{z}$ (1)
- $|w| = 4 \Leftrightarrow |w|^2 = 16 \Leftrightarrow w\bar{w} = 16 \Leftrightarrow \bar{w} = \dfrac{16}{w}$ (2)
- $|u| = 5 \Leftrightarrow |u|^2 = 25 \Leftrightarrow u\bar{u} = 25 \Leftrightarrow \bar{u} = \dfrac{25}{u}$ (3)

Επίσης έχουμε:

$$u = -(z + w) \qquad (4)$$

Είναι:

$$z + w + u = 0 \Leftrightarrow \overline{z} + \overline{w} + \overline{u} = 0 \quad (5)$$

Η σχέση (5) με βάση τις σχέσεις (1) , (2) και (3) γράφεται:

$$\frac{9}{z} + \frac{16}{w} + \frac{25}{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{z} + \frac{16}{w} - \frac{25}{z+w} = 0 \Leftrightarrow$$

$$9w(z + w) + 16z(z + w) - 25zw = 0 \Leftrightarrow$$

$$9wz + 9w^2 + 16z^2 + 16zw - 25zw = 0 \Leftrightarrow$$

$$16z^2 + 9w^2 = 0 \qquad (6)$$

**β)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2$$

Είναι όμως:

$$|z - w|^2 = (z - w)(\overline{z} - \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} - (z\overline{w} + \overline{z}w) =$$

$$= 16 + 9 - \left(\frac{16z}{w} + \frac{9w}{z}\right) = 25 - \frac{16z^2 + 9w^2}{zw} \overset{(6)}{=} 25 = (AB)^2$$

Επομένως έχουμε:

$$(AB) = |z - w| = 5$$

Είναι:

$$(OA)^2 + (OB)^2 = |z|^2 + |w|^2 = 9 + 16 = 25 = |z - w|^2 = (AB)^2$$

οπότε το τρίγωνο $OAB$ είναι ορθογώνιο.

**γ)** Αρκεί να βρούμε ακόμα τους αριθμούς $|z - u|$ και $|w - u|$, που είναι αντίστοιχα τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΒΓ, αφού ήδη έχουμε αποδείξει ότι $(AB) = |z - w| = 5$
Είναι:

- $$|z - u|^2 \overset{(4)}{=} |2z + w|^2 = (2z + w)(2\overline{z} + \overline{w}) =$$

  $$= 4z\overline{z} + w\overline{w} + 2(z\overline{w} + w\overline{z}) = 4|z|^2 + |w|^2 + 2(z\overline{w} + w\overline{z}) =$$

  $$= 36 + 16 + 2 \cdot \left(\frac{9w}{z} + \frac{16z}{w}\right) = 36 + 16 + 2 \cdot \frac{16z^2 + 9w^2}{zw} \overset{(6)}{=} 52$$

  Επομένως έχουμε:

  $$(A\Gamma) = |z - u| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

- $|w-u|^2 \overset{(4)}{=} |z+2w|^2 = (z+2w)(\bar{z}+2\bar{w}) =$

$$= z\bar{z} + 4w\bar{w} + 2(z\bar{w}+w\bar{z}) = |z|^2 + 4|w|^2 + 2(z\bar{w}+w\bar{z}) =$$

$$= 9 + 64 + 2\cdot\left(\frac{9w}{z}+\frac{16z}{w}\right) = 9 + 64 + 2\cdot\frac{16z^2+9w^2}{zw} = 73$$

Επομένως έχουμε:

$$(\mathrm{B\Gamma}) = |w-u| = \sqrt{73}$$

## ΘΕΜΑ 4ο :

**Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z$, $w$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:**

- $\left|\dfrac{z}{\alpha^2} - i\right| = \dfrac{1}{\alpha}|z-i| \qquad (1)$
- $w(z-i) - 2zi - 2\alpha^2 = 0 \qquad (2)$ **, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $0<\alpha \neq 1$**

**α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$**

**β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $w$ ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.**

**γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $v = \dfrac{2z-w}{2z+w}$ με $w \neq -2z$, είναι φανταστικός**

**δ) Αν $z_1, z_2$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες αντίστοιχα στο επίπεδο τα σημεία $A, B$, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση (1) και $w$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός με εικόνα στο επίπεδο το σημείο $\Gamma$, ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση (2), τότε να αποδείξετε ότι:**

$$\frac{1}{3} \leq \frac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)} \leq 3$$

## ΛΥΣΗ

**α)** Είναι:

$$\left|\frac{z}{\alpha^2} - i\right| = \frac{1}{\alpha}|z-i| \Leftrightarrow \left|z-\alpha^2 i\right| = \alpha|z-i| \Leftrightarrow \left|z-\alpha^2 i\right|^2 = \alpha^2|z-i|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(z-\alpha^2 i\right)\left(\overline{z-\alpha^2 i}\right) = \alpha^2(z-i)\left(\overline{z-i}\right) \Leftrightarrow \left(z-\alpha^2 i\right)\left(\bar{z}+\alpha^2 i\right) = \alpha^2(z-i)(\bar{z}+i) \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} + \alpha^2 zi - \alpha^2\bar{z}i - \alpha^4 i^2 = \alpha^2 z\bar{z} + \alpha^2 zi - \alpha^2\bar{z}i - \alpha^2 i^2 \Leftrightarrow |z|^2 - \alpha^4 i^2 = \alpha^2|z|^2 - \alpha^2 i^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 - \alpha^2|z|^2 = \alpha^2 - \alpha^4 \Leftrightarrow \left(1-\alpha^2\right)|z|^2 = \left(1-\alpha^2\right)\alpha^2 \overset{0<\alpha\neq 1}{\Leftrightarrow} |z|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow |z| = \alpha \qquad (3)$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \alpha$

**β)** Έχουμε:

$$w(z-i) - 2zi - 2\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow w(z-i) = 2zi + 2\alpha^2 \overset{z\neq i}{\Leftrightarrow} w = \frac{2zi+2\alpha^2}{z-i} \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$w = \frac{2zi+2|z|^2}{z-i} \Leftrightarrow w = \frac{2zi+2z\bar{z}}{z-i} \Leftrightarrow w = \frac{2z(\bar{z}+i)}{z-i} \qquad (4)$$

Είναι $z \neq i$, γιατί αν $z = i$ από τη σχέση (2) προκύπτει $\alpha^2 = 1$ άτοπο.

Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$|w| = \left|\frac{2z(\bar{z}+i)}{z-i}\right| \Leftrightarrow |w| = \frac{|2z(\bar{z}+i)|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = \frac{2|z|\cdot|\bar{z}+i|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = \frac{2|z|\cdot|\overline{z-i}|}{|z-i|} \Leftrightarrow$$

$$|w| = \frac{2|z|\cdot|z-i|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = 2|z| \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |w| = 2\alpha \qquad (5)$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $w$ ανήκουν στον κύκλο, ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2\alpha$

**γ)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\bar{v} = -v$

Από τις σχέσεις (3) και (5) έχουμε:

- $|z|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \alpha^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{\alpha^2}{z}$
- $|w|^2 = 4\alpha^2 \Leftrightarrow w\bar{w} = 4\alpha^2 \Leftrightarrow \bar{w} = \dfrac{4\alpha^2}{w}$

Είναι:

$$\bar{v} = \overline{\left(\frac{2z-w}{2z+w}\right)} = \frac{\overline{2z-w}}{\overline{2z+w}} = \frac{2\bar{z}-\bar{w}}{2\bar{z}+\bar{w}} = \frac{\frac{2\alpha^2}{z} - \frac{4\alpha^2}{w}}{\frac{2\alpha^2}{z} + \frac{4\alpha^2}{w}} = \frac{2\alpha^2\cdot\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{w}\right)}{2\alpha^2\cdot\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{w}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{z} - \frac{2}{w}}{\frac{1}{z} + \frac{2}{w}} = \frac{\frac{w-2z}{zw}}{\frac{w+2z}{zw}} = \frac{w-2z}{w+2z} = -\frac{2z-w}{2z+w} = -v$$

Άρα ο αριθμός $v = \dfrac{2z-w}{2z+w}$ είναι φανταστικός

**δ)** Είναι:

$$(\Gamma A) = |w - z_1| \qquad \text{και} \qquad (\Gamma B) = |w - z_2|$$

Για τους μιγαδικούς αριθμούς $w, z_1$ από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big||w| - |z_1|\big| \le |w + z_1| \le |w| + |z_1| \qquad (6)$$

Αν στη σχέση (6) θέσουμε, όπου $z_1$ το $-z_1$ έχουμε:

$$\big||w| - |-z_1|\big| \le |w + (-z_1)| \le |w| + |-z_1| \overset{|-z_1|=|z_1|}{\Leftrightarrow}$$

$$\big||w| - |z_1|\big| \le |w - z_1| \le |w| + |z_1| \Leftrightarrow$$

$$|2\alpha - \alpha| \le |w - z_1| \le 2\alpha + \alpha \Leftrightarrow \alpha \le (\Gamma A) \le 3\alpha \qquad (7)$$

Ομοίως για τους μιγαδικούς αριθμούς $w, z_2$ έχουμε:

$$\alpha \le |w - z_2| \le 3\alpha \Leftrightarrow \alpha \le (\Gamma B) \le 3\alpha, \text{ οπότε } \frac{1}{3\alpha} \le \frac{1}{(\Gamma B)} \le \frac{1}{\alpha} \qquad (8)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (7) και (8) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{3\alpha} \le \frac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)} \le \frac{3\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \frac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)} \le 3$$

## ΘΕΜΑ 5ο :

**Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $w$ και $z$, για τους οποίους ισχύει ότι:**

- $\mathbf{25|w|^2 = 180 + |5w - 6 - 12i|^2}$
- **Οι εικόνες $K(z)$ των μιγαδικών αριθμών $z$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα κέντρα των κύκλων εκείνων που εφάπτονται εσωτερικά του κύκλου $C_1 : (E, 4)$, όπου $E(1, 0)$ και διέρχονται από το σημείο $E'(-1, 0)$**

**Να βρείτε:**

**α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $w$ στο μιγαδικό επίπεδο.**

**β) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$ στο μιγαδικό επίπεδο.**

**γ) Την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$**

**δ) Τους μιγαδικούς $z_1, z_2, z_3, z_4$ από τους μιγαδικούς αριθμούς $z$, που οι εικόνες τους είναι κορυφές τετραγώνου με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Έστω $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε:

$$25|w|^2 = 180 + |5w - 6 - 12i|^2 \Leftrightarrow$$

$$25|x + yi|^2 = 180 + |5(x + yi) - 6 - 12i|^2 \Leftrightarrow$$

$$25|x + yi|^2 = 180 + |(5x - 6) + (5y - 12)i|^2 \Leftrightarrow$$

$$25(x^2 + y^2) = 180 + (5x - 6)^2 + (5y - 12)^2 \Leftrightarrow$$

$$25x^2 + 25y^2 = 180 + 25x^2 - 60x + 36 + 25y^2 - 120y + 144 \Leftrightarrow$$

$$60x + 120y - 360 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $w$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία $\varepsilon : x + 2y - 6 = 0$

**β)** Αν $\Delta$ είναι το σημείο επαφής ενός κύκλου κέντρου $K(z)$ με τον κύκλο $C_1$, τότε ισχύει:

$$(KE) = 4 - (K\Delta) \quad (1), \text{ με } (K\Delta) < 4$$

Επειδή $(K\Delta) = (KE')$ η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

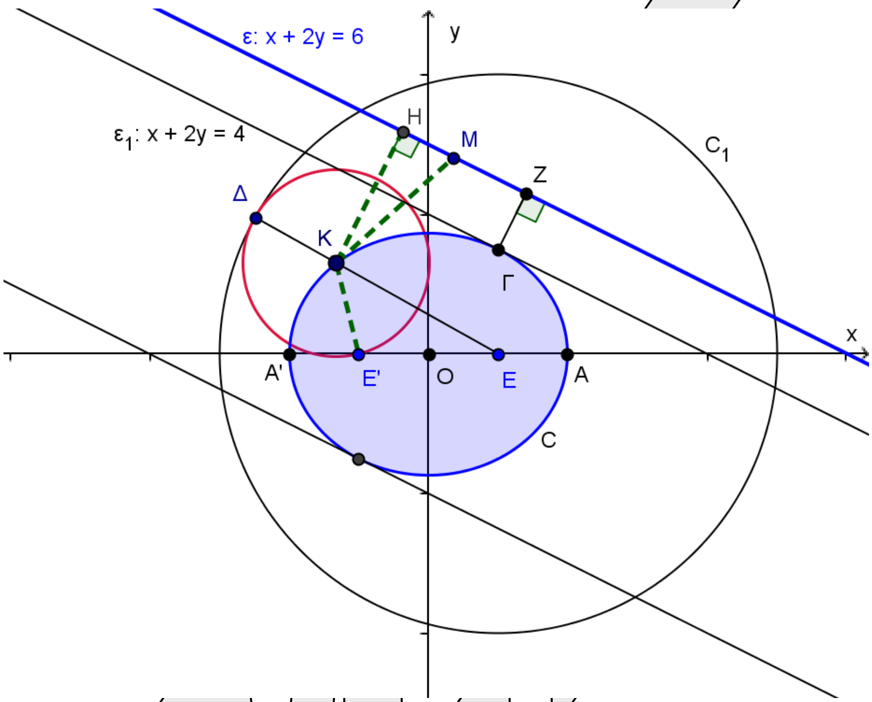
$$(KE) = 4 - (KE') \Leftrightarrow (KE) + (KE') = 4 \quad \text{και} \quad (E'E) = 2 < 4$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $K$, που είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z$ στο επίπεδο είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-1,0)$, $E(1,0)$ και μεγάλο άξονα $A'A$ με $(A'A) = 2\alpha = 4$, οπότε $\alpha = 2$

Είναι:

$$2\gamma = (E'E) = 2 \Leftrightarrow \gamma = 1 \quad \text{και} \quad \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 3$$

Επομένως η εξίσωση της έλλειψης είναι $C: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$




**γ)** Έστω $K(z)$ και $M(w)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z$, $w$ στο μιγαδικό επίπεδο, τότε είναι $|z - w| = (KM) \geq (KH) \geq (\Gamma Z)$, όπου $KH \perp (\varepsilon)$ και $\Gamma$ εκείνο το σημείο της έλλειψης $C$, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon$ και απέχει από αυτή τη μικρότερη απόσταση.

Εύρεση του Γ:

Έστω $\Gamma(x_1, y_1)$ σημείο της έλλειψης $C$ τότε ισχύει:

$$\frac{x_1^{\,2}}{4} + \frac{y_1^{\,2}}{3} = 1 \qquad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης $\varepsilon_1$ στο σημείο Γ είναι:

$$\varepsilon_1: \frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{3} = 1$$

Είναι:

$$\varepsilon_1 // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_\varepsilon \overset{y_1 \neq 0}{\Leftrightarrow} -\frac{3x_1}{4y_1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{2}x_1 \qquad (2)$$

Από την (1) έχουμε:

$$\frac{x_1^{\,2}}{4} + \frac{\frac{9}{4}x_1^{\,2}}{3} = 1 \Leftrightarrow x_1^{\,2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$$

- Για $x_1 = 1$ είναι $y_1 = \dfrac{3}{2}$, άρα $\Gamma_1\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

- Για $x_1 = -1$ είναι $y_1 = -\frac{3}{2}$, άρα $\Gamma_2\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$

Οι εφαπτόμενες της έλλειψης $C$, στα σημεία της $\Gamma_1$ και $\Gamma_2$ είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon$ και

- $d(\Gamma_1, \varepsilon) = \dfrac{\left|1 + 2\cdot\frac{3}{2} - 6\right|}{\sqrt{1+2^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
- $d(\Gamma_2, \varepsilon) = \dfrac{\left|-1 - 2\cdot\frac{3}{2} - 6\right|}{\sqrt{1+2^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

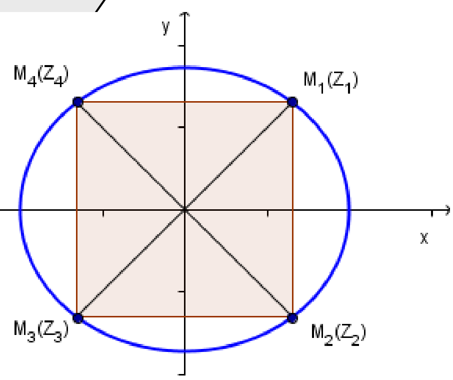
Δηλαδή $d(\Gamma_1, \varepsilon) < d(\Gamma_2, \varepsilon)$, άρα το ζητούμενο σημείο $\Gamma$ είναι το $\Gamma_1$

Είναι:

$$|z - w| = (KM) \geq (KH) \geq (\Gamma Z) = d(\Gamma, \varepsilon) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$ είναι $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

**δ)** Έστω τα σημεία $M_1, M_2, M_3, M_4$ της έλλειψης $C$, που είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1, z_2, z_3, z_4$ αντίστοιχα, με $z_1 = x_1 + y_1 i$, $x_1, y_1 > 0$, ώστε το τετράπλευρο $M_1M_2M_3M_4$ να είναι τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$




Λόγω των συμμετριών ισχύει:

$$z_2 = \overline{z_1}, \quad z_3 = -z_1 \quad \text{και} \quad z_4 = -\overline{z_1}$$

Είναι:

- $(M_1M_2) = (M_1M_4) \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_1 - z_4| \Leftrightarrow$

  $\left|z_1 - \overline{z_1}\right| = \left|z_1 - \left(-\overline{z_1}\right)\right| \Leftrightarrow |2y_1 i| = |2x_1| \overset{x_1, y_1 > 0}{\Leftrightarrow} y_1 = x_1 \quad (3)$

- $\dfrac{x_1^{\,2}}{4} + \dfrac{y_1^{\,2}}{3} = 1 \quad (4)$ , γιατί το σημείο $M_1 \in (C)$

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$x_1 = y_1 = \frac{2\sqrt{21}}{7}, \text{ γιατί } x_1, y_1 > 0$$

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί αριθμοί είναι:

$$z_1 = \frac{2\sqrt{21}}{7}(1+i),\ z_2 = \frac{2\sqrt{21}}{7}(1-i),\ z_3 = \frac{2\sqrt{21}}{7}(-1-i) \text{ και } z_4 = \frac{2\sqrt{21}}{7}(-1+i)$$

## ΘΕΜΑ 6ο :

**Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:**

$$\left(f^2(x) + g^2(x)\right)' = 2f'(x) + 2g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

**και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = f(x) + g(x)i$**

**α) Αν $f(1)=4$ και $g(1)=-3$, τότε:**

**i) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z_x$ κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.**

**ii) Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή του αθροίσματος $f^2(x)+g^2(x)$, στην περίπτωση που ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z_x$ είναι ο κύκλος του προηγούμενου ερωτήματος.**

**β) Αν υπάρχει $\alpha \in R$ ώστε $z_\alpha = 1+i$, τότε:**

**i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = z_\alpha^{2012} - \overline{z}_\alpha^{2012}$**

**ii) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g$**

## ΛΥΣΗ

**α) i)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\left(f^2(x)+g^2(x)\right)' = 2f'(x)+2g'(x) \Rightarrow$$
$$2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=2f'(x)+2g'(x) \Rightarrow$$
$$2f'(x)\left(f(x)-1\right)+2g'(x)\left(g(x)-1\right)=0 \Rightarrow$$
$$\left[\left(f(x)-1\right)^2+\left(g(x)-1\right)^2\right]'=0 \Rightarrow$$
$$\left(f(x)-1\right)^2+\left(g(x)-1\right)^2=c \qquad (2)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\left(f(1)-1\right)^2+\left(g(1)-1\right)^2=c \Leftrightarrow$$
$$3^2+(-4)^2=c \Leftrightarrow c=25$$

Άρα, για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$\left(f(x)-1\right)^2+\left(g(x)-1\right)^2=25$$

που σημαίνει ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z_x$ κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(1\,,1)$ και ακτίνα $\rho=5$

**ii)** Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z_x$ ισχύει $|z_x|^2=f^2(x)+g^2(x)$, οπότε το άθροισμα $f^2(x)+g^2(x)$ λαμβάνει την ελάχιστη (μέγιστη) τιμή του, όταν το μέτρο του $z_x$ λαμβάνει την ελάχιστη (μέγιστη) τιμή.

Η ελάχιστη τιμή του $|z_x|$ είναι ίση με:

$$(OA)=(AK)-(OK)=5-\sqrt{2}$$

Η μέγιστη τιμή του $|z_x|$ είναι ίση με:

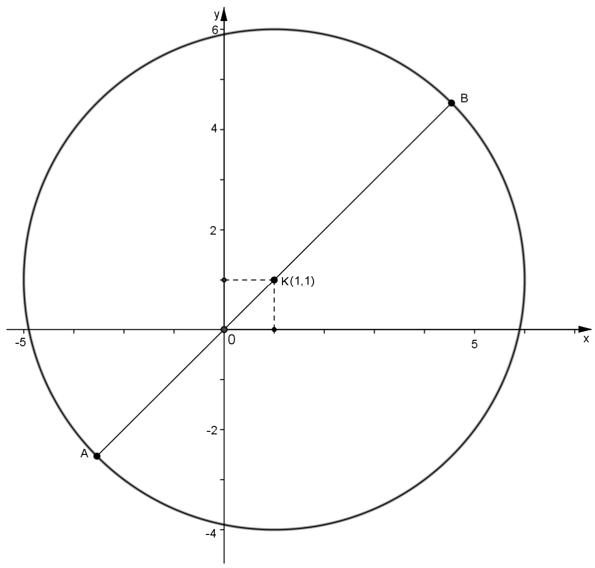
$$(OB)=(BK)+(OK)=5+\sqrt{2}$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος είναι:

$$m=\left(5-\sqrt{2}\right)^2=27-10\sqrt{2}$$

και η μέγιστη τιμή του είναι:

$$M=\left(5+\sqrt{2}\right)^2=27+10\sqrt{2}$$



**β) i)** Είναι:

$$z_\alpha^{\ 2012} = (1+i)^{2012} = \left[(1+i)^2\right]^{1006} = (2i)^{1006} = -2^{1006}$$

και

$$\overline{z}_\alpha^{\ 2012} = (1-i)^{2012} = \left[(1-i)^2\right]^{1006} = (-2i)^{1006} = -2^{1006}$$

οπότε $A = 0$

**ii)** Για $x = \alpha$ έχουμε:

$$z_\alpha = f(\alpha) + g(\alpha)i \overset{z_\alpha = 1+i}{\Leftrightarrow} f(\alpha) + g(\alpha)i = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 1 \\ g(\alpha) = 1 \end{cases}$$

και η σχέση (2) γίνεται:

$$\left(f(\alpha)-1\right)^2 + \left(g(\alpha)-1\right)^2 = c \Leftrightarrow$$

$$\left(1-1\right)^2 + \left(1-1\right)^2 = c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα, για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$\left(f(x)-1\right)^2 + \left(g(x)-1\right)^2 = 0$$

Επομένως:

$$f(x) = 1,\ x \in R \quad \text{και} \quad g(x) = 1,\ x \in R$$

## ΘΕΜΑ 7ο :

**Έστω $f(z) = z + \dfrac{4}{z}$, όπου $z$ μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$**

**α) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1$ και $z_2$, για τους οποίους ισχύει $f(z) = 2$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1$, $z_2$ και $z_3 = \dfrac{z_1^{\ 4} z_2 + z_1 z_2^{\ 4}}{32}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$**

**β) Αν $f(z) \in R$ και $z \in C - R$, τότε:**

**i) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{h \to +\infty}\left(\ln\left(|z|^h + 1\right) - h\right)$**

**ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{(t-2)^2\left(f(z)+4\right)}{t} + \dfrac{t^{2012}\left(4 - f(z)\right)}{t-2} = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα ως προς $t$ στο διάστημα $(0, 2)$**

**γ) Αν $|f(z)| = |z|$, $z \in C^*$, τότε:**

**i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$ στο μιγαδικό επίπεδο.**

**ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z_4 - z_5|$ όπου $z_4$, $z_5$ δύο από τους μιγαδικούς $z$ του (γ. i) ερωτήματος με $\mathrm{Im}(z_4) \cdot \mathrm{Im}(z_5) < 0$**

## ΛΥΣΗ

**α)** $f(z)=2 \Leftrightarrow z+\dfrac{4}{z}=2 \Leftrightarrow z^2+4=2z \Leftrightarrow z^2-2z+4=0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2\pm 2i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z=1\pm\sqrt{3}\cdot i$$

Άρα $z_1=1+\sqrt{3}\cdot i$ και $z_2=1-\sqrt{3}\cdot i$ (2)

Είναι:

$$z_3=\frac{z_1^4\cdot z_2+z_1\cdot z_2^4}{32}=\frac{z_1z_2}{32}\cdot\left(z_1^3+z_2^3\right)=$$

$$=\frac{z_1z_2}{32}\cdot\left(z_1+z_2\right)\cdot\left(z_1^2-z_1\cdot z_2+z_2^2\right)\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}\frac{4}{32}\cdot 2\cdot(-8)=-2$$

γιατί $z_1\cdot z_2=4$ , $z_1+z_2=2$ και $z_1^2+z_2^2=\left(z_1+z_2\right)^2-2\left(z_1\cdot z_2\right)=2^2-2\cdot 4=-4$

Ισχύει:

$$\left|z_1-z_2\right|=\left|z_2-z_3\right|=\left|z_3-z_1\right|=2\sqrt{3} \quad \text{και} \quad \left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=2$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών $z_1$, $z_2$ και $z_3$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$

**β)** **i)** Έχουμε:

$$f(z)\in R \Leftrightarrow f(z)=\overline{f(z)} \Leftrightarrow z+\frac{4}{z}=\overline{\left(z+\frac{4}{z}\right)} \Leftrightarrow z+\frac{4}{z}=\bar{z}+\frac{4}{\bar{z}} \overset{\cdot(z\cdot\bar{z})}{\Leftrightarrow}$$

$$z\cdot\left(z\cdot\bar{z}\right)+4\cdot\bar{z}=\bar{z}\cdot\left(z\cdot\bar{z}\right)+4\cdot z \Leftrightarrow z\cdot|z|^2+4\cdot\bar{z}=\bar{z}\cdot|z|^2+4\cdot z \Leftrightarrow$$

$$|z|^2\left(z-\bar{z}\right)-4\cdot\left(z-\bar{z}\right)=0 \Leftrightarrow \left(z-\bar{z}\right)\left(|z|^2-4\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$z-\bar{z}=0 \;\text{ ή }\; |z|^2-4=0 \Leftrightarrow z=\bar{z} \;\text{ ή }\; |z|^2=4 \Leftrightarrow$$

$$z\in R \;\text{ ή }\; |z|=2 \overset{z\notin R}{\Leftrightarrow} |z|=2 \qquad (3)$$

Είναι:

$$\lim_{h\to+\infty}\left(\ln\left(|z|^h+1\right)-h\right)=\lim_{h\to+\infty}\left(\ln\left(2^h+1\right)-\ln e^h\right)=$$

$$=\lim_{h\to+\infty}\ln\left(\frac{2^h+1}{e^h}\right)=\lim_{h\to+\infty}\ln\left(\left(\frac{2}{e}\right)^h+\left(\frac{1}{e}\right)^h\right)=\lim_{t\to 0^+}\ln t=-\infty, \text{ γιατί αν θέσουμε}$$

$$t=\left(\frac{2}{e}\right)^h+\left(\frac{1}{e}\right)^h \quad \text{τότε} \quad \lim_{h\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{e}\right)^h+\left(\frac{1}{e}\right)^h\right)=0$$

**ii)** Είναι:

$$\frac{(t-2)^2\left(f(z)+4\right)}{t}+\frac{t^{2012}\left(4-f(z)\right)}{t-2}=0 \Leftrightarrow$$

$$(t-2)^3\left(f(z)+4\right)+t^{2013}\left(4-f(z)\right)=0 \qquad (4)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(t)=t^{2013}(4-f(z))+(t-2)^3(f(z)+4),\quad t\in[0,2]$$

Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$ ως άθροισμα συνεχών και $g(0)\cdot g(2)<0$, γιατί $g(0)=-8\cdot(f(z)+4)<0$ και

$g(2)=2^{2013}(4-f(z))>0$, λόγω της (5).

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα στο διάστημα $(0,2)$ η εξίσωση $g(t)=0$, λόγω της (4) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\dfrac{(t-2)^2(f(z)+4)}{t}+\dfrac{t^{2012}(4-f(z))}{t-2}=0$, οπότε η δοθείσα εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

Η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2)$, επειδή

$$g'(t)=2013t^{2012}(4-f(z))+3(t-2)^2(f(z)+4)>0$$

για κάθε $t\in(0,2)$, άρα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Από το (β) ερώτημα έχουμε ότι:
$f(z)\in R$ και $z\in C-R$
και από την (3) έχουμε ότι $|z|=2$

Είναι: $|f(z)|\le|z|+\dfrac{4}{|z|}=2+\dfrac{4}{2}=4$,

δηλαδή $|f(z)|\le 4 \overset{f(z)\in R}{\Leftrightarrow} -4\le f(z)\le 4$,

όμως $f(z)=4\Leftrightarrow z+\dfrac{4}{z}=4\Leftrightarrow z=2$

και $f(z)=-4\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow z=-2$

και επειδή $z\in C-R$ τελικά ισχύει

$\boxed{-4<f(z)<4}$ (5)

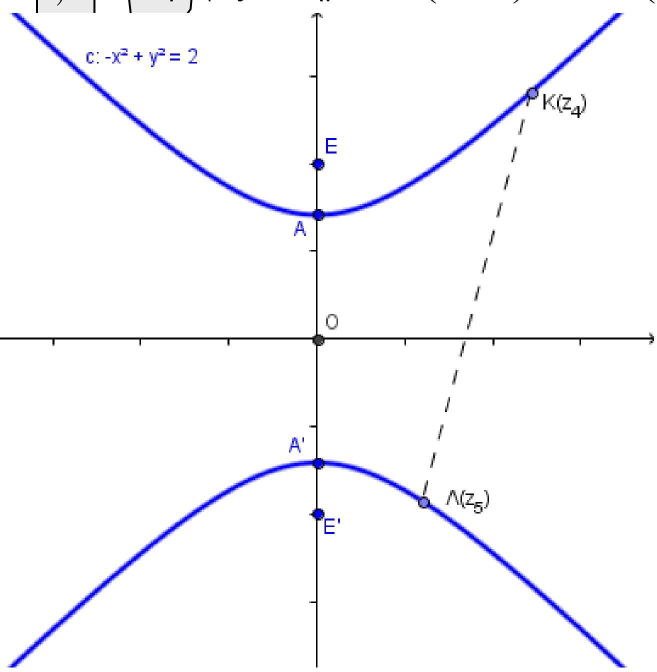
**γ) i)** Έστω $z=x+yi,\ z\neq 0$

$$|f(z)|=|z|\Leftrightarrow\left|z+\frac{4}{z}\right|=|z|\overset{\cdot|z|}{\Leftrightarrow}|z^2+4|=|z|^2\Leftrightarrow|z^2+4|^2=(z\cdot\bar z)^2\Leftrightarrow$$

$$(z^2+4)\left((\bar z)^2+4\right)=z^2(\bar z)^2\Leftrightarrow z^2(\bar z)^2+4z^2+4(\bar z)^2+16=z^2(\bar z)^2\Leftrightarrow$$

$$z^2+(\bar z)^2+4=0\overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}2(x^2-y^2)+4=0\Leftrightarrow y^2-x^2=2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ισοσκελής υπερβολή $c: y^2-x^2=2$ με $\alpha=\beta=\sqrt2$ και $\gamma=2$, που έχει εστίες τα σημεία $E(0,2)$ και $E'(0,-2)$ και κορυφές τα σημεία $A(0,\sqrt2)$ και $A'(0,-\sqrt2)$



**ii)** Είναι:

$$\mathrm{Im}(z_4)\cdot \mathrm{Im}(z_5) < 0$$

Άρα οι εικόνες των $z_4$, $z_5$ στο επίπεδο θα βρίσκονται σε διαφορετικό κλάδο της υπερβολής $c: y^2 - x^2 = 2$. Αν $K$, $\Lambda$ οι εικόνες των $z_4$, $z_5$ αντιστοίχως, τότε έχουμε:

$$\left|z_4 - z_5\right| = (K\Lambda) \geq (AA') = 2\sqrt{2}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του $\left|z_4 - z_5\right|$ είναι η $2\sqrt{2}$

## ΘΕΜΑ 8ο :

**Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- **$f(x) \geq e^x$, για κάθε $x \in R$ (1)**
- **$f(x)f(-x) = 1$, για κάθε $x \in R$ (2)**

**α) Να βρείτε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in R$**

**β) Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$**

**i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g$**

**iii) Αν για τους θετικούς αριθμούς $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ισχύει $\ln\alpha + \ln\beta + \ln\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι**

$$\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\alpha+\gamma} + \gamma e^{\alpha+\beta} \geq 3e^3$$

## ΛΥΣΗ

**α)** Για $x = 0$ από τις σχέσεις (1) και (2) αντίστοιχα έχουμε:

$$f(0) \geq 1 \quad \text{και} \quad f^2(0) = 1$$

Άρα $f(0) = 1$

Επίσης, αν θέσουμε όπου $x$ το $-x$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(-x) \geq e^{-x} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{e^x} \Rightarrow f(x) \leq e^x, \ x \in R \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε:

$$f(x) = e^x, \ x \in R$$

**β)** **i)** Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$g(x) = \frac{e^x}{x}$$

Η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με

$$g'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)e^x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)e^x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της $g$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | $e$ | $\nearrow$ | |
| | | | ελάχιστο | | |

- Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0\,,1]$
- Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$
- Η συνάρτηση $g$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $g(1)=e$

**ii)** Είναι:

- ○ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\cdot e^x\right)=+\infty$
- ○ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

- Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0\,,\,1]$, άρα

$$g(\Delta_1)=\left[\,g(1)\,,\,\lim_{x\to 0^+}g(x)\right)=[\,e\,,\,+\infty)$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1\,,+\infty)$, άρα

$$g(\Delta_2)=\left[\,g(1)\,,\,\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=[\,e\,,\,+\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g$ είναι:

$$g(\Delta)=g(\Delta_1)\cup g(\Delta_2)=[\,e\,,\,+\infty)$$

**iii)** Είναι:

- $\ln\alpha+\ln\beta+\ln\gamma=1 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma)=1 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma=e \qquad (4)$
- $g(\alpha)=\dfrac{e^\alpha}{\alpha}\ge e\,,\;\; g(\beta)=\dfrac{e^\beta}{\beta}\ge e$ και $g(\gamma)=\dfrac{e^\gamma}{\gamma}\ge e$

Επομένως

$$g(\alpha)g(\beta)+g(\beta)g(\gamma)+g(\gamma)g(\alpha)\ge 3e^2 \Rightarrow$$

$$\frac{e^\alpha}{\alpha}\cdot\frac{e^\beta}{\beta}+\frac{e^\beta}{\beta}\cdot\frac{e^\gamma}{\gamma}+\frac{e^\gamma}{\gamma}\cdot\frac{e^\alpha}{\alpha}\ge 3e^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma e^{\alpha+\beta}+\alpha e^{\beta+\gamma}+\beta e^{\gamma+\alpha}}{\alpha\beta\gamma}\ge 3e^2 \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\alpha e^{\beta+\gamma}+\beta e^{\gamma+\alpha}+\gamma e^{\alpha+\beta}}{e}\ge 3e^2 \Rightarrow$$

$$\alpha e^{\beta+\gamma}+\beta e^{\gamma+\alpha}+\gamma e^{\alpha+\beta}\ge 3e^3$$

## ΘΕΜΑ 9ο :

**Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(R)=R$, οποία ικανοποιεί τη σχέση:**

$$\sigma\upsilon\nu^2 f(x)+4f(x)=x \quad \text{για κάθε } x\in R \qquad (1)$$

**α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.**

**β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία.**

**γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$**

**δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=\eta\mu x$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{4},\,0\right)$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

- $\sigma\upsilon\nu f(x_1)=\sigma\upsilon\nu f(x_2)\Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 f(x_1)=\sigma\upsilon\nu^2 f(x_2)$ (2)
- $4f(x_1)=4f(x_2)$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2 f(x_1)+4f(x_1)=\sigma\upsilon\nu^2 f(x_2)+4f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow} x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι «1−1», οπότε αντιστρέφεται.

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f$ είναι το $R$, επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f^{-1}$ είναι το $R$

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση $f^{-1}$ απομένει να βρούμε τον τύπο της

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu^2 y+4y=f^{-1}(y) \quad \text{ή} \quad f^{-1}(y)=4y+\sigma\upsilon\nu^2 y$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της $f$ είναι:

$$f^{-1}: R\to R \text{ με } f^{-1}(x)=4x+\sigma\upsilon\nu^2 x$$

**β)** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, άρα και η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων, όπως επίσης και η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu^2 f(x)$

Παραγωγίζοντας λοιπόν και τα δύο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$2\sigma\upsilon\nu f(x)\big(\sigma\upsilon\nu f(x)\big)'+4f'(x)=1 \Leftrightarrow$$

$$-2\sigma\upsilon\nu f(x)\eta\mu f(x)f'(x)+4f'(x)=1 \Leftrightarrow$$

$$\big(4-2\sigma\upsilon\nu f(x)\eta\mu f(x)\big)\cdot f'(x)=1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{4-2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x)}$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

**1ος τρόπος:**

$$\begin{cases} |\eta\mu f(x)| \le 1 \\ |\sigma\upsilon\nu f(x)| \le 1 \end{cases} \Rightarrow |\eta\mu f(x)| \cdot |\sigma\upsilon\nu f(x)| \le 1 \Rightarrow$$

$$|\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x)| \le 1 \Rightarrow -1 \le \eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) \le 1 \Rightarrow$$

$$2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) \le 2 \Rightarrow 2 - 2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) \ge 0 \Rightarrow$$

$$4 - 2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) > 0$$

**2ος τρόπος:**

$$4 - 2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) = 3 + 1 - 2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) =$$

$$= 3 + \eta\mu^2 f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 f(x) - 2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) =$$

$$= 3 + \left(\eta\mu f(x) - \sigma\upsilon\nu f(x)\right)^2 > 0$$

οπότε:

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in R$$

Επομένως η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $R$

**γ)** Για $x = 0$ έχουμε:

$$f^{-1}(0) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Είναι:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$$

Όμως:

$$f'(1) = \frac{1}{4 - 2\eta\mu f(1) \cdot \sigma\upsilon\nu f(1)} \overset{f(1)=0}{=} \frac{1}{4 - 2\eta\mu 0 \cdot \sigma\upsilon\nu 0} = \frac{1}{4}$$

Άρα:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{4}$$

**δ)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f^{-1}(x) - \eta\mu x = 4x + \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x$, $x \in R$

- Η συνάρτηση $h$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot h(0) = \underbrace{\frac{1 + \sqrt{2} - 2\pi}{2}}_{<0} \cdot 1 < 0$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ είναι:

$$h'(x) = 4 - 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x = \underbrace{4 - \sigma\upsilon\nu x}_{>0} + \underbrace{(-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)}_{>0} > 0$$

Άρα η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

## ΘΕΜΑ 10ο :

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha$ με $\alpha>0$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- **$f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε $x, y>0$ (1)**
- **$f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ (2)**

**Α) Να αποδείξετε ότι:**

**α) $f(1)=1$ και $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x>0$**

**β) $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$**

**γ) η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)}$ για κάθε $x>0$**

**Β) Αν η ευθεία $\varepsilon: x-2\sqrt{\alpha}\cdot y+\alpha=0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, να βρείτε τον τύπο της $f$.**

## ΛΥΣΗ

**Α) α)** Για $y=1$ και $x>0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x\cdot 1)=f(x)f(1)\Leftrightarrow f(x)=f(x)f(1)\Leftrightarrow f(x)\big(1-f(1)\big)=0\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(1)=1 \qquad (3)$$

Για $x>0$ και $y=\frac{1}{x}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(1)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\overset{(3)}{\Leftrightarrow} f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)} \qquad (4)$$

**β)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $f(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι :

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty) \qquad (5)$$

Από την υπόθεση είναι $f(0)=0$, οπότε τελικά έχουμε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$

**γ)** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha>0$, οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$ (6)

Για να είναι η $f$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε τυχαίο $x_o\in(0,+\infty)$

Έστω $x_o\in(0,+\infty)$, τότε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ με $x\neq x_o$ θέτουμε $x=x_o\frac{h}{\alpha}$ με $h>0$, οπότε όταν το $x\to x_o$ το $h\to\alpha$ και έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{f\left(x_o\frac{h}{\alpha}\right)-f(x_o)}{x_o\frac{h}{\alpha}-x_o}\overset{(1)}{=}\frac{f(x_o)f\left(\frac{h}{\alpha}\right)-f(x_o)}{\frac{x_o(h-\alpha)}{\alpha}}=\frac{\alpha f(x_o)}{x_o}\cdot\frac{f\left(h\frac{1}{\alpha}\right)-1}{h-\alpha}\overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{\alpha f(x_o)}{x_o}\cdot\frac{f(h)f\left(\frac{1}{\alpha}\right)-1}{h-\alpha} \overset{(4)}{=} \frac{\alpha f(x_o)}{x_o}\cdot\frac{f(h)\frac{1}{f(\alpha)}-1}{h-\alpha} = \frac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}\cdot\frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{h\to\alpha}\frac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)} = \frac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}$, αφού $\frac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}$ σταθερά.
- $\lim\limits_{h\to\alpha}\frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha} \overset{(6)}{=} f'(\alpha)$

Επομένως

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{h\to\alpha}\left(\frac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}\cdot\frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}\right) =$$

$$= \lim_{h\to\alpha}\frac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}\cdot\lim_{h\to\alpha}\frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha} = \frac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}\cdot f'(\alpha)$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_o\in(0,+\infty)$ με $f'(x_o)=\frac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}\cdot f'(\alpha)$,

οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{\alpha f(x)}{x f(\alpha)}\cdot f'(\alpha)$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=\frac{\alpha f(x)}{x f(\alpha)}\cdot f'(\alpha) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)} \qquad (7)$$

**Β)** Είναι:

$$M(\alpha, f(\alpha))\in(\varepsilon) \Leftrightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha}\cdot f(\alpha)+\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{\alpha}\cdot f(\alpha) = 2\alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{2\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow f(\alpha)=\sqrt{\alpha} \qquad (8)$$

Είναι:

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha>0 \qquad (9)$$

Από τις σχέσεις (7), (8) και (9) έχουμε:

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \left(\ell n f(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}\ell n x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\ell n f(x) = \frac{1}{2}\ell n x + c \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \ell n f(x) = \ell n\sqrt{x} + c, \quad x>0 \qquad (10)$$

Για $x=\alpha$ από τη σχέση (10) έχουμε:

$$\ell n f(\alpha)=\ell n\sqrt{\alpha}+c \overset{(8)}{\Leftrightarrow} \ell n\sqrt{\alpha}=\ell n\sqrt{\alpha}+c \Leftrightarrow c=0$$

Επομένως από τη σχέση (10) έχουμε:

$$\ell n f(x)=\ell n\sqrt{x} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x}\ ,\quad x>0$$

Επειδή η συνάρτηση $f$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $0$ με $f(0)=0$, συμπεραίνουμε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x}\ ,\quad x\ge 0$$

## ΘΕΜΑ 11ο :

**Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία για κάθε $x\in R$ ικανοποιεί τη σχέση $f(\alpha)<f'(x)<f(\beta)$ (1), όπου $\alpha,\beta\in R$ με $\alpha=\beta-1>0$ (2). Να αποδείξετε ότι:**

**α) Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα.**

**β) Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f(\alpha)\cdot x$ είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f(\alpha)<\dfrac{f(\beta)}{2}$**

**γ) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $(-\beta\ ,\ \alpha)$**

**δ) Υπάρχουν $x_1\ ,\ x_2\ ,x_3\in R$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\dfrac{f(\beta)}{f'(x_3)}+\dfrac{f(\alpha)}{f'(x_2)}-2\dfrac{f(-\beta)}{f'(x_1)}=4\beta-1$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha\ ,\ \beta]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha\ ,\ \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(\xi)<f(\beta)\Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<f(\beta)\qquad (3)$$

Είναι:

$$\alpha=\beta-1\Leftrightarrow \beta-\alpha=1\qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$f(\beta)-f(\alpha)<f(\beta)\Leftrightarrow -f(\alpha)<0\Leftrightarrow f(\alpha)>0\qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (1) και (5) έχουμε:

$$f'(x)>f(\alpha)>0 \text{ για κάθε } x\in R$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

**β) 1ος τρόπος:**

Είναι:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\overset{(4)}{=}f(\beta)-f(\alpha)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\alpha)<f'(\xi)\Rightarrow f(\alpha)<f(\beta)-f(\alpha)\Rightarrow 2f(\alpha)<f(\beta)\Rightarrow f(\alpha)<\frac{f(\beta)}{2}$$

**2ος τρόπος:**

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x) = f'(x) - f(\alpha)$ (6)

Από τις σχέσεις (1) και (6) έχουμε:

$$g'(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in R$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R

Ισχύει:

$$\alpha < \beta \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(\alpha) < g(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha f(\alpha) < f(\beta) - \beta f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) + (\beta - \alpha) f(\alpha) < f(\beta) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} 2f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$$

**γ)** Είναι:

$$\alpha = \beta - 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ -\beta < -1 \end{cases} \Rightarrow -\beta < -1 < 0 < \alpha \quad (7)$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-\beta, \alpha]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-\beta, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(\alpha) - f(-\beta)}{\alpha + \beta}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\alpha) < f'(\xi_1) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{f(\alpha) - f(-\beta)}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow \alpha f(\alpha) + \beta f(\alpha) - f(\alpha) < -f(-\beta) \Leftrightarrow$$

$$\alpha f(\alpha) + (\beta - 1) f(\alpha) < -f(-\beta) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2\alpha f(\alpha) < -f(-\beta)$$

Από τις σχέσεις (5) και (7) έχουμε:

$$2\alpha f(\alpha) > 0 \quad \text{άρα} \quad -f(-\beta) > 0, \text{ οπότε } f(-\beta) < 0 \quad (8)$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\beta, \alpha]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R.
- $f(-\beta) f(\alpha) < 0$, λόγω των σχέσεων (5) και (8)

Επομένως η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-\beta, \alpha]$, άρα θα υπάρχει ένα $\rho \in (-\beta, \alpha)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$ (9)

**δ)** Είναι:

$$-\beta < \rho < \alpha < \beta$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα

$$[-\beta, \rho], \ [\rho, \alpha] \ \text{και} \ [\rho, \beta]$$

άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $x_1 \in (-\beta\,,\,\rho)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(\rho)-f(-\beta)}{\rho-(-\beta)} \overset{(9)}{\Leftrightarrow} f'(x_1)=\dfrac{-f(-\beta)}{\rho+\beta} \overset{f'(x_1)>0}{\Leftrightarrow} \rho+\beta=\dfrac{-f(-\beta)}{f'(x_1)}$
- $x_2 \in (\rho\,,\,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2)=\dfrac{f(\alpha)-f(\rho)}{\alpha-\rho} \overset{(9)}{\Leftrightarrow} f'(x_2)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha-\rho} \overset{f'(x_2)>0}{\Leftrightarrow} \alpha-\rho=\dfrac{f(\alpha)}{f'(x_2)}$
- $x_3 \in (\rho\,,\,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_3)=\dfrac{f(\beta)-f(\rho)}{\beta-\rho} \overset{(9)}{\Leftrightarrow} f'(x_3)=\dfrac{f(\beta)}{\beta-\rho} \overset{f'(x_3)>0}{\Leftrightarrow} \beta-\rho=\dfrac{f(\beta)}{f'(x_3)}$

Είναι:

$$\frac{f(\beta)}{f'(x_3)}+\frac{f(\alpha)}{f'(x_2)}-2\frac{f(-\beta)}{f'(x_1)}=(\beta-\rho)+(\alpha-\rho)+2(\rho+\beta)=\alpha+3\beta\overset{(2)}{=}4\beta-1$$

## ΘΕΜΑ 12ο :

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\left[-\frac{1}{2}\,,+\infty\right)\to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{1}{2}\,,+\infty\right)$, έχει σύνολο τιμών $f(A)=\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ και ικανοποιεί τη σχέση $\eta\mu\big(f(x)\big)=\dfrac{x}{x+1}\,,\ \ x\ge -\frac{1}{2}$ (1)**

**α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}\,,\ \ x\in\left(-\frac{1}{2}\,,+\infty\right)$**

**β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.**

**γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τις ασύμπτωτες.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2}\,,+\infty\right)$ και η συνάρτηση ημx στο R, άρα η συνάρτηση ημf(x) είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{1}{2}\,,+\infty\right)$, ως σύνθεση παραγωγισίμων.

Η συνάρτηση $\dfrac{x}{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty\,,-1)\cup(-1\,,+\infty)$, άρα παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) για κάθε $x\in\left(-\frac{1}{2}\,,+\infty\right)$ έχουμε:

$$\left[\eta\mu f(x)\right]'=\left(\frac{x}{x+1}\right)'\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x)f'(x)=\frac{(x)'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu f(x)f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x)f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\qquad(2)$$

Είναι:

$$\eta\mu^2 f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 f(x)=1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 f(x)=1-\eta\mu^2 f(x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 f(x)=1-\frac{x^2}{(x+1)^2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 f(x)=\frac{2x+1}{(x+1)^2}\qquad(3)$$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ είναι:

$$-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}, \text{ οπότε } συνf(x) > 0 \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$συν\, f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (2) και (5) έχουμε:

$$\frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} \cdot f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

**β)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, οπότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα είναι και «1 – 1», επομένως αντιστρέφεται.

Η συνάρτηση $f$ είναι «1 – 1» και έχει σύνολο τιμών $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, επομένως για κάθε $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ υπάρχει μοναδικό $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Άρα για κάθε $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η σχέση (1) γράφεται:

$$ημy = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow xημy + ημy = x \Leftrightarrow (1 - ημy)x = ημy \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{ημy}{1 - ημy} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{ημy}{1 - ημy}$$

Επομένως:

$$f^{-1} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \frac{ημx}{1 - ημx}$$

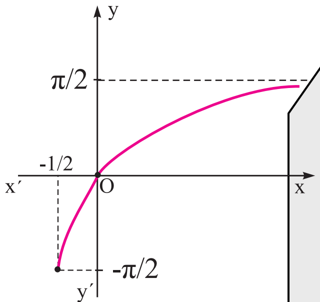
**γ)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα το σύνολο τιμών της $f$ είναι το διάστημα $f(A) = \left[f\left(-\frac{1}{2}\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ και επειδή $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

Επομένως η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(ε): y = \frac{\pi}{2}$

Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ για $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \in R$, που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

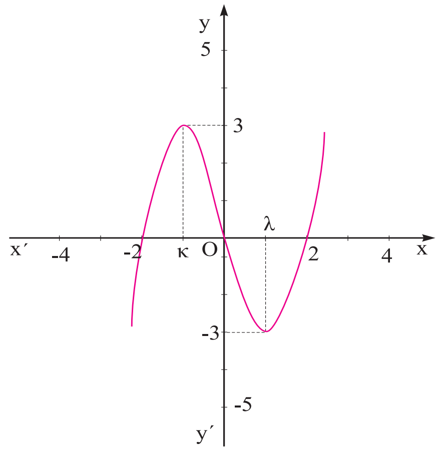
**Σημείωση:**

Η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.




## ΘΕΜΑ 13ο :

**Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, που έχει σημείο καμπής το $O(0, 0)$ και της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.**




**α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{f(x)}$**

**β) Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g$ έχει ασύμπτωτες, να τις βρείτε.**

**γ) Να μελετήσετε τη συνάρτησης $g$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση**

**δ) Αν η συνάρτηση $f$ είναι πολυωνυμική $3^{ου}$ βαθμού, τότε:**

**i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\kappa, \lambda$ και τον τύπο της συνάρτησης $f$**

**ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$ και τον άξονα $x΄x$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για να ορίζεται η συνάρτηση $g$ πρέπει και αρκεί $f(x) \neq 0$

Είναι:

$$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \ \text{ και } \ x \neq 0 \ \text{ και } \ x \neq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g$ είναι το σύνολο $A_g = R - \{-2, 0, 2\}$

**β)**
- Από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, προκύπτει ότι:
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

  Επομένως η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης $C_g$ της συνάρτησης $g$ και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

- Είναι:
  - $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=0$ και $f(x)<0$ για $x<-2$, οπότε $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για $x>-2$, οπότε $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

  Επομένως η ευθεία $x=-2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης $C_g$ της της συνάρτησης $g$ (*)

- Είναι:
  - $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για $x\in(-2,0)$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ για $x\in(0\,,\,2)$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

  Επομένως η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης $C_g$ της της συνάρτησης $g$ (*)

- Είναι:
  - $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$ και $f(x)<0$ για $x\in(0\,,\,2)$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για $x>2$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

  Επομένως η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης $C_g$ της της συνάρτησης $g$ (*)

  (*) Για την εύρεση μιας κατακόρυφης ασύμπτωτης, ως γνωστόν, αρκεί ένα τουλάχιστον από τα δύο πλευρικά όρια να είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Εδώ ο υπολογισμός και των δύο πλευρικών ορίων, σε κάθε περίπτωση, έγινε γιατί μας είναι απαραίτητα για την χάραξη της γραφικής παράστασης, που ζητείται στο επόμενο ερώτημα.

**γ)** Για κάθε $x\in A_g=\mathbb{R}-\{-2\,,\,0\,,\,2\}$ έχουμε $g'(x)=\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$ (1)

Από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $g'$, σε κάθε διάστημα που ορίζεται, έχει το αντίθετο πρόσημο από αυτό που έχει η συνάρτηση $f'$, άρα οι συναρτήσεις $g$ και $f$ έχουν αντίθετο είδος μονοτονίας σε κάθε διάστημα.

Επομένως:

- Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty\,,\,\kappa]$, άρα η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty\,,\,-2)$ και $(-2\,,\,\kappa]$
- Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\kappa\,,\,\lambda]$, άρα η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[\kappa\,,\,0)$ και $(0\,,\,\lambda]$

■ Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\lambda\,,+\infty)$, άρα η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[\lambda\,,2)$ και $(2\,,+\infty)$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

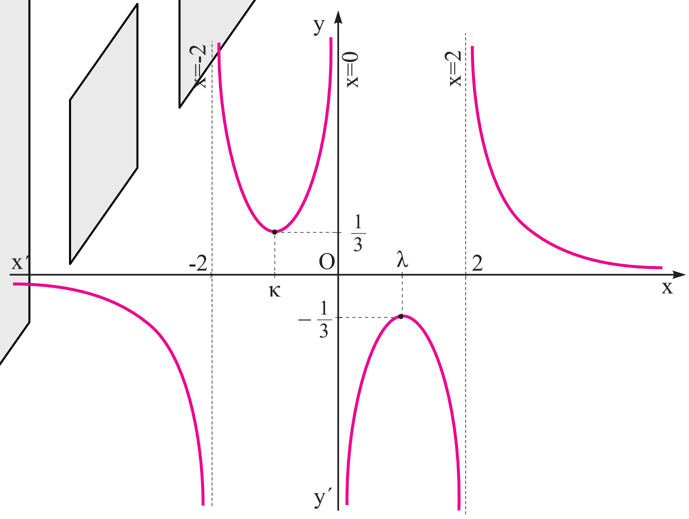
| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $\kappa$ | | $0$ | | $\lambda$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $\frac{1}{3}$ | ↗ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $-\frac{1}{3}$ | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $0$ |

τοπ. ελάχιστο τοπ. μέγιστο

♦ Η συνάρτηση $g$ στο $x_0=\kappa$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $g(\kappa)=\dfrac{1}{f(\kappa)}=\dfrac{1}{3}$

♦ Η συνάρτηση $g$ στο $x_1=\lambda$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $g(\lambda)=\dfrac{1}{f(\lambda)}=-\dfrac{1}{3}$

Η γραφική παράσταση $C_g$ της συνάρτησης $g$, είναι:




**δ)** **i)** Η συνάρτηση $f$ είναι πολυωνυμική $3^{ου}$ βαθμού και έχει τρεις ρίζες, τους αριθμούς $-2, 0, 2$, άρα είναι της μορφής:

$$f(x)=\alpha x(x+2)(x-2)=\alpha x\left(x^2-4\right)=\alpha\left(x^3-4x\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)=\alpha(3x^2-4)$$

Είναι:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \alpha\left(3x^2-4\right)=0\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Άρα:

$$\kappa=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\qquad \text{και}\qquad \lambda=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Είναι:

$$f(\kappa)=3 \Leftrightarrow f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=3 \Leftrightarrow \alpha\left(\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3-4\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)=3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\left(-\frac{8\sqrt{3}}{9}+\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)=3 \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{3}}{9}\alpha=3 \Leftrightarrow \alpha=\frac{27}{16\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha=\frac{9\sqrt{3}}{16}$$

Άρα:

$$f(x)=\frac{9\sqrt{3}}{16}\left(x^3-4x\right), \quad x \in R$$

**ii)** Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ και τον άξονα $x΄x$ είναι:

$$E=\int_{-2}^{2}\left|f(x)\right|dx=\int_{-2}^{0}f(x)\,dx-\int_{0}^{2}f(x)\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{0}\frac{9\sqrt{3}}{16}\left(x^3-4x\right)dx-\int_{0}^{2}\frac{9\sqrt{3}}{16}\left(x^3-4x\right)dx=$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{16}\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}-\frac{9\sqrt{3}}{16}\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}=$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{16}\cdot\left(0-4+8\right)-\frac{9\sqrt{3}}{16}\cdot\left(4-8-0\right)=$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{16}\cdot 4-\frac{9\sqrt{3}}{16}\cdot\left(-4\right)=\frac{8\cdot 9\sqrt{3}}{16}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

# ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

## ΘΕΜΑ 14ο :

**Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{|1-\ell nx|}{x}$ , $x>0$**

**α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**β) Αν η τετμημένη του σημείου $M\big(x\,,f(x)\big)$ μεταβάλλεται με ρυθμό 1 μ/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ του τριγώνου ΑΟΒ, όπου $A(x,0)$, $O(0,0)$, $B(0,f(x))$, τη χρονική στιγμή $t_0$ κατά την οποία είναι $x(t_0)=4$**

**γ) Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ το σημείο Μ βρίσκεται στη θέση $(1,1)$, τότε να αποδείξετε ότι:**

**i) $x(t)=t+1$**

**ii) Η συνάρτηση $E(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $[e-1,+\infty)$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για $0<x<e$ έχουμε:

$$0<x<e \overset{\ell n\uparrow}{\Rightarrow} \ell nx<\ell ne \Rightarrow \ell nx<1 \Rightarrow 1-\ell nx>0\ ,\ \text{οπότε}\ |1-\ell nx|=1-\ell nx$$

Για $x\ge e$ έχουμε:

$$x\ge e \overset{\ell n\uparrow}{\Rightarrow} \ell nx\ge \ell ne \Rightarrow \ell nx\ge 1 \Rightarrow 1-\ell nx\le 0\ ,\ \text{οπότε}\ |1-\ell nx|=\ell nx-1$$

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\ell nx}{x}, & 0<x<e\\[2mm] \dfrac{\ell nx-1}{x}, & x\ge e\end{cases}$$

Για $0<x<e$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(\frac{1-\ell nx}{x}\right)'=\frac{(1-\ell nx)'\cdot x-(1-\ell nx)\cdot(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x-(1-\ell nx)\cdot 1}{x^2}=\frac{\ell nx-2}{x^2}<0$$

Για $x>e$ η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(\frac{\ell nx-1}{x}\right)'=\frac{(\ell nx-1)'\cdot x-(\ell nx-1)\cdot(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ell nx-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{2-\ell nx}{x^2}$$

Είναι:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2-\ell nx}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2-\ell nx=0 \Leftrightarrow \ell nx=2 \Leftrightarrow x=e^2$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2-\ell nx}{x^2}<0 \Leftrightarrow 2-\ell nx<0 \Leftrightarrow \ell nx>2 \Leftrightarrow x>e^2$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ $e$ $e^2$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ ‖ $+$ $0$ $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ $0$ $\nearrow$ $e^{-2}$ $\searrow$ |
| | ο.ε. τ.μ. |

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\ell nx}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(1-\ell nx)\cdot\frac{1}{x}\right]=+\infty$, γιατί
  - $\lim\limits_{x\to0^+}(1-\ell nx)=+\infty$
  - $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ell nx-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ell nx-1)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$
- $f(e)=\frac{\ell ne-1}{e}=\frac{1-1}{e}=0$
- $f(e^2)=\frac{\ell ne^2-1}{e^2}=\frac{2\ell ne-1}{e^2}=\frac{2\cdot1-1}{e^2}=\frac{1}{e^2}=e^{-2}$

Επίσης η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Η συνάρτηση $|1-\ell nx|$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως απόλυτη τιμή της συνάρτησης $1-\ell nx$, που είναι συνεχής, ως διαφορά συνεχών και η συνάρτηση $x$ είναι συνεχής, ως πολυωνυμική, οπότε έχουμε:

- Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,e]$
- Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[e,e^2]$

- Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_3 = \left[e^2, +\infty\right)$
- Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = e$ με ελάχιστη τιμή $f(e) = 0$
- Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = e^2$ με τιμή $f(e^2) = e^{-2}$

**β)** Το εμβαδό του τριγώνου ΑΟΒ είναι:

$$E = \frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}\cdot|x|\cdot|f(x)| = \frac{1}{2}\cdot\left|x\cdot\frac{1-\ell n x}{x}\right| = \frac{|1-\ell n x|}{2}$$

Άρα:

$$E(t) = \frac{|1-\ell n x(t)|}{2}$$

Επειδή $x(t_0) = 4 > e$ το $1-\ell n x(t_0) < 0$

Άρα για $x(t) > e$ έχουμε:

$$E(t) = \frac{\ell n x(t) - 1}{2} \quad \text{και} \quad E'(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x(t)}\cdot x'(t)$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t_0$ με $x(t_0) = 4$ είναι:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x(t_0)}\cdot x'(t_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{8} \ \text{τ.μ.}/\text{sec}$$

**γ) i)** Για $t \geq 0$ έχουμε:

$$x'(t) = 1 \Leftrightarrow x(t) = t + c$$

Για $t = 0$ είναι:

$$x(0) = 0 + c \overset{x(0)=1}{\Leftrightarrow} c = 1$$

Επομένως:

$$x(t) = t + 1 \ , \quad t \geq 0$$

**ii)** Για $t \geq e-1$ έχουμε:

$$E(t) = \frac{|1-\ell n(t+1)|}{2} = \frac{\ell n(t+1) - 1}{2}$$

Για $t > e-1$ έχουμε:

$$E'(t) = \frac{1}{2(t+1)} > 0 \qquad \text{και} \qquad E''(t) = -\frac{1}{2(t+1)^2} < 0$$

Η συνάρτηση $E(t)$ είναι συνεχής στο $\left[e-1, +\infty\right)$ και $E''(t) < 0$ για κάθε $t \in (e-1, +\infty)$

άρα η συνάρτηση $E(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $[e-1,+\infty)$

## ΘΕΜΑ 15ο :

**Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ , με**

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x &, \ x\in(0\ ,\ 1] \\ e^{x-1}-1 &, \ x\in(1\ ,+\infty) \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)dt$$

**α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ με $f'(1)=1$**

**β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g**

**γ) Να υπολογίσετε τα όρια:**

**i) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ και ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$**

**δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g**

**ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(0,+\infty)$**

**στ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι κοίλη στο $\left(0\ ,\ \frac{1}{e}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{1}{e}\ ,+\infty\right)$**

## ΛΥΣΗ

**α)** • Για $x\in(0\ ,1)$ είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x\ln x-0}{x-1}=\dfrac{x\ln x}{x-1}$ , οπότε

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\ln x}{x-1}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{(x\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1^-}(\ln x+1)=1$$

• Για $x\in(1\ ,+\infty)$ είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{e^{x-1}-1-0}{x-1}=\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}$ , οπότε

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{(e^{x-1}-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x-1}(x-1)'}{1}=\lim_{x\to 1^+}e^{x-1}=e^o=1$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ με $f'(1)=1$

**β)** • Για $x\in(0\ ,1]$ είναι:

$$g(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{x} t\ln t\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{x}\left(\frac{t^2}{2}\right)'\ln t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_{\frac{1}{2}}^{x}-\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{t^2}{2}(\ln t)'dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{8}\ln\frac{1}{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}dt=\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{x}t\,dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x}=\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\ln 2$$

- Για $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$g(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} f(t)\,dt = g(1) + \int_{1}^{x} \left(e^{t-1} - 1\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\ln 2 + \int_{1}^{x} e^{t-1}(t-1)'\,dt - \int_{1}^{x} 1\,dt =$$

$$= -\frac{3}{16} + \frac{1}{8}\ln 2 + \left[\, e^{t-1} \,\right]_1^x - 1\cdot(x-1) =$$

$$= -\frac{3}{16} + \frac{1}{8}\ln 2 + e^{x-1} - e^0 - x + 1 = e^{x-1} - x - \frac{3}{16} + \frac{1}{8}\ln 2$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης $g$ είναι:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{8}\ln 2 &, \quad x \in (0\,,\,1] \\ e^{x-1} - x - \dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{8}\ln 2 &, \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

**γ)** **i)** Για $x \in (0, 1)$ είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\ln 2\right) = 0 - 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\ln 2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\ln 2$$ , γιατί

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{2x^{-2}} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(2x^{-2})'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-4x^{-3}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x^2\right) = 0$$

**ii)** Για $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{x-1} - x - \frac{3}{16} + \frac{1}{8}\ln 2\right) = +\infty$$ , γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x-1} - x\right) \overset{+\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^{x-1}}{x} - 1\right)\right] = +\infty$$, αφού

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-1}}{x} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(e^{x-1})'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x-1}(x-1)'}{1} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{e}\cdot e^x\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{x-1}}{x} - 1\right) = +\infty$

**δ)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, αφού είναι συνεχής:

- στο $(0,1)$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- στο $(1,+\infty)$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (η $e^{x-1}$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών)
- στο σημείο $x_0=1$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό από (α) ερώτημα.

Επομένως η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=\left(\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,dt\right)'=f(x)\ ,\quad x>0$$

Παρατηρούμε ότι:

- Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)=x\ln x<0$
- Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f(x)=e^{x-1}-1>0$
- Για $x=1$ είναι $f(1)=1\cdot\ln 1=0$

Άρα

- $g'(x)>0\Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$
- $g'(x)<0\Leftrightarrow x\in(0,1)$
- $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της $g$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | $g(1)$ | $\nearrow$ | |
| | | | ελάχιστο | | |

Είναι:

$$g(1)=\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\ln 2=\frac{1}{8}\ln 2-\frac{3}{16}=\frac{\ln 4-3}{16}=\frac{1}{16}\ln\frac{4}{e^3}<0\text{, αφού } 0<\frac{4}{e^3}<1$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,\ 1]$
- Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,\ +\infty)$
- Η συνάρτηση $g$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $g(1)=\dfrac{1}{16}\ln\dfrac{4}{e^3}$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g$ είναι:

$$g(\Delta)=g(\Delta_1)\cup g(\Delta_2)$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,\ 1]$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_1)=\left[g(1)\ ,\ \lim_{x\to 0^+}g(x)\right)=\left[\frac{1}{16}\ln\frac{4}{e^3}\ ,\ \frac{1}{16}+\frac{1}{8}\ln 2\right)$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_2) = \left[ g(1),\ \lim_{x\to+\infty} g(x) \right) = \left[ \frac{1}{16}\ln\frac{4}{e^3},\ +\infty \right)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g$ είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = \left[ \frac{1}{16}\ln\frac{4}{e^3},\ +\infty \right)$$

**ε)** Είναι:

- $g\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt = 0$, άρα ο αριθμός $\frac{1}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ στο διάστημα $(0, 1]$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό
- Το $0 \in g(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία ρίζα $\rho \in (1,+\infty)$, ($\rho \neq 1$, αφού $g(1) \neq 0$) και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1,+\infty)$

  Επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$

**στ)** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, αφού είναι παραγωγίσιμη:

- στο $(0,1)$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = (x\ln x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

- στο $(1,+\infty)$, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων ( η $e^{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων), με

$$f'(x) = (e^{x-1} - 1)' = e^{x-1}(x-1)' = e^{x-1}$$

- στο σημείο $x_o = 1$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό από (α) ερώτημα, με $f'(1) = 1$

Η συνάρτηση $g'$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, αφού η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με $g''(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

Επομένως

$$g''(x) = f'(x) = \begin{cases} 1+\ln x, & x \in (0, 1] \\ e^{x-1}, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

Είναι:

- $\begin{cases} g''(x) = 0 \\ x \in (0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\ln x = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-1} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow x = e^{-1}$
- $\begin{cases} g''(x) > 0 \\ x \in (0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\ln x > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x > -1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > e^{-1} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow e^{-1} < x < 1$

- $\begin{cases} g''(x)=0 \\ x\in(1,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-1}=0 \\ x>1 \end{cases}$, αδύνατη εξίσωση

- $\begin{cases} g''(x)>0 \\ x\in(1,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-1}>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1$

Το πρόσημο της $g''(x)$ καθώς και η κυρτότητα της $g$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| x | 0 | | $e^{-1}$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\cap$ | | | $\cup$ | | |

Είναι $\begin{cases} g \text{ συνεχής στο } \left(0\,,\,\dfrac{1}{e}\right] \\ g''(x)<0 \text{ στο } \left(0\,,\,\dfrac{1}{e}\right) \end{cases}$

Άρα η συνάρτηση $g$ είναι κοίλη στο διάστημα $\left(0\,,\,\dfrac{1}{e}\right]$

Είναι:

- $g''(x)>0$ στο $\left(\dfrac{1}{e}\,,\,1\right)\cup(1\,,\,+\infty)$ και
- η $C_g$ δέχεται μη κατακόρυφη εφαπτομένη στο $x_0=1$, αφού η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό

Άρα η συνάρτηση $g$ είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{e}\,,\,+\infty\right)$

## ΘΕΜΑ 16ο :

**Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- $\left(f'(x)\right)^2-2f'(x)+\dfrac{1}{x^2+1}=0$, **για κάθε $x\in R$** **(1)**
- $f'(-1)<1<f'(1)$ **(2)**
- $f(0)=1$ **(3)**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ , $x\in R$**

**β) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$**

**γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.**

**δ) Αν $h(x)=\ln f(x)$, $x\in R$, τότε :**

**i) Να αποδείξετε ότι $h'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ , $x\in R$**

**ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον**

**άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$**

**iii) Να αποδείξετε ότι $h(x) > \dfrac{f(x) - x - 1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$\left(f'(x)\right)^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2 - 2f'(x) + 1 = 1 - \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x) - 1\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \Leftrightarrow g^2(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad (4), \text{ όπου } g(x) = f'(x) - 1,\ x \in R$$

- Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\frac{x^2}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$$

και επειδή η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$.

Για $x = -1$ είναι $g(-1) = f'(-1) - 1 \overset{(2)}{<} 0$ οπότε $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

Αφού $g(x) < 0$, για κάθε $(-\infty, 0)$, από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow g(x) = -\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \overset{x<0}{\Leftrightarrow} g(x) = -\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0)$$

- Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\frac{x^2}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$$

και επειδή η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Για $x = 1$ είναι $g(1) = f'(1) - 1 \overset{(2)}{>} 0$ οπότε $g(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Αφού $g(x) > 0$, για κάθε $(0, +\infty)$, από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow g(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\left(f'(0)\right)^2 - 2f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(f'(0) - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$$

Άρα $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ , για κάθε $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2+1} + c$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0 + \sqrt{0+1} + c \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c = 0$. Άρα $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x \in R$

**β)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ (5)

**γ)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \overset{(5)}{>} 0$$

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

Επίσης η συνάρτηση $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο R, με:

$$f''(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{(x)'\sqrt{x^2+1} - x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

Είναι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή στο R

**δ) i)** Η συνάρτηση $h$ είναι παραγωγίσιμη στο R, με

$$h'(x) = \left(\ln f(x)\right)' = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \ x \in R$$

**ii)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο R και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$ είναι:

$$E = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = I_1 + I_2$$

Είναι:

- $I_1 = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$
- $I_2 = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \int_0^1 (x)'\sqrt{x^2+1}\,dx = \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx =$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx + \int_0^1 h'(x)\,dx =$$

$$= \sqrt{2} - I_2 + \left[h(x)\right]_0^1 = \sqrt{2} - I_2 + h(1) - h(0) = \sqrt{2} - I_2 + \ln f(1) - \ln f(0) =$$

$$= \sqrt{2} - I_2 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \sqrt{2} - I_2 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Είναι:

$$I_2 = \sqrt{2} - I_2 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow 2I_2 = \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right), \text{ οπότε } I_2 = \frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$$

Επομένως:

$$E = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{1+\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2} \text{ τ.μ}$$

**ii)** Θεωρώ συνάρτηση $\Phi(x) = xh(x) - f(x) + x + 1$, $x \in [0, +\infty)$

Η συνάρτηση $\Phi$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, με

$$\Phi'(x) = (x)'h(x) + xh'(x) - f'(x) + 1 = h(x) + x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 1 =$$

$$= h(x) + x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 1 = h(x) \qquad (6)$$

Είναι $h'(x) > 0$, για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

Επομένως, για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) > h(0) \Rightarrow h(x) > \ln f(0) \Rightarrow h(x) > \ln 1 \Rightarrow h(x) > 0 \qquad (7)$

Από τις σχέσεις (6) και (7) συμπεραίνουμε ότι $\Phi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Είναι:

$$\begin{cases} \Phi \text{ συνεχής στο } [0, +\infty) \\ \Phi'(x) > 0 \text{ στο } (0, +\infty) \end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση $\Phi$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι:

$$\Phi(x) > \Phi(0) \Rightarrow xh(x) - f(x) + x + 1 > 0\cdot h(0) - f(0) + 0 + 1 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$xh(x) - f(x) + x + 1 > 0 \overset{x>0}{\Rightarrow} h(x) > \frac{f(x) - x - 1}{x}$$

Δηλαδή $h(x) > \dfrac{f(x) - x - 1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

## ΘΕΜΑ 17ο :

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- **$4f''(x)(f(x))^3 = -1$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ (1)**
- **$f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ (2)**
- **$2f'(1) = f(1) = 1$ (3)**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$**

**β) Να αποδείξετε ότι $(2f(x)f'(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$**

**γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.**

**δ) Αν $f(x) = \sqrt{x}$ , $x \geq 0$, τότε:**

**i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha > 0$.**

**ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα x΄x.**

**iii) Αν ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της f έτσι, ώστε να απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του χωρίου Ω τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του είναι ίση με 4 μονάδες.**

**iv) Να βρείτε $\lambda \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο, ώστε η ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o) = 0$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$4f''(x_o)(f(x_o))^3 = -1 \Rightarrow 4f''(x_o) \cdot 0 = -1 \Rightarrow 0 = -1 ,$$

που είναι άτοπο. Άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ (4)

**β)** Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$4f''(x)(f(x))^3 = -1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 4f''(x)(f(x))^3 f'(x) = -f'(x) \Leftrightarrow$$

$$4f''(x)f'(x) = -(f(x))^{-3} f'(x) \Leftrightarrow \left[2(f'(x))^2\right]' = \left[-\frac{(f(x))^{-2}}{-2}\right]' \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$2(f'(x))^2 = \frac{1}{2(f(x))^2} + c \qquad (5)$$

Για $x = 1$ από τη σχέση (5) έχουμε:

$$2\left(f'(1)\right)^2=\frac{1}{2\left(f(1)\right)^2}+c \Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+c \Leftrightarrow c=0 \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε:

$$2\left(f'(x)\right)^2=\frac{1}{2\left(f(x)\right)^2} \Leftrightarrow 4\left(f(x)\right)^2\left(f'(x)\right)^2=1 \Leftrightarrow \left(2f(x)f'(x)\right)^2=1 \qquad (7)$$

**γ)** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=2f(x)f'(x),\ x\in(0,+\infty)$$

Από τη σχέση (7) έχουμε:

$$g^2(x)=1,\ \text{για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Από τις σχέσεις (2) και (4), έχουμε ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Άρα η $g$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $g(1)=2f(1)f'(1)=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1>0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Επομένως για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$g(x)=1 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=1 \Leftrightarrow$$

$$\left(f^2(x)\right)'=(x)' \Leftrightarrow f^2(x)=x+c_1$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$f^2(1)=1+c_1 \Leftrightarrow 1=1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$$

Άρα είναι:

$$f^2(x)=x\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

Η $f$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και από τη σχέση (4) έχουμε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η $f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $f(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Επομένως έχουμε:

$$f(x)=\sqrt{x}\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

Επειδή η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και στο $x_o=0$ ισχύει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$

Άρα είναι:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ,\ x\in(0,+\infty)\\ 0 & ,\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$$

**δ) i)** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ στο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha>0$ είναι:

$$\varepsilon : y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

Είναι:

$$f(\alpha)=\sqrt{\alpha} \quad \text{και} \quad f'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

Επομένως:

$$\varepsilon: y-\sqrt{\alpha}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(x-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon: x-2\sqrt{\alpha}\cdot y+\alpha=0 \qquad (7)$$

**ii)** Το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$, την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα $x'x$ είναι:

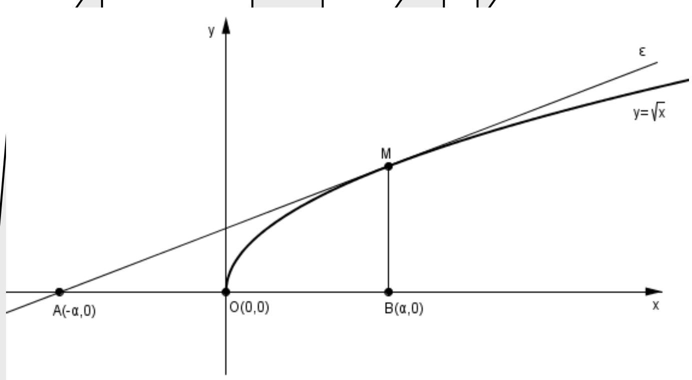
$$E=(AMB)-\int_0^\alpha f(x)dx=\frac{1}{2}(AB)(BM)-\int_0^\alpha \sqrt{x}\,dx=\frac{1}{2}(2\alpha)\sqrt{\alpha}-\int_0^\alpha x^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\alpha\sqrt{\alpha}-\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^\alpha=$$

$$=\alpha\sqrt{\alpha}-\left(\frac{2}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}-0\right)=$$

$$=\alpha\sqrt{\alpha}-\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\alpha}=\frac{1}{3}\alpha\sqrt{\alpha}$$

Δηλαδή $E=\frac{1}{3}\alpha\sqrt{\alpha}$ τ.μ.




**iii)** Έστω ότι την τυχαία χρονική στιγμή $t$ είναι:

- $x_M=\alpha(t)$ (τετμημένη του σημείου Μ) και
- $E=E(t)$ (εμβαδόν του χωρίου $\Omega$)

Τη χρονική στιγμή $t_o$ είναι:

- $x_M=\alpha(t_o)=4$ μονάδες και
- $\alpha'(t_o)=2$ μονάδες / sec,

Είναι:

$$E(t)=\frac{1}{3}\big(\alpha(t)\big)^{\frac{3}{2}} \quad \text{και} \quad E'(t)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\big(\alpha(t)\big)^{\frac{1}{2}}\alpha'(t)=\frac{1}{2}\big(\alpha(t)\big)^{\frac{1}{2}}\alpha'(t)$$

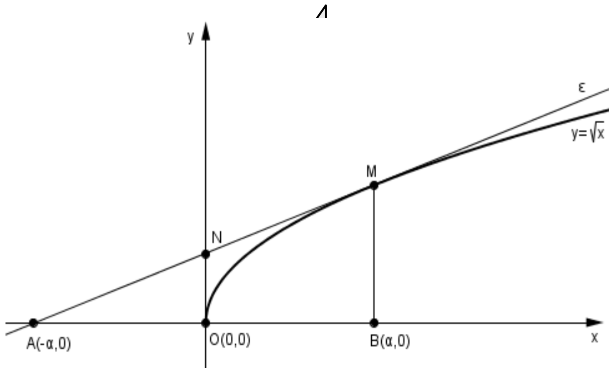
Τη χρονική στιγμή $t_o$ είναι:

$$E'(t_o)=\frac{1}{2}\big(\alpha(t_o)\big)^{\frac{1}{2}}\alpha'(t_o)=\frac{1}{2}\cdot 4^{\frac{1}{2}}\cdot 2=2 \text{ τετραγωνικές μονάδες / sec}$$

**iv)** Έστω Ν το σημείο τομής της εφαπτομένης (ε) και του άξονα y΄y.

Για $x=0$ από τη σχέση (7) έχουμε:

$y=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}$, οπότε $N\left(0\,,\,\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right)$




Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΝ είναι:

$$E_1=(OAN)=\frac{1}{2}(OA)(ON)=\frac{1}{2}\alpha\frac{\sqrt{\alpha}}{2}=\frac{1}{4}\alpha\sqrt{\alpha}$$

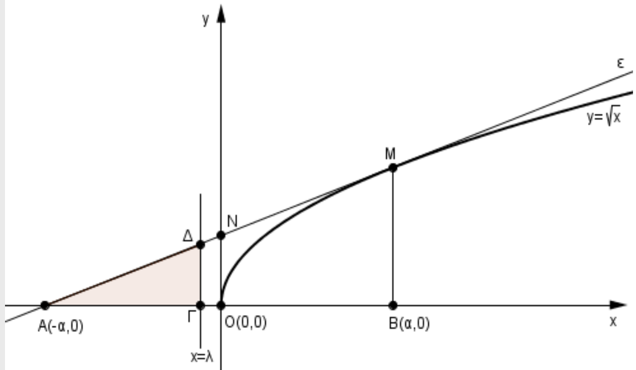
Από την προφανή σχέση $\frac{1}{4}\alpha\sqrt{\alpha}>\frac{1}{6}\alpha\sqrt{\alpha}$ προκύπτει ότι $E_1>\frac{E}{2}$, οπότε η ζητούμενη ευθεία, που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, θα έχει εξίσωση $x=\lambda$ με $\lambda\in(-\alpha\,,0)$

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $x=\lambda$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $\Gamma(\lambda\,,0)$ και την ευθεία ε στο σημείο Δ.

Για $x=\lambda$ από τη σχέση (7) έχουμε

$y=\frac{\lambda+\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$,

οπότε $\Delta\left(\lambda\,,\frac{\lambda+\alpha}{2\sqrt{\alpha}}\right)$




Είναι:

$$E_2=(A\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}(A\Gamma)(\Gamma\Delta)=$$

$$=\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)\frac{\lambda+\alpha}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{(\lambda+\alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}}$$

Έχουμε:

$$E_2=\frac{E}{2}\Leftrightarrow\frac{(\lambda+\alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\alpha\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow\frac{(\lambda+\alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{6}\alpha\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow$$

$$(\lambda+\alpha)^2=\frac{2}{3}\alpha^2\Leftrightarrow|\lambda+\alpha|=\frac{\sqrt{6}}{3}|\alpha|\overset{\lambda+\alpha>0}{\underset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}}\lambda+\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha\Leftrightarrow$$

$$\lambda=\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha-\alpha\Leftrightarrow\lambda=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-1\right)\alpha\Leftrightarrow\lambda=\frac{\sqrt{6}-3}{3}\alpha$$

## ΘΕΜΑ 18ο :

**Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f\,,g:(0\,,+\infty)\to R$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:**

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{g'(x)}$, **για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ (1)**
- $g^2(x)=g'(x)>0$ , **για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ (2)**
- $f(1)=2$
- $g(1)=-1$

**α) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g**

**β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις $C_f$ , $C_g$ και τις ευθείες με $x=1$ και $x=2$**

**γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{-\frac{1}{g(x)}}$**

**δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{2e^{x-1}}{f'(x)-1}+\dfrac{2\ln x+3}{g'(x)+1}=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(1\,,e)$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων, οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (3)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$, οπότε

$$g^2(x)=g'(x)\Rightarrow\frac{g'(x)}{g^2(x)}=1\Rightarrow\left(-\frac{1}{g(x)}\right)'=(x)'\Rightarrow-\frac{1}{g(x)}=x+c_1$$

Είναι:

$$g(1)=-1,\ \text{οπότε}\ c_1=0$$

Άρα:

$$-\frac{1}{g(x)}=x\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{x}\ ,\ x\in(0\,,+\infty) \qquad (4)$$

Η σχέση (3) λόγω των σχέσεων (2) και (4) γράφεται:

$$f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=f'(x)\Rightarrow f'(x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}f(x)=f'(x)\Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=-\frac{1}{x^2}f(x)\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)'f(x)\Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{1+\frac{1}{x}}\right)'=0\Rightarrow\frac{f(x)}{1+\frac{1}{x}}=c_2\Rightarrow f(x)=c_2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ ,\ x\in(0\,,+\infty)$$

Είναι:

$$f(1)=2,\ \text{οπότε}\ c_2=1$$

Άρα:

$$f(x)=1+\frac{1}{x}\ ,\ x\in(0\,,+\infty)$$

**β)** Στο διάστημα $[1\,,2]$ ισχύει:

$$f(x)-g(x)=1+\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{x}\right)=1+\frac{2}{x}>0\,,$$

οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)dx = [x + 2\ln x]_1^2 = 1 + 2\ln 2$$

**γ)** Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \qquad \text{και} \qquad g(x) = -\frac{1}{x}$$

οπότε το ζητούμενο όριο λαμβάνει τη μορφή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ και επειδή για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}$, αρκεί να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] \overset{+\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1, \text{ οπότε } \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$$

**δ)** Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{και} \qquad g'(x) = \frac{1}{x^2},$$

οπότε

$$f'(x) - 1 = -[g'(x)+1] = -\frac{1}{x^2} - 1 \neq 0$$

και η δοθείσα εξίσωση στο διάστημα $[1, e]$ είναι ισοδύναμη με την $2e^{x-1} - 2\ln x - 3 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = 2e^{x-1} - 2\ln x - 3\ ,\ x \in [1, e]$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$, έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1, e)$

- Η συνάρτηση $h$ είναι συνεχής στο $[1, e]$, ως άθροισμα συνεχών
- $h(1) = 2 - 3 = -1 < 0$ και $h(e) = 2e^{e-1} - 5 = 2\left(e^{e-1} - \frac{5}{2}\right) > 0$, γιατί $e > \frac{5}{2}$ και $e - 1 > 1$,

  οπότε $h(1)\cdot h(e) < 0$

Άρα η συνάρτηση $h$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Για κάθε $x \in (1, e)$ έχουμε:

$$h'(x) = 2\left(e^{x-1} - \frac{1}{x}\right) > 0$$

αφού για $1 < x < e$ είναι:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ \dfrac{1}{x}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1}>1 \\ -\dfrac{1}{x}>-1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x-1}-\frac{1}{x}>0$$

Άρα η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ θα έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,e)$

## ΘΕΜΑ 19ο :

**Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- $f''(x)-f(x)=(4x+2)e^x$, **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $f'(0)=f(0)=0$ **(2)**

**α) Να αποδείξετε ότι** $f(x)=x^2e^x\,,\ x\in\mathbb{R}$

**β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f**

**γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν** $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$ **τέτοια, ώστε** $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)=3$

**ε) Να υπολογίσετε το όριο** $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt$

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f''(x)-f(x)=(4x+2)e^x \Leftrightarrow f''(x)-f'(x)+f'(x)-f(x)=(4x+2)e^x \overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}$$

$$f''(x)e^{-x}-f'(x)e^{-x}+f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=4x+2 \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)\right)'e^{-x}+f'(x)(e^{-x})'+f'(x)e^{-x}+f(x)(e^{-x})'=\left(2x^2+2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)e^{-x}\right)'+\left(f(x)e^{-x}\right)'=\left(2x^2+2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x}\right)'=\left(2x^2+2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x}=2x^2+2x+c_1 \quad (3)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$f'(0)e^0+f(0)e^0=2\cdot0+2\cdot0+c_1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} c_1=0$$

Άρα η σχέση (3) γράφεται:

$$f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x}=2x^2+2x\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x}=2x^2+2x \overset{\cdot e^{2x}}{\Leftrightarrow} f'(x)e^x+f(x)e^x=2x^2e^{2x}+2xe^{2x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^x+f(x)(e^x)'=x^2(e^{2x})'+(x^2)'e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)e^x)'=\left(x^2e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^x=x^2e^{2x}+c_2 \quad (4)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0)e^0 = 0\cdot e^0 + c_2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} c_2 = 0$$

Άρα η σχέση (4) γράφεται:

$$f(x)e^x = x^2 e^{2x} \Leftrightarrow f(x) = x^2 e^x \ , \quad x \in R$$

**β)** • Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο R, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• Για $x \in (0\ , +\infty)$ είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}(xe^x) = +\infty$$

Άρα η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$ δεν έχει ασύμπτωτη της μορφής

$y = \lambda x + \beta$

στο $+\infty$

• Για $x \in (-\infty\ , 0)$ είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2e^x) \overset{(+\infty)\cdot 0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}} \underset{D.LH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2)'}{(e^{-x})'} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}} \underset{D.LH}{\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{(2x)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}(2e^x) = 2\cdot 0 = 0 \qquad (5)$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης $f$ στο $-\infty$

**γ)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$$

Είναι:

○ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 0$

○ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(x+2)e^x = 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $4e^{-2}$ | ↘ | 0 | ↗ | |
| | | | τ. μ. | | ο. ε. | | |

Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[0\ , +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2\ , 0]$

Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -2$ με τιμή $f(-2) = 4e^{-2}$ και ολικό ελάχιστο στο $x_2 = 0$ με ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$, αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, (σχέση (5))

**δ)** Η συνάρτηση $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε δύο διαστήματα, στα $[-1\ ,\ 0]$ και $[0\ ,\ 1]$, οπότε θα υπάρχουν:

- $\xi_1 \in (-1\ ,\ 0)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi_1) = \dfrac{f'(0)-f'(-1)}{0-(-1)} = \dfrac{0-(-1)\cdot 1\cdot e^{-1}}{1} = e^{-1}$
- $\xi_2 \in (0\ ,\ 1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi_2) = \dfrac{f'(1)-f'(0)}{1-0} = \dfrac{1\cdot 3\cdot e-0}{1} = 3e$

Άρα έχουμε:

$$f''(\xi_1)f''(\xi_2) = e^{-1}\cdot 3e \Leftrightarrow f''(\xi_1)f''(\xi_2) = 3$$

**ε)** Για $t\in[x-1\ ,\ x]$ με $x<-2$ έχουμε:

$$x-1\le t\le x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x-1)\le f(t)\le f(x)$$

Επομένως:

$$\int_{x-1}^{x} f(x-1)dt \le \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le \int_{x-1}^{x} f(x)dt \Leftrightarrow$$

$$f(x-1)\int_{x-1}^{x} 1dt \le \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le f(x)\int_{x-1}^{x} 1dt \Leftrightarrow$$

$$f(x-1)\cdot\big(x-(x-1)\big) \le \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le f(x)\cdot\big(x-(x-1)\big) \Leftrightarrow$$

$$f(x-1) \le \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le f(x)$$

Για $x\in(-\infty\ ,\ 0)$ είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ , (σχέση (5))
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x-1) \overset{x-1=t}{=} \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0$ , (σχέση (5))

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{x-1}^{x} f(t)dt = 0$

## ΘΕΜΑ 20ο :

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0\ ,+\infty)\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:**

$$\int_1^x f(t)dt + x\ln\left(\frac{x}{4}\right) - x + 1 + 2\ln 2 = \int_1^x\left(\int_1^u \frac{f(t)}{t+1}dt\right)du \ , \ x>0 \quad (1)$$

**α) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη με $\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$ , $x>0$ και να βρείτε στη συνέχεια τον τύπο της $f$**

**β) Αν $f(x) = (x+1)\ln\frac{x+1}{x}$ , $x>0$, τότε:**

**i) Να μελετήσετε την $f$ ως προς τη μονοτονία, να βρείτε τις ασύμπτωτες της $C_f$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$**

**ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x+1 = xe^{\frac{2012}{x+1}}$ , $x>0$ έχει μία ακριβώς θετική ρίζα**

**iii) Να αποδείξετε ότι $f(x) + 2\ln 2 \ge 2f\left(\frac{x+1}{2}\right)$, $x>0$**

**iv) Να αποδείξετε ότι $\int_x^{2012} tf(t)dt > x\int_x^{2012} f(t)dt$ , $x\in(0\ ,\ 2012)$**

**ΛΥΣΗ**

**α)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$, $x\in(0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη με $\left(\int_1^x f(t)dt\right)' = f(x)$, $x>0$.

Η συνάρτηση $\frac{f(t)}{t+1}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών, άρα η συνάρτηση $g(u) = \int_1^u \frac{f(t)}{t+1}dt$ , $u>0$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(u) = \left(\int_1^u \frac{f(t)}{t+1}dt\right)' = \frac{f(x)}{x+1}$ , $x>0$.

Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη, άρα η συνάρτηση $\int_1^x g(u)du$, $x\in(0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη με $\left(\int_1^x g(u)du\right)' = g(x)$ , $x>0$.

Επομένως τα μέλη της (1) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\left(\int_1^x f(t)dt + x\ln\left(\frac{x}{4}\right) - x + 1 + 2\ln 2\right)' = \left(\int_1^x g(u)du\right)' \text{, οπότε}$$

$$f(x) + \ln\left(\frac{x}{4}\right) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = -\ln\left(\frac{x}{4}\right) + g(x) \ , \ x>0 \quad (2)$$

Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + g'(x) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{f(x)}{x+1} \Leftrightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{x+1} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+1)f'(x)-f(x)}{x+1} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{(x+1)f'(x)-f(x)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' = \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' = \left(\ln(x+1)-\ln x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x+1} = \ln(x+1)-\ln x + c \;,\; c\in R \;,\; x>0 \qquad (3)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε $f(1) = -\ln\left(\frac{1}{4}\right)+g(1) \Leftrightarrow f(1)=\ln 4+0 \Leftrightarrow f(1)=2\ln 2$

και από τη σχέση (3) έχουμε $\frac{f(1)}{2}=\ln 2+c \Leftrightarrow \frac{2\ln 2}{2}=\ln 2+c\Leftrightarrow c=0$

Άρα

$$\frac{f(x)}{x+1}=\ln(x+1)-\ln x \;,\; x>0 \Leftrightarrow f(x)=(x+1)\ln\frac{x+1}{x} \;,\; x>0$$

**β) i)** Η $f$ είναι παραγωγίμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x) = \left((x+1)\ln\frac{x+1}{x}\right)' = (x+1)'\ln\frac{x+1}{x} + (x+1)\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)' =$$

$$=\ln\frac{x+1}{x}+(x+1)\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)' = \ln\frac{x+1}{x}+x\cdot\frac{(x+1)'x-(x+1)(x)'}{x^2}=$$

$$=\ln\frac{x+1}{x}+\frac{x-(x+1)}{x}=\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x} \;,\; x>0$$

Η συνάρτηση $g(t)=\ln t$ σε κάθε διάστημα $[x\,,\,x+1]$, $x>0$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. , άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x\,,\,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(x+1)-g(x)}{(x+1)-x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi}=\ln(x+1)-\ln x \Leftrightarrow \frac{1}{\xi}=\ln\frac{x+1}{x} \qquad (4)$$

Είναι:

$$0<x<\xi<x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{\xi} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}<0 \qquad (5)$$

Λόγω της (5) είναι $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left((x+1)\cdot\ln\frac{x+1}{x}\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty \;,\; t=\frac{x+1}{x} \text{ και } \lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left[(x+1)\cdot\frac{1}{x}\right]=+\infty$$

Άρα η ευθεία $x=0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$.

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left((x+1)\cdot\ln\frac{x+1}{x}\right) \overset{(+\infty)\cdot 0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x+1}} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x+1}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x+1}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{(x+1)'x-(x+1)(x)'}{x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-(x+1)}{x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$.

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$ άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\ ,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = (1\ ,+\infty)$

**ii)** Για $x>0$ η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$x+1 = x\cdot e^{\frac{2012}{x+1}} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = e^{\frac{2012}{x+1}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln e^{\frac{2012}{x+1}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{2012}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$(x+1)\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012 \qquad (6)$$

Η $f$ είναι συνάρτηση $1-1$, ως γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$ και $2012\in f(A)$, άρα η εξίσωση (6) έχει μία ακριβώς λύση ως προς $x$ στο $A=(0,+\infty)$.

Δηλαδή η εξίσωση $x+1 = x\cdot e^{\frac{2012}{x+1}}$ , $x>0$ έχει μία ακριβώς θετική ρίζα.

**iii) 1ος τρόπος: (ανισότητα Jensen)** $f(x)+2\ln 2 \geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x)+f(1) \geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \qquad (7)$

που ισχύει για κάθε $x>0$, γιατί η $f$ είναι κυρτή . Πράγματι:

Για $x=1$ η (7) ισχύει ως ισότητα.

Για $x>1$ η $f$ στα διαστήματα $\left[1\ ,\ \frac{x+1}{2}\right]$ και $\left[\frac{x+1}{2},\ x\right]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. , άρα υπάρχουν $\xi_1\in\left(1\ ,\ \frac{x+1}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{x+1}{2}\ ,\ x\right)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{x+1}{2}-1} = \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{x-1}{2}} \qquad \text{και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{x-\frac{x+1}{2}}=\frac{f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}}$$

Για κάθε $x>0$ η $f'$ είναι παραγωγίμη με $f''(x)=\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$, άρα η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Είναι:

$$0<\xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{x-1}{2}}<\frac{f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}} \overset{x-1>0}{\Leftrightarrow}$$

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)<f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)+f(1)>2f\left(\frac{x+1}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)+2\ln 2>2f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Ομοίως αν $0<x<1$

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι:

$$f(x)+2\ln 2\geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right),\ \text{για κάθε } x>0$$

**$2^{ος}$ τρόπος (με τη βοήθεια ακρότατου)**

**Υπόδειξη:** αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-2f\left(\frac{x+1}{2}\right)+2\ln 2,\ x>0 \ \text{έχει ελάχιστο το } 0.$$

**iv) $1^{ος}$ τρόπος: (με τη βοήθεια της μονοτονίας)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\int_x^{2012} t f(t)dt - x\int_x^{2012} f(t)dt=-\int_{2012}^{x} t f(t)dt + x\int_{2012}^{x} f(t)dt\ ,\ \ x\in(0,\,2012]$$

Η συνάρτηση $h$ είναι παραγωγίσιμη γιατί οι συναρτήσεις $f(t)$, $tf(t)$ είναι συνεχείς, με

$$h'(x)=\left(-\int_{2012}^{x} tf(t)dt + x\int_{2012}^{x} f(t)dt\right)'=-xf(x)+\int_{2012}^{x} f(t)dt+xf(x)=\int_{2012}^{x} f(t)dt\ ,\ \ x\in(0,\,2012]$$

Για κάθε $x\in(0,\,2012]$ είναι:

$$h''(x)=\left(\int_{2012}^{x} f(t)dt\right)'=f(x)>0$$

αφού το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f$ είναι το $f(A)=(1,+\infty)$

Άρα η συνάρτηση $h'$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,\,2012]$, οπότε

για $0<x<2012$ ισχύει $h'(x)<h'(2012)\overset{h'(2012)=0}{\Leftrightarrow} h'(x)<0$

Έχουμε:

$$\begin{cases} h \text{ συνεχής στο } (0\,,\,2012] \\ h'(x) < 0 \quad \text{στο} \quad (0\,,\,2012) \end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\,,\,2012]$

Επομένως για κάθε $x \in (0\,,\,2012)$ ισχύει:

$$h(x) > h(2012) = 0 \Rightarrow -\int_{2012}^{x} tf(t)dt + x\int_{2012}^{x} f(t)dt > 0 \Rightarrow$$

$$\int_{x}^{2012} tf(t)dt - x\int_{x}^{2012} f(t)dt > 0 \Rightarrow \int_{x}^{2012} tf(t)dt > x\int_{x}^{2012} f(t)dt$$

**$2^{ος}$ τρόπος**

Για κάθε $x \in (0\,,\,2012)$ είναι :

$$\int_{x}^{2012} tf(t)dt > x\int_{x}^{2012} f(t)dt \Leftrightarrow \int_{x}^{2012} tf(t)dt - x\int_{x}^{2012} f(t)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x}^{2012} tf(t)dt - \int_{x}^{2012} xf(t)dt > 0 \Leftrightarrow \int_{x}^{2012} (t-x)f(t)dt > 0$$

που ισχύει γιατί η συνάρτηση $(t-x)f(t)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x\,,\,2012]$, αφού $x \in (0,\,2012)$ και $(t-x)f(t) \geq 0$, για κάθε $t \in [x\,,\,2012]$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $t = x$, άρα $\int_{x}^{2012} (t-x)f(t)dt > 0$

## ΘΕΜΑ 21ο :

**Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- **$f\big(f'(x)\big) + f(x) = 0$ , για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ (1)**
- **$f'(x) > 0$ , για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ (2)**
- **$f(1) = 0$ (3)**

**α) i) Να βρείτε το $f'(1)$**

**ii) Να αποδείξετε ότι $f'\big(f'(x)\big) = x$, $x \in (0\,,+\infty)$**

**β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x \in (0\,,+\infty)$**

**γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε:y=x+κ έχει δυο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f**

**δ) Αν $\kappa < -1$ και $A\big(\alpha, f(\alpha)\big)$, $B\big(\beta, f(\beta)\big)$ με $\alpha < \beta$, τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\alpha\beta(\ln\xi - 1) = \kappa\xi^2$**

## ΛΥΣΗ

**α) i)** Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\,,+\infty)$, άρα είναι και «1−1»

Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε:

$$f\big(f'(1)\big) + f(1) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} f\big(f'(1)\big) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$f\big(f'(1)\big)=f(1)\overset{f:«1-1»}{\Rightarrow}f'(1)=1 \qquad (4)$$

**ii)** Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου x το $f'(x)$ έχουμε:

$$f\Big(f'\big(f'(x)\big)\Big)+f\big(f'(x)\big)=0\overset{+f(x)}{\Rightarrow}$$

$$f\Big(f'\big(f'(x)\big)\Big)+\underbrace{f\big(f'(x)\big)+f(x)}_{=0}=f(x)\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$f\Big(f'\big(f'(x)\big)\Big)=f(x)\overset{f:«1-1»}{\Rightarrow}f'\big(f'(x)\big)=x\ ,\ x\in(0,+\infty) \qquad (5)$$

**β)** Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση $f'$ είναι

παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε και η συνάρτηση $f\big(f'(x)\big)$ είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων. Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$f\big(f'(x)\big)+f(x)=0\Rightarrow\Big(f\big(f'(x)\big)+f(x)\Big)'=(0)'\Rightarrow$$

$$f'\big(f'(x)\big)\cdot f''(x)+f'(x)=0\overset{(5)}{\Rightarrow}xf''(x)+f'(x)=0\Rightarrow$$

$$\big(xf'(x)\big)'=0\Rightarrow xf'(x)=c_1\ ,\ x\in(0,+\infty)\ \text{και}\ c_1\in\mathbb{R} \qquad (6)$$

Από τη σχέση (6) για $x=1$ έχουμε:

$$1\cdot f'(1)=c_1\overset{(4)}{\Leftrightarrow}c_1=1$$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$xf'(x)=1\overset{\div x>0}{\Leftrightarrow}f'(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow f'(x)=(\ln x)'\Leftrightarrow f(x)=\ln x+c_2\ ,\ c_2\in\mathbb{R} \qquad (7)$$

Από τη σχέση (7) για $x=1$ έχουμε:

$$f(1)=\ln 1+c_2\overset{(3)}{\Leftrightarrow}c_2=0$$

Άρα:

$$f(x)=\ln x\ ,\ x\in(0,+\infty) \qquad (8)$$

**γ)** Αρκεί να βρούμε για ποιες τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $\ln x=x+\kappa$ έχει δύο λύσεις.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x-x-\kappa\ ,\ x\in(0,+\infty)$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

Είναι:

- $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$
- $g'(x)>0\Leftrightarrow x\in(0,1)$
- $g'(x)<0\Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | ‖ | $\nearrow$ | $-1-\kappa$ | $\searrow$ | |
| | | | μέγιστο | | |

Είναι:

$$g(1)=\ln 1-1-\kappa=-1-\kappa$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,\,1]$
- Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,\,+\infty)$
- Η συνάρτηση $g$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=1$ με μέγιστη τιμή $g(1)=-1-\kappa$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-x-\kappa)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x-x-\kappa)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x\left(\dfrac{\ln x}{x}-1-\dfrac{\kappa}{x}\right)\right]=-\infty$, γιατί
  - $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$
  - $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}-1-\dfrac{\kappa}{x}\right)=0-1-0=-1$
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g$ είναι:

$$g(\Delta)=g(\Delta_1)\cup g(\Delta_2)$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,\,1]$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to 0^+} g(x),\, g(1)\right]=(-\infty,\,-1-\kappa]$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,\,+\infty)$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to +\infty} g(x),\, g(1)\right]=(-\infty,\,-1-\kappa]$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g$ είναι:

$$g(\Delta)=g(\Delta_1)\cup g(\Delta_2)=(-\infty,\,-1-\kappa]$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, η συνάρτηση $g$ λαμβάνει κάθε τιμή του συνόλου τιμών της, εκτός από την μέγιστη, ακριβώς δύο φορές.

Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δύο ρίζες σε κάθε περίπτωση που η μέγιστη τιμή της είναι θετική, δηλαδή όταν $-1-\kappa>0$ που σημαίνει ότι $\kappa<-1$

**δ) 1^ος^ τρόπος:**

Αν $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ είναι τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της $f$ με την ευθεία $y = x + \kappa$ με $\kappa < -1$, τότε έχουμε:

- $f(\alpha) = \alpha + \kappa \overset{(8)}{\Rightarrow} \ln\alpha = \alpha + \kappa \Rightarrow \dfrac{\ln\alpha}{\alpha} = 1 + \dfrac{\kappa}{\alpha}$
- $f(\beta) = \beta + \kappa \overset{(8)}{\Rightarrow} \ln\beta = \beta + \kappa \Rightarrow \dfrac{\ln\beta}{\beta} = 1 + \dfrac{\kappa}{\beta}$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$\frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{\ln\beta}{\beta} = \left(1 + \frac{\kappa}{\alpha}\right) - \left(1 + \frac{\kappa}{\beta}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{\ln\beta}{\beta} = \frac{\kappa}{\alpha} - \frac{\kappa}{\beta} \Rightarrow \frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{\ln\beta}{\beta} = \kappa\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \Rightarrow$$

$$\frac{\ln\beta}{\beta} - \frac{\ln\alpha}{\alpha} = -\kappa\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{\dfrac{\ln\beta}{\beta} - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha}}{\beta - \alpha} = -\frac{\kappa}{\alpha\beta} \qquad (9)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$

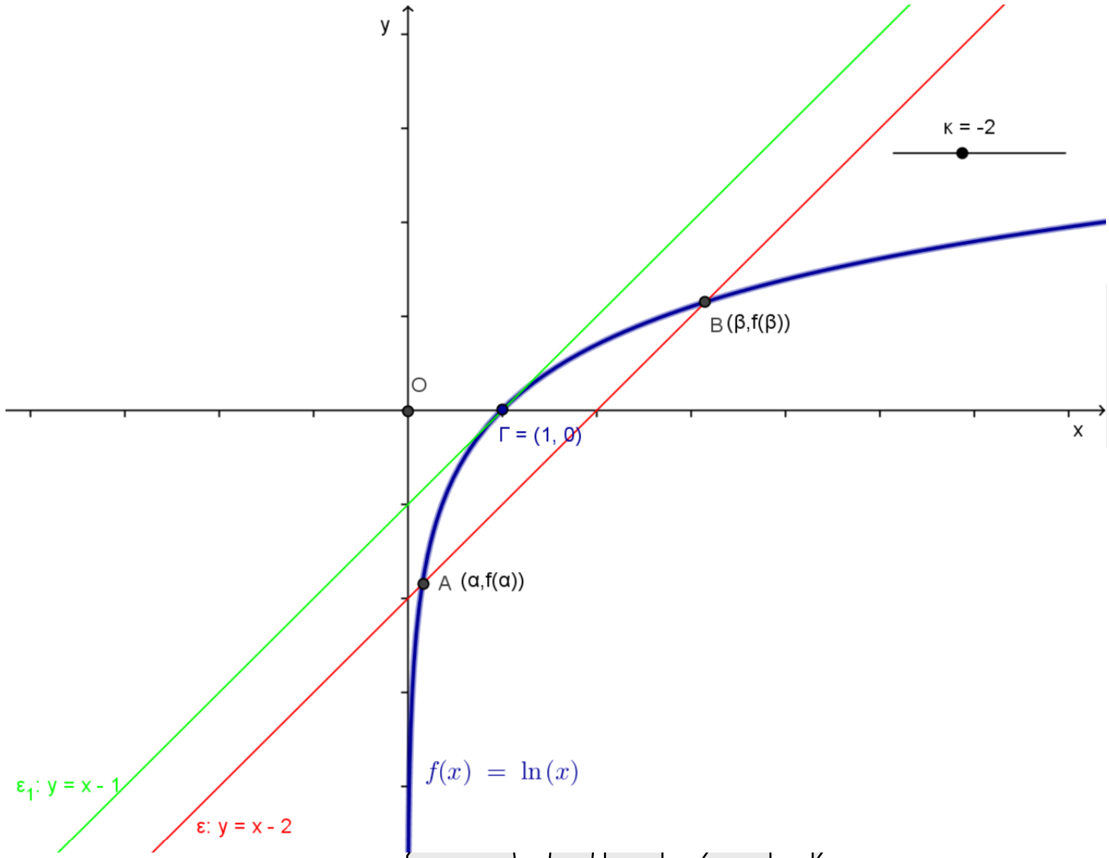
Η συνάρτηση $h$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \qquad (10)$$

Η συνάρτηση $h$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$h'(\xi) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \overset{(10)}{\Rightarrow} \frac{1 - \ln\xi}{\xi^2} = \frac{\dfrac{\ln\beta}{\beta} - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha}}{\beta - \alpha} \overset{(9)}{\Rightarrow}$$

$$= \frac{1 - \ln\xi}{\xi^2} = -\frac{\kappa}{\alpha\beta} \Rightarrow \alpha\beta(1 - \ln\xi) = -\kappa\xi^2 \Rightarrow \alpha\beta(\ln\xi - 1) = \kappa\xi^2$$




**2$^{ος}$ τρόπος:**

Αν $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ είναι τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της $f$ με την ευθεία $y = x + \kappa$ με $\kappa < -1$, τότε έχουμε:

- $f(\alpha) = \alpha + \kappa \overset{(8)}{\Rightarrow} \ln\alpha = \alpha + \kappa$, με $0 < \alpha < 1$
- $f(\beta) = \beta + \kappa \overset{(8)}{\Rightarrow} \ln\beta = \beta + \kappa$, με $\beta > 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha\beta(\ln x - 1) - \kappa x^2$, $x \in [\alpha, \beta]$

- ♦ Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ ○ $\varphi(\alpha) = \alpha\beta(\ln\alpha - 1) - \kappa\alpha^2 \overset{\ln\alpha = \alpha+\kappa}{=} \alpha\beta(\alpha + \kappa - 1) - \kappa\alpha^2 =$

  $= \alpha(\alpha\beta + \beta\kappa - \beta - \kappa\alpha) = \alpha\left[\underbrace{\beta(\alpha - 1)}_{<0} + \underbrace{\kappa(\beta - \alpha)}_{<0}\right] < 0$

  ○ $\varphi(\beta) = \alpha\beta(\ln\beta - 1) - \kappa\beta^2 \overset{\ln\beta = \beta+\kappa}{=} \alpha\beta(\beta + \kappa - 1) - \kappa\beta^2 =$

  $= \beta(\alpha\beta + \alpha\kappa - \alpha - \kappa\beta) = \beta\left[\underbrace{\alpha(\beta - 1)}_{>0} + \underbrace{\kappa(\alpha - \beta)}_{>0}\right] > 0$

  οπότε $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) < 0$

Η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\varphi(\xi)=0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\ln\xi-1)-\kappa\xi^2=0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\ln\xi-1)=\kappa\xi^2$$

## ΘΕΜΑ 22ο :

**Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$, με:**

- $\mathbf{f(x)=xe^x+\alpha}$
- $\mathbf{g(x)=-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+\beta, \quad \alpha, \beta \in R}$

**Αν οι γραφικές παραστάσεις $C_f$, $C_g$ των συναρτήσεων $f$, $g$ αντίστοιχα δέχονται, σε κοινό τους σημείο, κοινή εφαπτομένη (ε), που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε:**

**α) Να αποδείξετε ότι:**

$$\alpha=0, \quad \beta=-\frac{3}{2} \text{ και η κοινή εφαπτομένη (ε) είναι η ευθεία με εξίσωση } y=x$$

**β) Να βρείτε το εμβαδόν $E_1$ του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της**
**συνάρτησης $f$, την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x=t$, $t>0$**

**γ) Να βρείτε το εμβαδόν $E_2$ του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_g$ της συνάρτησης $g$, την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x=t$, $t>0$**

**δ) Να αποδείξετε ότι $E_1(t)<E_2(t)+te^t$ για κάθε $t>0$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Οι γραφικές παραστάσεις $C_f$ και $C_g$ των συναρτήσεων $f$ και $g$ αντίστοιχα δέχονται κοινή εφαπτομένη (ε), σε κοινό τους σημείο $M(x_0, y_0)$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0)=y_0 \\ f'(x_0)=g'(x_0)=\lambda \end{cases}, \quad \left(\text{όπου } \lambda \text{ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)}\right)$$

Η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda x$

Άρα:

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0)=\lambda x_0 & (1) \\ f'(x_0)=g'(x_0)=\lambda & (2) \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις $f$ και $g$ είναι παραγωγίσιμες στο $R$, με:

- $f'(x)=(xe^x+\alpha)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x, \quad x\in R$
- $g'(x)=\left(-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+\beta\right)'=-e^{2x}+2e^x=e^x(2-e^x), \quad x\in R$

Για $x=x_0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x_0)=g'(x_0) \Leftrightarrow (x_0+1)e^{x_0}=e^{x_0}(2-e^{x_0}) \Leftrightarrow x_0+1=2-e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0}+x_0-1=0 \quad (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=e^x+x-1, \quad x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$h'(x)=(e^x+x-1)'=e^x+1>0$$

Άρα η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $R$, οπότε είναι και «1 – 1»

Η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται:

$$h(x_0) = h(0) \overset{«1-1»}{\Leftrightarrow} x_0 = 0$$

Για $x_0 = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

- $f(0) = \lambda \cdot 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $g(0) = \lambda \cdot 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^0 + 2e^0 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = -\frac{3}{2}$

Για $x_0 = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

- $f'(0) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = (0+1)e^0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Άρα η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης (ε) είναι: $y = x$

**β)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

- $f'(x) = (x+1)e^x$
- $f''(x) = \left((x+1)e^x\right)' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

Είναι:

$$f''(x) = (x+2)e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in [0,+\infty) \subseteq (-2,+\infty)$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση $C_f$ βρίσκεται από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = x$ και «πάνω», δηλαδή ισχύει:

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0,+\infty)$$

με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 0$ (τετμημένη του σημείου επαφής)

Επομένως το εμβαδόν $E_1$ του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, $t > 0$, είναι:

$$E_1(t) = \int_0^t \left(f(x) - x\right)dx = \int_0^t (xe^x - x)dx = \int_0^t xe^x dx - \int_0^t x dx = \int_0^t x(e^x)' dx - \int_0^t x dx =$$

$$= \left[xe^x\right]_0^t - \int_0^t (x)' e^x dx - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^t = te^t - \int_0^t e^x dx - \frac{1}{2}t^2 =$$

$$= te^t - e^t + 1 - \frac{1}{2}t^2 = te^t - e^t - \frac{1}{2}t^2 + 1 \;,\quad t > 0$$

**γ)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

- $g'(x) = e^x(2 - e^x) = -e^{2x} + 2e^x$
- $g''(x) = \left(-e^{2x} + 2e^x\right)' = -2e^{2x} + 2e^x = 2e^x(1 - e^x)$

Είναι:

$$g''(x) = 2e^x(1 - e^x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty)$$

Επίσης η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα είναι κοίλη στο διάστημα $[0,+\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση $C_g$ βρίσκεται από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = x$ και «κάτω», δηλαδή ισχύει:

$$g(x) \leq x \Leftrightarrow g(x) - x \leq 0 \text{ για κάθε } x \in [0,+\infty)$$

με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x=0$ (τετμημένη του σημείου επαφής)

Επομένως το εμβαδόν $E_2$ του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_g$ της συνάρτησης $g$, την ευθεία $(\varepsilon)$ και την ευθεία με εξίσωση $x=t$, $t>0$, είναι:

$$E_2(t)=\int_0^t \big(x-g(x)\big)dx=\int_0^t x\,dx-\int_0^t g(x)\,dx=\frac{1}{2}\big[x^2\big]_0^t-\int_0^t\left(-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x-\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}\big[e^{2x}\big]_0^t-2\big[e^x\big]_0^t+\frac{3}{2}(t-0)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}\left(e^{2t}-1\right)-2\left(e^t-1\right)+\frac{3}{2}t=$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}-2e^t+2+\frac{3}{2}t=\frac{1}{4}e^{2t}-2e^t+\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{7}{4},\quad t>0$$

**δ)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $t>0$ είναι:

$$E_1(t)<E_2(t)+te^t \Leftrightarrow$$

$$te^t-e^t-\frac{1}{2}t^2+1<\frac{1}{4}e^{2t}-2e^t+\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{7}{4}+te^t$$

$$e^t-\frac{1}{4}e^{2t}-t^2-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}<0\ ,\quad t>0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Phi(t)=e^t-\frac{1}{4}e^{2t}-t^2-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}\ ,\quad t\ge 0$$

Για κάθε $t>0$ είναι:

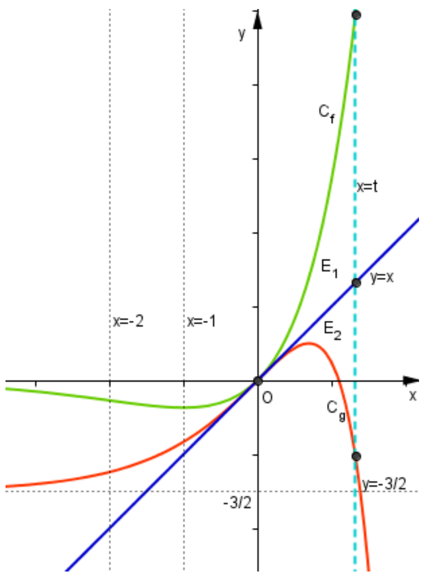
- $\Phi'(t)=e^t-\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{3}{2}$
- $\Phi''(t)=\left(e^t-\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{3}{2}\right)'=e^t-e^{2t}-2=e^t(1-e^t)-2$

Είναι:

$$\Phi''(t)=e^t\underbrace{(1-e^t)}_{<0}-2<0\ ,\ \text{για κάθε } t>0$$

Αφού για:

$$t>0\Leftrightarrow e^t>e^0\Leftrightarrow e^t>1\Leftrightarrow 1-e^t<0$$




Η συνάρτηση $\Phi$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση $\Phi'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Επομένως για κάθε $t>0$ είναι:

$$t>0\overset{\Phi'\downarrow}{\Rightarrow}\Phi'(t)<\Phi'(0)$$

Όμως

$$\Phi'(0)=1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1<0$$

Άρα:

$$\Phi'(t)<0\ ,\quad t>0$$

Επειδή η συνάρτηση $\Phi$ είναι συνεχής στο $\left[0\,,+\infty\right)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\Phi$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,+\infty\right)$

Επομένως για κάθε $t>0$ είναι:

$$t>0 \overset{\Phi\downarrow}{\Rightarrow} \Phi(t)<\Phi(0)$$

Όμως

$$\Phi(0)=e^0-\frac{1}{4}e^0-\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=0$$

Άρα:

$$\Phi(t)<0\ ,\ t>0$$

Δηλαδή:

$$E_1(t)<E_2(t)+t\cdot e^t\ ,\ t>0$$

## ΘΕΜΑ 23ο :

**α) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$, $\alpha>0$ με $f(\alpha-x)+f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,\alpha]$**

**Να αποδείξετε ότι** $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{f(x)}{f(\alpha-x)+f(x)}dx=\int_0^\alpha \frac{f(\alpha-x)}{f(\alpha-x)+f(x)}dx \quad (1)$

**β) Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, τότε:**

**i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα** $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$

**ii) Αν επιπλέον $g$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $g(x)>0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει η σχέση $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g'(x)$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (1), τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $2g'(\xi)=g(\xi)$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους θέτουμε $x=\alpha-u$ , οπότε $\alpha-x=u$ και $dx=-du$

Για $x=0$ είναι $u=\alpha$ και για $x=\alpha$ είναι $u=0$

Έχουμε:

$$\int_0^\alpha \frac{f(x)}{f(\alpha-x)+f(x)}dx=\int_\alpha^0\frac{f(\alpha-u)}{f(u)+f(\alpha-u)}(-du)=-\int_\alpha^0\frac{f(\alpha-u)}{f(\alpha-u)+f(u)}du=$$

$$=\int_0^{\alpha}\frac{f(\alpha-u)}{f(\alpha-u)+f(u)}du=\int_0^{\alpha}\frac{f(\alpha-x)}{f(\alpha-x)+f(x)}dx$$

**β) i)** Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu\, x$, $x\in\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Επομένως, για $f(x)=\sigma\upsilon\nu\, x$ και $\alpha=\frac{\pi}{2}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu x}dx\Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x+\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu\, x}{\eta\mu\, x+\sigma\upsilon\nu x}dx$$

Θέτουμε:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x+\sigma\upsilon\nu\, x}dx \quad \text{και} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu\, x}{\eta\mu\, x+\sigma\upsilon\nu\, x}dx$$

Είναι:

- $I=J$ και
- $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x+\sigma\upsilon\nu\, x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\, x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\, x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$

Άρα $2I=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{4}$, δηλαδή

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x+\sigma\upsilon\nu\, x}dx=\frac{\pi}{4}$$

**ii)** Οι συναρτήσεις $f$, $g$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$, με

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f'(x)g'(x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (3)$$

Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $f'(x) = -\eta\mu x$, οπότε η σχέση (3) γράφεται:

$$(-\eta\mu x)\cdot g(x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot g'(x) = (-\eta\mu x)\cdot g'(x) \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)\cdot g'(x) = \eta\mu x \cdot g(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (4)$$

Είναι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g'(x)}{g(x)}dx \overset{(4)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}dx = \frac{\pi}{4}$$

Επομένως έχουμε:

$$\left[\ln g(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \ln g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln g(0) = \frac{\pi}{4} \qquad (5)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \ln g(x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η συνάρτηση $h$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, με $h'(x) = \left(\ln g(x)\right)' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Επομένως η συνάρτηση $h$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ , οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \Leftrightarrow \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\ln g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln g(0)}{\frac{\pi}{2}} \overset{(5)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2g'(\xi) = g(\xi)$$

## ΘΕΜΑ 24ο :

**Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- $xf'(x) + x^2 f''(x) = 2$ **, για κάθε** $x \in (0,+\infty)$ **(1)**
- $f(1) = 0$ **(2)**

- $\mathbf{f'(1)=2}$ **(3)**

**α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)=\ln^2x+2\ln x,\ \ x\in(0,+\infty)}$**

**β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $\mathbf{C_f}$ της συνάρτησης $\mathbf{f}$, τον άξονα $\mathbf{x'x}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $\mathbf{x=1}$ και $\mathbf{x=e}$**

**γ) Να υπολογίσετε το όριο $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\eta\mu\alpha+\int_1^{\alpha}f(x)dx}{\alpha\ln^2\alpha+1}$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$x f'(x)+x^2f''(x)=2 \overset{\div x>0}{\Leftrightarrow} f'(x)+xf''(x)=\frac{2}{x}\Leftrightarrow$$

$$\left(xf'(x)\right)'=\left(2\ln x\right)'\Rightarrow xf'(x)=2\ln x+c_1\ ,\ c_1\in\mathbb{R}\qquad(4)$$

Από τη σχέση (4) για $x=1$ έχουμε:

$$1\cdot f'(1)=2\ln1+c_1 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c_1=2$$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$xf'(x)=2\ln x+2 \overset{\div x>0}{\Leftrightarrow} f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}+2\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=2\ln x\left(\ln x\right)'+2\left(\ln x\right)'\Leftrightarrow f'(x)=\left(\ln^2x+2\ln x\right)'\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\ln^2x+2\ln x+c_2\ ,\ c_2\in\mathbb{R}\qquad(5)$$

Από τη σχέση (5) για $x=1$ έχουμε:

$$f(1)=\ln^21+2\ln1+c_2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} c_2=0$$

Άρα:

$$f(x)=\ln^2x+2\ln x\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

**β)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$ και $f(x)\ge0$ για κάθε $x\in[1,e]$, επομένως το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$, είναι:

$$E=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(\ln^2x+2\ln x\right)dx=\int_1^e(x)'\ln^2x\,dx+2\int_1^e\ln x\,dx=$$

$$=[x\ln^2x]_1^e-2\int_1^e x\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+2\int_1^e\ln x\,dx=e\ln^2e-2\int_1^e\ln xdx+2\int_1^e\ln xdx=e$$

**γ)** Με διαδικασία ανάλογη αυτής που χρησιμοποιήσαμε στον υπολογισμό του εμβαδού, βρίσκουμε ότι:

$$\int_1^{\alpha}f(x)\,dx=[x\ln^2x]_1^{\alpha}-2\int_1^{\alpha}\ln x\,dx+2\int_1^{\alpha}\ln x\,dx=\alpha\ln^2\alpha\qquad(6)$$

οπότε για κάθε $\alpha\in(1,+\infty)$ έχουμε:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\eta\mu\alpha+\int_1^{\alpha}f(x)dx}{\alpha\ln^2\alpha+1}\overset{(6)}{=}\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\eta\mu\alpha+\alpha\ln^2\alpha}{\alpha\ln^2\alpha+1}=$$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha\ln^2\alpha\left(1+\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}\right)}{\alpha\ln^2\alpha\left(1+\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\right)}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1+\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}}{1+\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}}=1\ ,\quad \text{γιατί}$$

- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(\alpha\ln^2\alpha\right)=+\infty$ , οπότε $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}=0$
- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\right)=1$
- $\left|\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}\right|\le\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\Rightarrow-\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\le\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}\le\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}$

Είναι:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\right)=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}=0$$

οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι:

- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}=0$ , οπότε $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(1+\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}\right)=1$

## ΘΕΜΑ 25ο :

**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^{x^3}e^{t^2}dt$. Να αποδείξετε ότι:**

**α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$**

**β) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης f , στο σημείο της $O(0,0)$ είναι ο άξονας $x΄x$**

**γ) $f(x)\ge\frac{1}{3}x^9$ για κάθε $x\ge0$**

**δ) $6\int_0^1 x^2f(x)dx-2\int_0^1 e^{x^2}dx=1-e$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση $e^{t^2}$ είναι συνεχής στο R, άρα η συνάρτηση $h(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε και η συνάρτηση $f(x)=h\left(x^3\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως σύνθεση με παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x) = \left(h(x^3)\right)' = h'(x^3)(x^3)' = e^{x^6}\cdot 3x^2 = 3x^2e^{x^6}\ ,\quad x\in R$$

**β)** Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης $f$, στο σημείο της $O(0,0)$ είναι:

$$(\varepsilon):\ y - f(0) = f'(0)(x-0)$$

Είναι:

$$f(0) = \int_0^0 e^{t^2}dt = 0 \quad \text{και} \quad f'(0) = 0\cdot e^0 = 0$$

Άρα:

$$(\varepsilon):\ y - 0 = 0\cdot(x-0) \Leftrightarrow y = 0$$

Δηλαδή, ο άξονας $x'x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης $f$, στο σημείο της $O(0,0)$

**γ)** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^9\ ,\quad x\in R$$

Η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη, ως διαφορά παραγωγισίμων με παράγωγο:

$$g'(x) = f'(x) - 3x^8 = 3x^2e^{x^6} - 3x^8 = 3x^2\left(e^{x^6} - x^6\right),\quad x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$e^x \geq x+1 > x \quad \text{(γνωστή άσκηση – θέλει απόδειξη)}$$

οπότε:

$$e^{x^6} > x^6\ ,\ \text{για κάθε}\ x\in R$$

Άρα:

$$g'(x) = 3x^2\left(e^{x^6} - x^6\right) > 0,\ \text{για κάθε}\ x\in R^*$$

Είναι:

$$\begin{cases} g\ \text{συνεχής στο}\ R \\ g'(x) > 0\ \ \text{στο}\ R^* \end{cases}$$ , οπότε η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $R$

Επομένως για κάθε $x\geq 0$ έχουμε:

$$x\geq 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)\geq g(0) \Rightarrow f(x) - \frac{1}{3}x^9 \geq 0 \Rightarrow f(x)\geq \frac{1}{3}x^9$$

**δ)** Είναι:

$$6\int_0^1 x^2f(x)dx = 2\int_0^1 3x^2f(x)dx = 2\int_0^1 (x^3)'f(x)dx =$$

$$=2\left(\left[x^3 f(x)\right]_0^1-\int_0^1 x^3 f'(x)dx\right)=2f(1)-2\int_0^1 x^3 f'(x)dx=$$

$$=2\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 6x^5e^{x^6}dx=2\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 e^{x^6}(x^6)'dx=$$

$$=2\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1\left(e^{x^6}\right)'dx=2\int_0^1 e^{x^2}dx-\left[e^{x^6}\right]_0^1=2\int_0^1 e^{x^2}dx-e+1$$

Δείξαμε ότι:

$$6\int_0^1 x^2 f(x)dx=2\int_0^1 e^{x^2}dx-e+1$$

Άρα:

$$6\int_0^1 x^2 f(x)dx-2\int_0^1 e^{x^2}dx=1-e$$

## ΘΕΜΑ 26ο :

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- $2\sigma\upsilon\nu x+\int_0^x t f(t)dt=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du-x\eta\mu x+2$, **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $f(0)=0$ **(2)**
- $f'(0)=\alpha$ **(3)**

**α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α**

**β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=1-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$**

**γ) Να βρείτε:**

**i) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$**

**ii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης f, από την εφαπτομένη (ε) της $C_f$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{2\pi}{3}$ και $x=\frac{4\pi}{3}$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, άρα η συνάρτηση $g(u)=\int_0^u f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η $\int_0^x g(u)du = \int_0^x \left( \int_0^u f(t)\,dt \right) du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και η συνάρτηση $\int_0^x tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης οι συναρτήσεις $2\sigma\upsilon\nu x$ και $-x\eta\mu x + 2$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$-2\eta\mu x + xf(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$xf(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x\,,\ x \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

Από τη σχέση (4) για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{\int_0^x f(t)\,dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x} \qquad (5)$$

Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, γιατί ο τύπος της $f$ προκύπτει από πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Από τη σχέση (3) έχουμε ότι η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Προσδιορισμός του πραγματικού αριθμού α:

Για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\alpha = f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \qquad (6)$$

Είναι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \overset{(6)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) + x\eta\mu x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left( \frac{f(x)}{x} + \eta\mu x \right) = \frac{1}{2}\alpha$$

οπότε, λόγω της σχέσης (6) είναι:

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$$

**β)** Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (4) έχουμε:

$$\left(xf(x)\right)'=\left(\int_0^x f(t)\,dt+\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x\right)' \Rightarrow$$

$$f(x)+xf'(x)=f(x)+\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x \Rightarrow$$

$$xf'(x)=x\eta\mu x,\ x\in R$$

Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x)=\eta\mu x=(-\sigma\upsilon\nu x)'$$

οπότε:

$$f(x)=\begin{cases}-\sigma\upsilon\nu x+c_1 & ,\ x\in(-\infty\,,0)\\ 0 & ,\ x=0\\ -\sigma\upsilon\nu x+c_2 & ,\ x\in(0\,,+\infty)\end{cases}$$

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $R$, άρα είναι συνεχής και στο $x_0=0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}(-\sigma\upsilon\nu x+c_1)=\lim_{x\to 0^+}(-\sigma\upsilon\nu x+c_2)=0\Rightarrow$$

$$-\sigma\upsilon\nu 0+c_1=-\sigma\upsilon\nu 0+c_2=0\Rightarrow$$

$$-1+c_1=-1+c_2=0\Rightarrow c_1=c_2=1$$

Επομένως

$$f(x)=\begin{cases}-\sigma\upsilon\nu x+1 & ,\ x\in(-\infty\,,0)\\ 0 & ,\ x=0\\ -\sigma\upsilon\nu x+1 & ,\ x\in(0\,,+\infty)\end{cases} \Rightarrow\ f(x)=1-\sigma\upsilon\nu x,\ x\in R$$

**γ) i)** Είναι:

- $$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=1-\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$$

  $$=1-\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)=1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

- $$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\eta\mu\frac{2\pi}{3}=\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$ είναι:

$$\varepsilon: y-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{9-2\sqrt{3}\pi}{6}$$

**ii)** Στο διάστημα $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ η συνάρτηση $f$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, με:

$$f'(x) = \eta\mu x \quad \text{και} \quad f''(x) = \sigma\upsilon\nu x < 0$$

οπότε η συνάρτηση $f$ είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

Επομένως η εφαπτομένη (ε) της $C_f$ στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$, βρίσκεται από την $C_f$ και «πάνω»

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, από την εφαπτομένη (ε) της $C_f$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{2\pi}{3}$ και $x = \frac{4\pi}{3}$ είναι:

$$E = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9-2\sqrt{3}\pi}{6} - f(x)\right)dx =$$

$$= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9-2\sqrt{3}\pi}{6} - 1\right)dx =$$

$$= [\eta\mu x]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{16\pi^2}{9} - \frac{4\pi^2}{9}\right) + \frac{3-2\sqrt{3}\pi}{6}\cdot\frac{2\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi^2 + 3\pi - 9\sqrt{3}}{9}$$

# ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

## ΘΕΜΑ 27ο:

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:**

$$\int_1^{f(x)} e^t\left(\frac{1}{t}+\ell nt\right)dt = e^{f(x)}\left[x+\ell n(x^2+1)\right],\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ , για κάθε $x\in\mathbb{R}$**

**β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x\left(x^2+1\right)$ , $x\in\mathbb{R}$**

**γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=3$**

**δ) Αν για τη συνεχή συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:**

$$h\big(f(x)+x-3\big)=f\big(h(x)\big)+h(x)-3\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

**τότε, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει με την ευθεία $y=x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.**

**ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=2e-1$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση $e^t\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις 1 και $f(x)$ (όρια ολοκλήρωσης) ορίζονται στο R. Επειδή το $1\in(0,+\infty)$, για να ορίζεται η συνάρτηση $\int_1^{f(x)} e^t\left(\frac{1}{t}+\ell nt\right)dt$ πρέπει και αρκεί $f(x)\in(0,+\infty)$

Δηλαδή:

$$f(x)>0\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

**β)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\int_1^{f(x)} e^t\left(\frac{1}{t}+\ell nt\right)dt = e^{f(x)}\left[x+\ell n(x^2+1)\right]\Leftrightarrow$$

$$\int_1^{f(x)}\left(e^t\frac{1}{t}+e^t\ell nt\right)dt=e^{f(x)}\left[x+\ell n\left(x^2+1\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\int_1^{f(x)}(e^t\ell nt)'dt=e^{f(x)}\left[x+\ell n\left(x^2+1\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\left[e^t\ell nt\right]_1^{f(x)}=e^{f(x)}\left[x+\ell n\left(x^2+1\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}\ell nf(x)=e^{f(x)}\left[x+\ell n\left(x^2+1\right)\right]\overset{e^{f(x)}\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\ell nf(x)=x+\ell n\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow \ell nf(x)=\ell ne^x+\ell n\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\ell nf(x)=\ell n\left[e^x\left(x^2+1\right)\right]\Leftrightarrow f(x)=e^x\left(x^2+1\right),\quad x\in R$$

**γ) 1ος τρόπος:**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-3\ ,\quad x\in[0\,,1]$

- Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $[0\,,1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- ○ $g(0)=f(0)-3=1-3=-2<0$

  ○ $g(1)=f(1)-3=2e-3>0$

  οπότε $g(0)g(1)<0$

Η συνάρτηση $g$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0\,,1]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0\,,1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=3$$

Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(e^x(x^2+1)\right)'=e^x(x^2+1)+2xe^x=e^x\left(x^2+1+2x\right)=e^x\left(x+1\right)^2$$

Ισχύουν:

- Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο R, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(x)>0$ , για κάθε $(-\infty\,,-1)\cup(-1\,,+\infty)$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε το $x_0$ είναι μοναδικό.

**2ος τρόπος:**

Η συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $[0\,,1]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών, διότι είναι συνεχής σε αυτό ως γινόμενο συνεχών και $f(0)=1\neq 2e=f(1)$

Είναι $f(0)=1<3<2e=f(1)$, άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=3$

Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(e^x(x^2+1)\right)'=e^x(x^2+1)+2xe^x=e^x\left(x^2+1+2x\right)=e^x\left(x+1\right)^2$$

Ισχύουν:

- Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο R, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(x) > 0$ , για κάθε $(-\infty , -1)\cup(-1 , +\infty)$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε το $x_0$ είναι μοναδικό.

**δ)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$h\big(f(x) + x - 3\big) = f\big(h(x)\big) + h(x) - 3$$

Για $x = x_0$ έχουμε:

$$h\big(f(x_0) + x_0 - 3\big) = f\big(h(x_0)\big) + h(x_0) - 3 \overset{f(x_0)=3}{\Rightarrow}$$

$$h\big(3 + x_0 - 3\big) = f\big(h(x_0)\big) + h(x_0) - 3 \Rightarrow h(x_0) = f\big(h(x_0)\big) + h(x_0) - 3 \Rightarrow$$

$$f\big(h(x_0)\big) = 3 \overset{f(x_0)=3}{\Rightarrow} f\big(h(x_0)\big) = f(x_0) \overset{f:1-1}{\Rightarrow} h(x_0) = x_0$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h$ έχει με την ευθεία $y = x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

**ε)** Η συνάρτηση $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0 , 1]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R , με $f'(x) = e^x (x+1)^2$

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0 , 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{e^1(1^2+1) - e^0(0^2+1)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = 2e - 1$$

## ΘΕΜΑ 28$^o$:

**Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$, με $f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$**

**α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = 1 + e^{x^2}$ , $x \in R$**

**β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.**

**γ) Αν $h(x) = \int_1^{x^3} f(t)dt$ , $x \in R$, να αποδείξετε ότι:**

**i) $\int_0^1 h(x)dx + \int_0^1 \sqrt[3]{x}\, f(x)dx = 0$**

**ii) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0 , 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = -\frac{h(x_0)}{\sqrt[3]{x_0}}$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση $\frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}$ είναι συνεχής στο R , ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις συναρτήσεις $-x$ και $x$ (όρια ολοκλήρωσης) ορίζονται στο R

Επομένως η συνάρτηση $f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$ έχει πεδίο ορισμού το R

Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}dt=\int_{-x}^{0}\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}dt+\int_{0}^{x}\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}dt=$$

$$=\int_{0}^{x}\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}dt-\int_{0}^{-x}\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}dt$$

Η συνάρτηση $\varphi(x)=\int_{0}^{x}\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}$. Επίσης η συνάρτηση $\varphi(-x)=\int_{0}^{-x}\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\int_{0}^{x}\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}dt\right)'-\left(\int_{0}^{-x}\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}dt\right)'=$$

$$=\frac{e^x+e^{x^2}}{e^x+1}-\frac{e^{-x}+e^{x^2}}{e^{-x}+1}(-x)'=\frac{e^x+e^{x^2}}{e^x+1}+\frac{\frac{1}{e^x}+e^{x^2}}{\frac{1}{e^x}+1}=$$

$$=\frac{e^x+e^{x^2}}{e^x+1}+\frac{1+e^xe^{x^2}}{1+e^x}=\frac{e^x+e^{x^2}+1+e^xe^{x^2}}{e^x+1}=$$

$$=\frac{e^x(1+e^{x^2})+(1+e^{x^2})}{e^x+1}=\frac{(1+e^{x^2})(e^x+1)}{e^x+1}=1+e^{x^2}\ ,\quad x\in R$$

**β)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f''(x)=\left(1+e^{x^2}\right)'=e^{x^2}(x^2)'=2xe^{x^2}$$

Είναι:

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$

Το πρόσημο της $f''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | $0$ | $\cup$ |
| | | Σ.Κ. | |

Είναι:

- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } (-\infty, 0] \\ f''(x) < 0 \quad \text{στο } (-\infty, 0) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση $f$ είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$

- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [0, +\infty) \\ f''(x) > 0 \quad \text{στο } (0, +\infty) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$

- $f''(0) = 0$ και εκατέρωθεν του $x_o = 0$ αλλάζει η κυρτότητα της συνάρτησης $f$, άρα το σημείο $(0, f(0))$, δηλαδή το $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης $f$

**γ) i)** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$w(x) = \int_1^x f(t)\,dt\,, \quad x \in R$$

Είναι:

$$h(x) = \int_1^{x^3} f(t)\,dt = w(x^3)\,, \quad x \in R \qquad (1)$$

Η συνάρτηση $w$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $f$, με παράγωγο:

$$w'(x) = \left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' = f(x)\,, \quad x \in R \qquad (2)$$

Άρα η συνάρτηση $h$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$h'(x) \overset{(1)}{=} \left(w(x^3)\right)' = w'(x^3)\cdot(x^3)' \overset{(2)}{=} 3x^2\cdot f(x^3)\,, \quad x \in R$$

Είναι:

$$\int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 (x)'h(x)dx = \left[x h(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x h'(x)dx =$$

$$= h(1) - \int_0^1 x\cdot 3x^2\cdot f(x^3)dx \overset{h(1)=0}{=} -\int_0^1 x\cdot 3x^2\cdot f(x^3)dx$$

Θέτουμε:

$$u = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{u}\,, \; u \geq 0 \quad \text{και} \quad du = 3x^2 dx$$

Για $x = 0$ είναι $u = 0$ και για $x = 1$ είναι $u = 1$

Άρα έχουμε:

$$\int_0^1 h(x)dx = -\int_0^1 x\cdot 3x^2\cdot f(x^3)dx = -\int_0^1 \sqrt[3]{u}\, f(u)du = -\int_0^1 \sqrt[3]{x}\, f(x)dx$$

Είναι:

$$\int_0^1 h(x)dx = -\int_0^1 \sqrt[3]{x}\, f(x)dx$$

Οπότε:

$$\int_0^1 h(x)dx + \int_0^1 \sqrt[3]{x}\, f(x)dx = 0 \qquad (3)$$

**ii)** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=\int_0^x h(t)\,dt+\int_0^x \sqrt[3]{t}\,f(t)\,dt,\ \ x\in[0,1]$$

Η συνάρτηση $\int_0^x h(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης h και η συνάρτηση $\int_0^x \sqrt[3]{t}\,f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\sqrt[3]{t}\,f(t)$, οπότε και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$g'(x)=\left(\int_0^x h(t)\,dt\right)'+\left(\int_0^x \sqrt[3]{t}\,f(t)\,dt\right)'=$$

$$=h(x)+\sqrt[3]{x}\,f(x),\ \ x\in[0,1]$$

Είναι:

- $g(0)=0$ και
- $g(1)=\int_0^1 h(x)\,dx+\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,f(x)\,dx\overset{(\beta)}{=}0$

οπότε $g(0)=g(1)$

Επομένως η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,1]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(x_0)=0\Leftrightarrow h(x_0)+\sqrt[3]{x_0}\,f(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=-\frac{h(x_0)}{\sqrt[3]{x_0}}$$

Η συνάρτηση $g'$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, με παράγωγο:

$$g''(x)=h'(x)+\left(\sqrt[3]{x}\right)'f(x)+\sqrt[3]{x}\,f'(x)=$$

$$=h'(x)+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'f(x)+\sqrt[3]{x}\,f'(x)=$$

$$=3x^2f\left(x^3\right)+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}f(x)+\sqrt[3]{x}\left(1+e^{x^2}\right)=$$

$$=3x^2f\left(x^3\right)+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}f(x)+\sqrt[3]{x}\left(1+e^{x^2}\right)$$

Από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$f'(x)=1+e^{x^2}>0 \text{ για κάθε } x\in R$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Επίσης έχουμε:

$$f(0)=\int_0^0 \frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}\,dt=0$$

Επομένως:

- για $x < 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0$
- για $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$

Άρα για κάθε $x \in (0,1)$ είναι:

$$f(x) > 0 \quad \text{και} \quad f(x^3) > 0$$

Επομένως:

$$g''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1)$$

Οπότε η συνάρτηση $g'$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$, άρα το $x_0 \in (0,1)$ είναι
μοναδικό.

## ΘΕΜΑ 29ο :

**Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις**

- $f(x-y) = f(x) - f(y) - 1$, **για κάθε** $x, y \in \mathbb{R}$ **(1)**
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+1}{x} = 2$ **(2)**
- $|z-i|\big(f(x)+1\big) \le \eta\mu 2x$, **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ **και** $z \in \mathbb{C}$ **(3)**

**α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$**

**β) Αν $z_1, z_2$ είναι δύο μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου με $|z_1 - z_2| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| = 2$**

**γ) Να αποδείξετε ότι:**

**i) Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$**

**ii) $f(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$**

**δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt$, $x \in \mathbb{R}$**

**ε) Να υπολογίσετε τα όρια:**

**i)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt$ **και** **ii)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt$

**στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες $\rho_1, \rho_2$ με $\rho_1 + 2\rho_2 > 1$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για $x = y = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(0) = f(0) - f(0) - 1 \Leftrightarrow f(0) = -1 \quad (4)$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=|z-i|\big(f(x)+1\big)-\eta\mu 2x\ ,\ \ x\in R$
- Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$|z-i|\big(f(x)+1\big)\le \eta\mu 2x \Leftrightarrow$$

$$|z-i|\big(f(x)+1\big)-\eta\mu 2x\le 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x)\le 0 \Leftrightarrow g(x)\le g(0)$$

Άρα η συνάρτηση $g$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_o=0$ του πεδίου ορισμού της.

- Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(-1)}{x}=2 \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2 \Leftrightarrow f'(0)=2 \qquad (5)$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ με $f'(0)=2$, οπότε και η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ με $g'(0)=|z-i|f'(0)-2\sigma\upsilon\nu 0 \overset{(5)}{=} 2|z-i|-2 \qquad (6)$

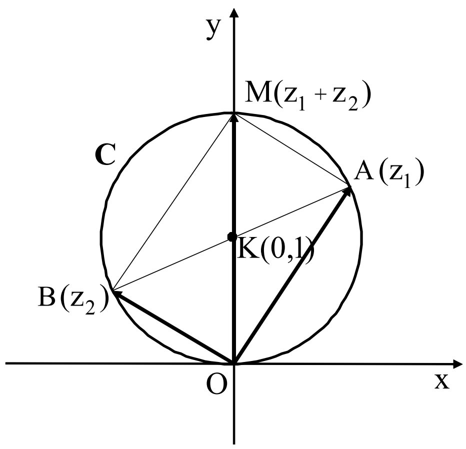
Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε

$$g'(0)=0 \overset{(6)}{\Leftrightarrow} 2|z-i|-2=0 \Leftrightarrow |z-i|=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0\,,1)$ και ακτίνα $\rho=1$

**β)** Έστω Α και Β οι εικόνες αντίστοιχα των μιγαδικών $z_1$ και $z_2$ στο μιγαδικό επίπεδο, τότε είναι: $(AB)=|z_1-z_2|$, άρα $(AB)=2$. Επειδή τα σημεία $A\,,B$ ανήκουν στον προηγούμενο κύκλο, που έχει ακτίνα $\rho=1$, συμπεραίνουμε ότι τα $A\,,B$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου αυτού.

Αν Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού $z_1+z_2$, τότε το παραλληλόγραμμο ΟΑΜΒ είναι ορθογώνιο, αφού η γωνία $A\widehat{O}B$ βαίνει σε ημικύκλιο.




**1ος τρόπος:**

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσοι, δηλαδή

$$(OM)=(AB)\Leftrightarrow |z_1+z_2|=|z_1-z_2|$$

Επομένως $|z_1+z_2|=2$

**2ος τρόπος:**

Οι διαγώνιοι ΟΜ και ΑΒ διχοτομούνται, άρα το κέντρο Κ του κύκλου, θα είναι το κοινό μέσο των δύο διαγωνίων,

Άρα $|z_1+z_2|=(OM)=2(OK)=2\rho=2\cdot 1=2$

**γ)** **i)** Για να είναι η $f$ παραγωγίσιμη στο R, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_o \in R$. Έστω $x_o \in R$, τότε για κάθε $x \in R$ με $x \neq x_o$ θέτουμε $x = x_o - h$, οπότε όταν το $x \to x_o$ το $h \to 0$ και έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x_o - h) - f(x_o)}{x_o - h - x_o} \overset{(1)}{=}$$

$$\frac{f(x_o) - f(h) - 1 - f(x_o)}{-h} = \frac{-f(h) - 1}{-h} = \frac{f(h) + 1}{h}$$

Είναι:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) + 1}{h} \overset{(2)}{=} 2$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_o \in R$ με $f'(x_o) = 2$. Γενικά η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = 2$

**ii)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) = (2x)', \text{ οπότε } f(x) = 2x + c, \ x \in R$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = 2 \cdot 0 + c \overset{(4)}{\Leftrightarrow} c = -1$$

Άρα

$$f(x) = 2x - 1, \ x \in R$$

**δ)** Είναι:

$$\int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt = \int_0^x \frac{2t - 1}{e^t} dt = \int_0^x (2t - 1) e^{-t} dt = -\int_0^x (2t - 1)(e^{-t})' dt =$$

$$= -\left[(2t - 1)e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x (2t - 1)' e^{-t} dt = -\left((2x - 1)e^{-x} - (2 \cdot 0 - 1)e^0\right) + \int_0^x 2e^{-t} dt =$$

$$= -(2x - 1)e^{-x} - 1 - 2\int_0^x e^{-t} (-t)' dt = -(2x - 1)e^{-x} - 1 - 2\left[e^{-t}\right]_0^x =$$

$$= -(2x - 1)e^{-x} - 1 - 2(e^{-x} - e^0) = -2x e^{-x} + e^{-x} - 1 - 2e^{-x} + 2 =$$

$$= -2x e^{-x} - e^{-x} + 1 = \frac{-2x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + 1 = \frac{e^x - 2x - 1}{e^x}$$

**ε)** Είναι:

**i)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 2x - 1}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - 2\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 1$, γιατί

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x}) \overset{u=-x}{=} \lim\limits_{u \to -\infty} (e^u) = 0$ και
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) \overset{u=-x}{=} \lim\limits_{u \to -\infty} (1 - e^u) = 1 - 0 = 1$

**ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-2x-1}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[1+(-2x-1)e^{-x}\right] = +\infty$, γιατί

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} \overset{u=-x}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$

**στ)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt \overset{(\delta)}{=} \frac{e^x-2x-1}{e^x}$ , $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση $\frac{f(t)}{e^t}$ είναι συνεχής στο R , άρα η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο R , με

$$F'(x) = \left(\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt\right)' = \frac{f(x)}{e^x} = \frac{2x-1}{e^x}$$

Είναι:

- $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
- $F'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Το πρόσημο της $F'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της F φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $F(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | ελάχιστο | $\nearrow$ | 1 |

Για $x=0$ είναι $F(0) = \int_0^0 \frac{f(t)}{e^t}dt = 0$, άρα η εξίσωση $F(x)=0$ στο διάστημα $\Delta_1 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ έχει ρίζα την $\rho_1 = 0$, που είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1$

Είναι:

- $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{1}{2} - 1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}} < 0$, γιατί $e < 4 \Rightarrow \sqrt{e} < 2$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt \overset{(\varepsilon),(i)}{=} 1$

Η συνάρτηση F είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα είναι

$$F(\Delta_2) = \left[F\left(\frac{1}{2}\right), \lim_{x\to+\infty}F(x)\right) = \left[\frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}}, 1\right)$$

Το $0\in F(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $F(x)=0$ στο διάστημα $\Delta_2=\left[\frac{1}{2}\,,+\infty\right)$ έχει μια ρίζα $\rho_2$, που είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση $F$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2$

Επειδή $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}}\neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $\rho_2>\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\rho_2>1$ , οπότε $\rho_1+2\rho_2=0+2\rho_2=2\rho_2>1$

Επομένως η εξίσωση $\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες $\rho_1$ , $\rho_2$ με $\rho_1+2\rho_2>1$

## ΘΕΜΑ 30ο :

**Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0\,,+\infty)\to R$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=4\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}+\kappa\ ,\ x>0 \qquad (1)$$

**όπου $\kappa$ είναι η ελάχιστη τιμή του μέτρου των μιγαδικών αριθμών $z$ για τους οποίους ισχύει:**

$$|z-3|^2+|z+3|^2=2\cdot\left(8+|z^2-9|\right) \qquad (2)$$

**α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$**

**β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή.**

**γ) Να αποδείξετε ότι $f(4-x)+f(x)\geq 2f(2)$ , για κάθε $x>0$ και ότι $\int_1^3 f(x)dx>2f(2)$**

**δ) Αν επιπλέον είναι $f'(1)=0$ και $f(1)=-1$, τότε να αποδείξετε ότι $f(x)=2\ln^2x+x^2-2x,\ x>0$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Είναι:

$$|z-3|^2+|z+3|^2=2\cdot\left(8+|z^2-9|\right)\Leftrightarrow|z-3|^2-2|z-3||z+3|+|z+3|^2=16\Leftrightarrow$$

$$\left(|z-3|-|z+3|\right)^2=16\Leftrightarrow\left||z-3|-|z+3|\right|=4 \quad \text{(Ορισμός υπερβολής)}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι υπερβολή με εστίες τα σημεία $E(3\,,0)$, $E'(-3\,,0)$, κορυφές τα σημεία $A(2\,,0)$ , $A'(-2\,,0)$ και εξίσωση $C:\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

**β)** Λόγω του ερωτήματος (α) ισχύει $|z|\geq\alpha=2$ για κάθε μιγαδικό $z$ που η εικόνα του ανήκει στην υπερβολή $C$ , άρα $\kappa=2$

Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)-\left(f'(x-h)-f'(x)\right)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right)=\frac{1}{2}\left(f''(x)+f''(x)\right)=f''(x),$$

γιατί

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\overset{-h=\omega}{=}\lim_{\omega\to 0}\frac{f'(x+\omega)-f'(\omega)}{\omega}=f''(x)$$

και η συνάρτηση $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Από την (1) έχουμε:

$$f''(x)=4\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}+2\Leftrightarrow f''(x)=2\cdot\frac{2-2\ln x+x^2}{x^2},\ x>0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2-2\ln x+x^2,\ x>0$.

Η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ με $g'(x)=-\dfrac{2}{x}+2x=\dfrac{2(x^2-1)}{x},\ x>0$

Είναι:

- $g'(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=1$ και
- $g'(x)>0\Leftrightarrow x^2-1>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x>1$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της $g$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | $3$ | ↗ | |
| | | | ελάχιστο | | |

- Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0\,,1]$
- Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$
- Η συνάρτηση $g$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $g(1)=3$

Άρα $g(x)\geq 3$, για κάθε $x>0$.

Επομένως $f''(x)=2\cdot\dfrac{g(x)}{x^2}>0$, για κάθε $x>0$, δηλαδή η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή.

**γ) 1$^{ος}$ τρόπος: (με τη βοήθεια ακρότατου)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(4-x)+f(x),\ x>0$

Η $h$ είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=-f'(4-x)+f'(x),\ x>0$

Είναι:

- $h'(x)=0\Leftrightarrow -f'(4-x)+f'(x)=0\Leftrightarrow f'(4-x)=f'(x)\overset{f'\ 1-1}{\Leftrightarrow}4-x=x\Leftrightarrow x=2$
- $h'(x)>0\Leftrightarrow -f'(4-x)+f'(x)>0\Leftrightarrow f'(4-x)<f'(x)\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}4-x<x\Leftrightarrow x>2$

Το πρόσημο της $h'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της $h$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | | ↘ | $2f(2)$ | ↗ | |
| | | | ελάχιστο | | |

- Η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0\ ,\ 2\right]$
- Η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[2\ ,+\infty\right)$
- Η συνάρτηση $h$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 2$, με ελάχιστη τιμή $h(2) = 2f(2)$

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) \ge 2f(2) \Leftrightarrow f(4-x) + f(x) \ge 2f(2)$ (3)

**2$^{ος}$ τρόπος (ανισότητα Jensen)**

Υπόδειξη:

Για $x = 2$ ισχύει ως ισότητα

Για $x > 2$ εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την $f$ στα διαστήματα $\left[4-x\ ,\ 2\right]$ και $\left[2\ ,\ x\right]$

Για $0 < x < 2$ εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την $f$ στα διαστήματα $\left[x\ ,\ 2\right]$ και $\left[2\ ,\ 4-x\right]$

και επειδή $f'$ γνησίως αύξουσα γιατί $f$ κυρτή, … προκύπτει το ζητούμενο.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(4-x) + f(x) - 2f(2),\ x > 0$

Η $\Phi$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1\ ,\ 3\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $\Phi(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [1\ ,\ 3]$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x = 2$, λόγω της σχέσης (3), άρα

$$\int_1^3 \big(f(4-x) + f(x) - 2f(2)\big)dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^3 f(4-x)dx + \int_1^3 f(x)dx - 2f(2)\int_1^3 dx > 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$2\int_1^3 f(x)dx > 2f(2)\int_1^3 dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx > f(2)\cdot(3-1) \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx > 2f(2)$$

$(*)$ Είναι:

$$\int_1^3 f(4-x)\,dx = \int_1^3 f(x)dx$$

Πράγματι, αν θέσουμε $4 - x = t$, τότε $dt = (4-x)'\,dx = -dx$

Για $x = 1$ είναι $t = 3$ και $x = 3$ είναι $t = 1$, οπότε έχουμε:

$$\int_1^3 f(4-x)dx = -\int_3^1 f(t)dt = \int_1^3 f(t)dt = \int_1^3 f(x)dx$$

**δ)** Για κάθε $x \in (0\ ,+\infty)$ έχουμε:

$$f''(x) = 4\cdot\frac{1-\ln x}{x^2} + 2 \Leftrightarrow \big(f'(x)\big)' = 4\cdot\frac{(\ln x)'x - (x)'\ln x}{x^2} + (2x)' \Leftrightarrow$$

$$\big(f'(x)\big)' = 4\left(\frac{\ln x}{x}\right)' + (2x)' \Leftrightarrow \big(f'(x)\big)' = \left(4\frac{\ln x}{x} + 2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 4\frac{\ln x}{x} + 2x + c\ ,\ c \in R\ ,\ x > 0$$

Για $x = 1$ είναι $f'(1) = 2 + c \Leftrightarrow c = -2$, γιατί $f'(1) = 0$

Άρα $f'(x) = 4\dfrac{\ln x}{x} + 2x - 2\ ,\ \ x > 0$

Για κάθε $x \in (0\ ,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = 4\frac{\ln x}{x} + 2x - 2 \Leftrightarrow f'(x) = 4\ln x\,(\ln x)' + \left(x^2 - 2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(2\ln^2 x + x^2 - 2x\right)' \Leftrightarrow f(x) = 2\ln^2 x + x^2 - 2x + c\ ,\ c \in R,\ x > 0$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = -1 + c \Leftrightarrow c = 0$, γιατί $f(1) = -1$

Άρα $f(x) = 2\ln^2 x + x^2 - 2x\ ,\ \ x > 0$

## ΘΕΜΑ 31ο :

**Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z$ με $z \neq -1$, και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$, που ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- **$x e^x f'(e^x) = 2x^2 + \left|(z+1)\cdot x\right|$, για κάθε $x \in R^*$ (1)**
- **$f(1) = -1$ (2)**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \ln^2 x - |z+1|\cdot \ln x - 1, & 0 < x < 1 \\ \ln^2 x + |z+1|\cdot \ln x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$**

**β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.**

**γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς $\xi_1, \xi_2 \in (0\ ,+\infty)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:**

$$\xi_1 \cdot \xi_2 = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = e^{|z+1|}$$

**δ) Έστω Ε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, g$, όπου $g(x) = \ln^2 x - 1$, $x > 0$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = e$ και $x = e^2$. Αν $E = e^2$ να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z$ ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x \in R^*$ έχουμε:

$$x e^x f'(e^x) = 2x^2 + \left|(z+1)\cdot x\right| \Leftrightarrow x e^x f'(e^x) = 2x^2 + |z+1|\cdot|x| \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(e^x) = 2x + |z+1|\cdot\frac{|x|}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x f'(e^x) = 2x - |z+1|\ ,\ x < 0 \\ e^x f'(e^x) = 2x + |z+1|\ ,\ x > 0 \end{cases}$$

Για κάθε $x \in (-\infty\ ,\ 0)$ έχουμε:

$$e^x f'(e^x) = 2x - |z+1| \Leftrightarrow \left(f(e^x)\right)' = \left(x^2 - |z+1|\cdot x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(e^x) = x^2 - |z+1|\cdot x + c_1\ ,\quad x < 0$$

Θέτουμε $e^x = u > 0$, άρα $x = \ln u$

Για $x < 0$ είναι $e^x < e^0 = 1$, άρα $0 < u < 1$, οπότε έχουμε:

$$f(u) = \ln^2 u - |z+1|\cdot \ln u + c_1\ ,\quad 0 < u < 1$$

Για κάθε $x \in (0\,,\,+\infty)$ έχουμε:

$$e^x f\,'(e^x) = 2x + |z+1| \Leftrightarrow \left(f(e^x)\right)' = \left(x^2 + |z+1|\cdot x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(e^x) = x^2 + |z+1|\cdot x + c_2 \quad , \quad x > 0$$

Θέτουμε $e^x = u > 0$, άρα $x = \ln u$

Για $x > 0$ είναι $e^x > e^0 = 1$, άρα $u > 1$, οπότε έχουμε:

$$f(u) = \ln^2 u + |z+1|\cdot \ln u + c_2 \quad , \quad u > 1$$

Άρα

$$f(u) = \begin{cases} \ln^2 u - |z+1|\cdot \ln u + c_1 & , \quad 0 < u < 1 \\ \ln^2 u + |z+1|\cdot \ln u + c_2 & , \quad u > 1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $1$, οπότε $\lim\limits_{u\to 1^-} f(u) = \lim\limits_{u\to 1^+} f(u) = f(1)$, δηλαδή $c_1 = c_2 = -1$

Άρα

$$f(u) = \begin{cases} \ln^2 u - |z+1|\cdot \ln u - 1 & , \quad 0 < u < 1 \\ \ln^2 u + |z+1|\cdot \ln u - 1 & , \quad u \geq 1 \end{cases}$$

Επομένως

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2 x - |z+1|\cdot \ln x - 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ \ln^2 x + |z+1|\cdot \ln x - 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

**γ)** • Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,1)$ με $f\,'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} - |z+1|\cdot\frac{1}{x} = \frac{2\ln x - |z+1|}{x}$

• Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1\,,+\infty)$ με

$$f\,'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + |z+1|\cdot\frac{1}{x} = \frac{2\ln x + |z+1|}{x}$$

Επομένως η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,1)\cup(1\,,+\infty)$, με:

$$f\,'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln x - |z+1|}{x} & , \quad x \in (0\,,1) \\ \dfrac{2\ln x + |z+1|}{x} & , \quad x \in (1\,,+\infty) \end{cases}$$

• Για κάθε $x \in (0\,,1)$ είναι $\ln x < 0$, οπότε $f\,'(x) = \dfrac{2\ln x - |z+1|}{x} < 0$

• Για κάθε $x \in (1\,,+\infty)$ είναι $\ln x > 0$, οπότε $f\,'(x) = \dfrac{2\ln x + |z+1|}{x} > 0$

Το πρόσημο της $f\,'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f\,'(x)$ | | $-$ | // | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-1$ | ↗ | |

ελάχιστο

Έχουμε:

- $\begin{cases} \text{f συνεχής στο } (0\,,\,1] \\ f'(x) < 0 \quad \text{στο} \quad (0\,,\,1) \end{cases}$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\,,\,1]$
- $\begin{cases} \text{f συνεχής στο } [1\,,\,+\infty) \\ f'(x) > 0 \quad \text{στο} \quad (1\,,\,+\infty) \end{cases}$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1\,,\,+\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $f(1) = -1$

Είναι:

○ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln^2 x - |z+1|\cdot \ln x - 1\right) = +\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln^2 x\right) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-|z+1|\cdot \ln x\right) = +\infty$, αφού $|z+1| > 0$

○ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln^2 x + |z+1|\cdot \ln x - 1\right) = +\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln^2 x\right) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(|z+1|\cdot \ln x\right) = +\infty$, αφού $|z+1| > 0$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0\,,\,1]$, οπότε είναι:

$$f(\Delta_1) = \left[f(1)\,,\,\lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = [-1\,,\,+\infty)$$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1\,,\,+\infty)$, οπότε είναι:

$$f(\Delta_2) = \left[f(1)\,,\,\lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = [-1\,,\,+\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(\Delta) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2) = [-1\,,\,+\infty)$$

**γ)** • Το $0 \in f(\Delta_1)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα $\xi_1 \in (0,1)$, ($\xi_1 \neq 1$, επειδή $f(1) = -1$) και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0\,,\,1]$

• Το $0 \in f(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα $\xi_2 \in (1,+\infty)$, ($\xi_2 \neq 1$, αφού $f(1) = -1$) και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1\,,\,+\infty)$

Επομένως υπάρχουν δύο ακριβώς $\xi_1\,,\,\xi_2 \in (0\,,\,+\infty)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$ αφού ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα τέτοια, ώστε $f(\xi_1) = 0$ και $f(\xi_2) = 0$

Δηλαδή

$$\ln^2\xi_1 - |z+1|\cdot\ln\xi_1 - 1 = 0 \;, \text{ με } \xi_1 \in (0\,,\,1)$$

$$\ln^2\xi_2 + |z+1|\cdot\ln\xi_2 - 1 = 0 \;, \text{ με } \xi_2 \in (1,+\infty)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\ln^2\xi_1 - \ln^2\xi_2 - |z+1|\cdot\ln\xi_1 - |z+1|\cdot\ln\xi_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln\xi_1 - \ln\xi_2)\cdot(\ln\xi_1 + \ln\xi_2) - |z+1|\cdot(\ln\xi_1 + \ln\xi_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln\xi_1 + \ln\xi_2)\cdot(\ln\xi_1 - \ln\xi_2 - |z+1|) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \ln\xi_1 + \ln\xi_2 = 0 \\ \quad ή \\ \ln\xi_1 - \ln\xi_2 - |z+1| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\xi_1\xi_2) = 0 \\ \quad ή \\ \ln\dfrac{\xi_1}{\xi_2} = |z+1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1\xi_2 = 1 \\ \quad ή \\ \dfrac{\xi_1}{\xi_2} = e^{|z+1|} \end{cases}$$

**δ)** Για κάθε $x\in[e,\ e^2]$ έχουμε:

$$f(x)-g(x) = \ln^2x + |z+1|\cdot\ln x - 1 - \ln^2x + 1 = |z+1|\cdot\ln x > 0$$

Επίσης η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο $[e,\ e^2]\subseteq(0,+\infty)$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις $C_f$, $C_g$ των συναρτήσεων $f$, $g$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=e$ και $x=e^2$ είναι:

$$E = \int_e^{e^2}(f(x)-g(x))\,dx$$

Από υπόθεση είναι $E=e^2$, οπότε έχουμε:

$$e^2 = \int_e^{e^2}(|z+1|\cdot\ln x)\,dx \Leftrightarrow e^2 = |z+1|\cdot\int_e^{e^2}\ln x\,dx \Leftrightarrow e^2 = |z+1|\cdot\int_e^{e^2}(x)'\ln x\,dx \Leftrightarrow$$

$$e^2 = |z+1|\cdot\left([x\ln x]_e^{e^2} - \int_e^{e^2}x(\ln x)'dx\right) \Leftrightarrow e^2 = |z+1|\cdot\left(e^2\ln e^2 - e\ln e - \int_e^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) \Leftrightarrow$$

$$e^2 = |z+1|\cdot\left(2e^2 - e - \int_e^{e^2}1\,dx\right) \Leftrightarrow e^2 = |z+1|\cdot\left(2e^2 - e - (e^2-e)\right) \Leftrightarrow e^2 = |z+1|\cdot e^2 \Leftrightarrow |z+1| = 1$$

Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z$ ανήκουν στον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $K(-1,\ 0)$ και ακτίνα $\rho=1$

## ΘΕΜΑ 32ο :

**Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:**

$$\left|z + \frac{3}{2}i\right| > \left|3z + \frac{1}{2}i\right| \qquad (1)$$

**α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z**

**β) Να υπολογίσετε το όριο:**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|z|^x + 2012^{1-x}\right)$$

**γ) Αν $f$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, που είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $R$ και και $z_1, z_2$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, που ικανοποιούν την (1), τότε να αποδείξετε ότι, για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α, με $\alpha \ge 0$, ισχύει:**

$$2f\left(\frac{|3z_1 + 7z_2|}{5}\right) < f(1-\alpha) + f(1+\alpha)$$

**ΛΥΣΗ**

**α)** Έστω $z$ ένας τυχαίος μιγαδικός που ικανοποιεί την (1). Τότε έχουμε:

$$\left|z + \frac{3}{2}i\right| > \left|3z + \frac{1}{2}i\right| \Leftrightarrow$$

$$|2z + 3i| > |6z + i| \Leftrightarrow$$

$$|2z + 3i|^2 > |6z + i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(2z+3i)(2\overline{z}-3i) > (6z+i)(6\overline{z}-i) \Leftrightarrow$$

$$4z\overline{z} - 6zi + 6\overline{z}i + 9 > 36z\overline{z} - 6zi + 6\overline{z}i + 1 \Leftrightarrow$$

$$32z\overline{z} < 8 \Leftrightarrow z\overline{z} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z|^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{2}$$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$

**β)** Επειδή $|z| < \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$0 < |z|^x + (2012)^{1-x} < \left(\frac{1}{2}\right)^x + (2012)^{1-x} \qquad (2)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(2012)^{1-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2012}{(2012)^x} = 0\text{ , αφού } \lim_{x\to+\infty}(2012)^x = +\infty$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + (2012)^{1-x}\right] = 0 \qquad (3)$$

Επίσης $\lim_{x\to+\infty} 0 = 0 \quad (4)$

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[|z|^x + (2012)^{1-x}\right] = 0$$

**γ)** Είναι:

$$\frac{|3z_1+7z_2|}{5} \le \frac{3|z_1|+7|z_2|}{5} < \frac{3\cdot\frac{1}{2}+7\cdot\frac{1}{2}}{5} = 1$$

Επειδή η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f\left(\frac{|3z_1+7z_2|}{5}\right) < f(1) \Rightarrow 2f\left(\frac{|3z_1+7z_2|}{5}\right) < 2f(1)$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha$ με $\alpha \ge 0$, ισχύει:

$$2f(1) \le f(1-\alpha)+f(1+\alpha)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\alpha = 0$ τότε η ισχύει η ισότητα.
- Αν $\alpha > 0$ τότε εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f$ σε καθένα από τα διαστήματα $[1-\alpha, 1]$ και $[1, 1+\alpha]$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1-\alpha, 1)$ και $\xi_2 \in (1, 1+\alpha)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)} = \frac{f(1)-f(1-\alpha)}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1+\alpha)-f(1)}{1+\alpha-1} = \frac{f(1+\alpha)-f(1)}{\alpha}$$

Η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή, άρα η συνάρτηση $f'$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε:

$$1-\alpha < \xi_1 < 1 < \xi_2 < 1+\alpha \Rightarrow \xi_1 < \xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$$

Άρα

$$\frac{f(1)-f(1-\alpha)}{\alpha} < \frac{f(1+\alpha)-f(1)}{\alpha} \Rightarrow$$

$$f(1)-f(1-\alpha) < f(1+\alpha)-f(1) \Rightarrow$$

$$2f(1) < f(1-\alpha)+f(1+\alpha)$$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει $2f(1) \le f(1-\alpha)+f(1+\alpha)$

Άρα για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha$, με $\alpha \ge 0$, ισχύει:

$$2f\left(\frac{|3z_1+7z_2|}{5}\right) < f(1-\alpha)+f(1+\alpha)$$

## ΘΕΜΑ 33ο :

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- $f(xy) = f(x)f(y) - \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ **, για κάθε** $x, y \in (0,+\infty)$ **(1)**
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \ne 0$ , για κάθε $x \in (0,+\infty)$**

**β) Να βρείτε το $f(1)$**

**γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$**

**δ) Να υπολογίσετε το όριο** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}f(x)\right]^{x^2}$

**ε) Να λύσετε την εξίσωση** $x\left(x+\text{συν}\frac{\pi}{x}\right)=x-1$ **στο διάστημα** $(0,+\infty)$

**στ) Να αποδείξετε ότι** $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\text{εφ}x}\frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)}dt+\int_{\frac{1}{e}}^{\text{σφ}x}\frac{1}{t^2f(t)}dt=1$ **, για κάθε** $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$

**ζ) Αν $g$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $R$ και $\alpha>0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα**

$$I=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}g\big(f(x)\big)\frac{\ln x}{x}dx$$

## ΛΥΣΗ

**α)** Έστω ότι υπάρχει θετικός αριθμός $\rho$ τέτοιος, ώστε $f(\rho)=0$ (2)

Για $x=\rho$ και $y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\rho)=0-\frac{\rho^2+1}{\rho}\overset{(2)}{\Rightarrow}\rho^2+1=0\Rightarrow\rho^2=-1$$

που είναι άτοπο. Άρα $f(x)\neq 0$ , για κάθε $x\in(0,+\infty)$

**β)** Για $x=y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(1)=f^2(1)-2\Leftrightarrow f^2(1)-f(1)-2=0\Leftrightarrow f(1)=2 \quad \text{ή} \quad f(1)=-1$$

Το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει θετικός αριθμός $x_0$ τέτοιος, ώστε για οποιοδήποτε $M>0$ να ισχύει $f(x)>M$ για κάθε $x>x_0$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $f$ για για κατάλληλο x, παίρνει θετική τιμή. Εξάλλου η $f$, ως συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζεται για καμία τιμή του x, διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε $f(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε $f(1)=2$

**γ)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x)=2f(x)-\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow f(x)=x+\frac{1}{x}$$

**δ)** Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}f(x)\right]^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=e^1=e$$ , γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\overset{+\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=1$$

**ε)** Στο διάστημα $(0\,,+\infty)$ έχουμε:

$$x\left(x+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}\right)=x-1\Leftrightarrow x+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}=1-\frac{1}{x}\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}\Leftrightarrow f(x)=1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}\qquad(3)$$

Για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ είναι:

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x^2+1\geq 2x\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0\Leftrightarrow(x-1)^2\geq 0$$

Επομένως για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ είναι $f(x)=x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, το $f(1)=2$

Επίσης για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ ισχύει $1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x}\leq 2$

Επομένως η εξίσωση (3) θα έχει λύση αν και μόνο αν $\begin{cases} f(x)=2 \\ 1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x}=-1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

**στ)** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)}dt+\int_{\frac{1}{e}}^{\sigma\varphi x}\frac{1}{t^2 f(t)}dt\ ,\ x\in\left(\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{3}\right)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $h(x)=1$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{6}\,,\,\dfrac{\pi}{3}\right)$

Στο διάστημα αυτό, η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με:

$$h'(x)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\right)}\cdot(\varepsilon\varphi x)'+\frac{1}{\sigma\varphi^2 x\cdot f(\sigma\varphi x)}\cdot(\sigma\varphi x)'=$$

$$=\frac{1}{f\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\right)}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{1}{\sigma\varphi^2 x\cdot f(\sigma\varphi x)}\cdot\frac{-1}{\eta\mu^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon\varphi x}+\varepsilon\varphi x}\cdot\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)-\frac{1}{\sigma\varphi^2 x\cdot\left(\frac{1}{\sigma\varphi x}+\sigma\varphi x\right)}\cdot\left(1+\sigma\varphi^2 x\right)=$$

$$=\frac{\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\cdot\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)-\frac{\sigma\varphi x}{\sigma\varphi^2 x\cdot\left(1+\sigma\varphi^2 x\right)}\cdot\left(1+\sigma\varphi^2 x\right)=$$

$$=\varepsilon\varphi x-\frac{1}{\sigma\varphi x}=\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi x=0$$

Δηλαδή η h είναι σταθερή συνάρτηση στο διάστημα $\left(\dfrac{\pi}{6}\,,\,\dfrac{\pi}{3}\right)$

Είναι:

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{t+\frac{1}{t}}dt+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{t^2\left(t+\frac{1}{t}\right)}dt=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{t}{t^2+1}dt+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{t(t^2+1)}dt=$$

$$=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t(t^2+1)}\right)dt=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{t^2+1}{t(t^2+1)}dt=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{t}dt=\left[\ln t\right]_{\frac{1}{e}}^{1}=$$

$$=\ln 1-\ln\frac{1}{e}=\ln 1-(\ln 1-\ln e)=\ln e=1$$

Άρα $h(x)=1$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$

**ζ)** Είναι**:**

$$I=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}g\left(f(x)\right)\frac{\ln x}{x}dx=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}g\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx$$

Θέτουμε:

$$u=\frac{1}{x},\ \text{οπότε}\ x=\frac{1}{u}\ \text{και}\ dx=-\frac{1}{u^2}du$$

Για $x=\frac{1}{\alpha}$ είναι $u=\alpha$ και για $x=\alpha$ είναι $u=\frac{1}{\alpha}$

Έχουμε:

$$I=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}g\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}g\left(\frac{1}{u}+u\right)\cdot\ln\frac{1}{u}\cdot u\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}g\left(\frac{1}{u}+u\right)\cdot(-\ln u)\cdot\left(-\frac{1}{u}\right)du=\int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}g\left(\frac{1}{u}+u\right)\frac{\ln u}{u}du=$$

$$=-\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}g\left(\frac{1}{u}+u\right)\frac{\ln u}{u}du=-I$$

Είναι $I=-I$, δηλαδή $2I=0$, οπότε $I=0$

## ΘΕΜΑ 34ο :

**Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- $\mathbf{f(x)\ln f(x)+2xf'(x)=0}$ **, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (1)**
- $\mathbf{f(x)>0}$ **, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (2)**

- $\mathbf{f(1)=e}$ **(3)**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ , $x\in(0,+\infty)$**

**β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}$**

**γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι $2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}\geq 3-x$**

**δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_e^{e^2} f^{-1}(x)\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)dx$**

**ε) Να αποδείξετε ότι $e+\sqrt[7]{e}>2\sqrt[5]{e}$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f(x)\ln f(x)+2xf'(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln f(x)+\sqrt{x}\,\frac{f'(x)}{f(x)}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{x}\ln f(x)\right)'=0\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln f(x)=c$$

Είναι:

$$f(1)=e,\ \text{οπότε}\ c=1$$

Άρα:

$$\sqrt{x}\ln f(x)=1\Leftrightarrow\ln f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}},\ x\in(0,+\infty)$$

**β)** Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$$e^{\frac{1}{\sqrt{x_1}}}=e^{\frac{1}{\sqrt{x_2}}}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x_1}}=\frac{1}{\sqrt{x_2}}\Rightarrow\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1 – 1 », οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f, θέτουμε $f(x)=y$ και λύνουμε ως προς x.

Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{cases}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=y\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}=\ln y\\ y>0\\ \ln y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=\frac{1}{\ln y}\\ y>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\ln^2 y}\\ y>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f^{-1}(y)=\frac{1}{\ln^2 y}\\ y>1\end{cases}$$

Άρα

$$f^{-1}:(1,+\infty)\to R\ \text{με}\ f^{-1}(x)=\frac{1}{\ln^2 x}$$

**γ)** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με:

$$f\,'(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{2x\sqrt{x}} < 0$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο στο $(0, +\infty)$

Η συνάρτηση $f\,'$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με:

$$f\,''(x) = -\frac{\dfrac{-e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{2x\sqrt{x}} \cdot 2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{4x^3} = \frac{3\sqrt{x}+1}{4x^3} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} > 0$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης $(\varepsilon)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ στο $x_0 = 1$, είναι:

$$(\varepsilon): y - f(1) = f\,'(1)(x-1)$$

Είναι:

$$f(1) = e \quad \text{και} \quad f\,'(1) = -\frac{e}{2}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon): y - e = -\frac{e}{2}(x-1) \Rightarrow (\varepsilon): y = -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2}$$

Η συνάρτηση είναι κυρτή, οπότε η εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής, είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \geq -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2} \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \geq \frac{-x+3}{2} \Leftrightarrow 2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \geq 3-x$$

**δ)** Με δεδομένο ότι $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\ln^2 x}$, έχουμε:

$$I = \int_e^{e^2} f^{-1}(x)\left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x}dx - \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x}dx$$

Αν θέσουμε $I_1 = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x}dx$, τότε

$$I_1 = \int_e^{e^2} x'\frac{1}{\ln^2 x}dx = \left[\frac{x}{\ln^2 x}\right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x\frac{-1}{\ln^3 x}\cdot\frac{2}{x}dx = \frac{e^2}{4} - e + \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x}dx$$

οπότε

$$I = \frac{e^2}{4} - e + \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x}dx - \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x}dx = \frac{e^2}{4} - e$$

**ε)** Σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 25]$ και $[25, 49]$ εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 25)$ και $\xi_2 \in (25, 49)$ τέτοια, ώστε:

$$f\,'(\xi_1) = \frac{f(25) - f(1)}{24} \quad \text{και} \quad f\,'(\xi_2) = \frac{f(49) - f(25)}{24}$$

και η συνάρτηση $f'$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow f(25) - f(1) < f(49) - f(25) \Rightarrow$$

$$2f(25) < f(1) + f(49) \Rightarrow 2e^{\frac{1}{5}} < e + e^{\frac{1}{7}} \Rightarrow e + \sqrt[7]{e} > 2\sqrt[5]{e}$$

## ΘΕΜΑ 35ο :

**Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- **$f'(-x)f(x) = -x$ , για κάθε $x \in R$ (1)**
- **$f(0) = 1$ (2)**

**Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(-x)}{f(x)}$ , $x \in R$**

**α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$**

**β) Να αποδείξετε ότι η $f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $R$, το οποίο και να προσδιορίσετε.**

**γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g$ είναι σταθερή.**

**δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ , $x \in R$**

**ε) Να μελετήσετε ως προς το πρόσημο τη συνάρτηση $h(x) = \int_1^x f(t)\,dt$**

**στ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_h$ τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ , $x = 1$ και τον άξονα $x'x$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(0) \cdot f(0) = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f'(0) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$$

**β)** Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in R$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ (3)

Για $x = x_0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(-x_0) \cdot f(x_0) = -x_0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} f'(-x_0) \cdot 0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

δηλαδή $f(0) = 0$, που είναι άτοπο, αφού από υπόθεση είναι $f(0) = 1$

Επομένως για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) \neq 0$

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $R$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $R$, και επειδή $f(0) = 1 > 0$, θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

**γ)** Η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = \frac{-f'(-x) \cdot f(x) - f'(x) \cdot f(-x)}{f^2(x)} , \quad x \in R \qquad (4)$$

Αν στη σχέση (1), όπου $x$ θέσουμε το $-x$ έχουμε:

$$f'(x)\cdot f(-x) = x \ , \ \ x\in R \qquad (5)$$

Η σχέση (4) με βάση τις σχέσεις (1) και (5) γράφεται:

$$g'(x) = \frac{-(-x)-x}{f^2(x)} = 0 \ , \ \ x\in R$$

Άρα η συνάρτηση $g$ είναι σταθερή στο $R$, οπότε $g(x) = c$, για κάθε $x\in R$

Για $x = 0$ είναι:

$$g(0) = c \Leftrightarrow \frac{f(0)}{f(0)} = c \Leftrightarrow c = 1$$

οπότε:

$$g(x) = 1 \ , \ \ x\in R$$

**δ)** Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$f(x)f'(x) = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \Rightarrow f^2(x) = x^2 + c$$

και επειδή $f(x) > 0$ θα είναι $f(x) = \sqrt{x^2+c}$ για κάθε $x\in R$

Για $x = 0$ είναι:

$$f(0) = \sqrt{0+c} \Leftrightarrow 1 = \sqrt{c} \ \ \text{άρα} \ \ c = 1$$

οπότε ο τύπος της $f$ είναι:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}, \ \text{για κάθε } x\in R$$

**ε)** Η συνάρτηση $h$ είναι παραγωγίσιμη, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $f$ με $h'(x) = f(x) > 0$, για κάθε $x\in R$, άρα η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Είναι:

$$h(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0 \qquad (8)$$

άρα ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $h(x) = 0$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση h

είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1 – 1» στο R

Επομένως:

- Για $x\in(-\infty\,,\,1) \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x) < h(1) \Leftrightarrow h(x) < 0$
- Για $x\in(1\,,\,+\infty) \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x) > h(1) \Leftrightarrow h(x) > 0$

**στ)** Η συνάρτηση $h$ είναι συνεχής και $h(x) < 0$ για κάθε $x\in[0\,,\,1]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_h$ τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, είναι:

$$E=-\int_0^1 h(x)\,dx=-\int_0^1 x'h(x)dx=-\left[x\,h(x)\right]_0^1+\int_0^1 x\,h'(x)\,dx=$$

$$=-h(1)+\int_0^1 x\,f(x)\,dx\overset{(8)}{=}\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

Θέτουμε:

$x^2+1=u$, οπότε $2x\,dx=du$

Όταν $x=0$ το $u=1$ και όταν $x=1$ το $u=2$

Επομένως έχουμε:

$$E=\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

## ΘΕΜΑ 36ο :

**Δίνεται η συνάρτηση $G(x)=\displaystyle\int_0^{\ln x}\frac{e^t}{e^t+x}dt$ , $x>0$**

**α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $G$**

**β) Αν $G(x)=\ln\dfrac{2x}{1+x}$ , $x>0$, τότε:**

**i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $G$ ως προς τη μονοτονία.**

**ii) Να βρείτε το πρόσημο της $G$, για τις διάφορες τιμές του $x$**

**iii) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $G$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=\lambda$ , $0<\lambda<1$**

**iv) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)=\ln 2$**

**v) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_e^x\frac{1}{G(t)}dt>\frac{x-e}{G(x)}$, για κάθε $x>e$**

## ΛΥΣΗ

**α) $1^{ος}$ τρόπος:**

Θέτουμε:

$e^t+x=u$, οπότε $e^t dt=du$

Όταν $t=0$ το $u=x+1$ και όταν $t=\ln x$ το $u=2x$

Επομένως για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$G(x)=\int_0^{\ln x}\frac{e^t}{e^t+x}dt=\int_{x+1}^{2x}\frac{1}{u}du=\left[\ln u\right]_{x+1}^{2x}=\ln(2x)-\ln(x+1)=\ln\frac{2x}{x+1}\quad(1)$$

**$2^{ος}$ τρόπος:**

$$G(x)=\int_0^{\ln x}\frac{e^t}{e^t+x}dt=\int_0^{\ln x}\frac{(e^t+x)'}{e^t+x}dt=\int_0^{\ln x}\left[\ln(e^t+x)\right]'dt=$$

$$= \Big[\ln(e^t + x)\Big]_0^{\ln x} = \ln(e^{\ln x} + x) - \ln(e^0 + x) =$$

$$= \ln(2x) - \ln(x+1) = \ln\frac{2x}{x+1}\ ,\quad x > 0$$

**β) i)** Η $G$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,\ +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$G'(x) = \frac{1}{\frac{2x}{x+1}}\cdot\left(\frac{2x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{2x}\cdot\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)} > 0 \qquad (2)$$

Επομένως η συνάρτηση $G$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$

**ii)** Είναι:

$$G(1) = \int_0^0 \frac{e^t}{e^t + x}\,dt = 0$$

άρα ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $G(x) = 0$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση $G$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1 – 1» στο $(0,+\infty)$

Επομένως:

- Για $0 < x < 1 \overset{G\uparrow}{\Rightarrow} G(x) < G(1) \Leftrightarrow G(x) < 0$
- Για $x > 1 \overset{G\uparrow}{\Rightarrow} G(x) > G(1) \Leftrightarrow G(x) > 0$
- Για $x = 1 \Rightarrow G(x) = G(1) \Leftrightarrow G(x) = 0$

**iii)** Η συνάρτηση $G$ είναι συνεχής και $G(x) < 0$ για κάθε $x \in [\lambda, 1] \subseteq [0, 1]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_G$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$, $0 < \lambda < 1$ είναι:

$$E = -\int_\lambda^1 G(x)dx = \int_1^\lambda G(x)dx = \int_1^\lambda x'G(x)dx = \big[xG(x)\big]_1^\lambda - \int_1^\lambda xG'(x)dx \overset{(1),(2)}{=}$$

$$= \left[x\ln\frac{2x}{x+1}\right]_1^\lambda - \int_1^\lambda x\frac{1}{x(x+1)}dx = \lambda\ln\frac{2\lambda}{\lambda+1} - \int_1^\lambda \frac{1}{x+1}dx =$$

$$= \lambda\ln\frac{2\lambda}{\lambda+1} - \Big[\ln|x+1|\Big]_1^\lambda = \lambda\ln\frac{2\lambda}{\lambda+1} - \ln(\lambda+1) + \ln 2\ ,\quad 0 < \lambda < 1$$

**iv)** Είναι:

$$\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+}\big[\lambda\ln 2\lambda - \lambda\ln(\lambda+1) - \ln(\lambda+1) + \ln 2\big] =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0^+}\big[\lambda\ln 2\lambda - (\lambda+1)\ln(\lambda+1) + \ln 2\big] = \ln 2$$

διότι:

- $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}(\lambda\ln 2\lambda) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{\ln 2\lambda}{\frac{1}{\lambda}} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = \lim\limits_{\lambda\to 0^+}(-\lambda) = 0$
- $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\big[(\lambda+1)\ln(\lambda+1)\big] = 0$

**v)** Για $e < t \le x \overset{G\uparrow}{\Rightarrow} 0 < G(t) \le G(x) \Rightarrow \dfrac{1}{G(t)} \ge \dfrac{1}{G(x)} \Rightarrow \dfrac{1}{G(t)} - \dfrac{1}{G(x)} \ge 0$, οπότε

$$\int_e^x \left(\frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)}\right) dt > 0 \quad (3), \text{ αφού } \frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)} \text{ δεν είναι παντού μηδέν.}$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \int_e^x \frac{1}{G(x)} dt \Rightarrow \int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \frac{1}{G(x)}(x-e) \Rightarrow \int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \frac{x-e}{G(x)}, \quad x > e$$

## ΘΕΜΑ 37ο :

**Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- **$f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ (1)**
- **$f(0) = 1$ (2)**

**Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_g$ της συνάρτησης $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = u$, με $u > 0$ είναι $E(u) = u\int_0^u f(t)dt + \frac{1}{2}f(u)$ (3), τότε:**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \ge 0$**

**β) Να βρείτε τα όρια:**

**i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^x g(t)dt}{x^{\nu}}$ για τις διάφορες τιμές του $\nu \in N$ με $\nu \ge 1$**

**ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt$**

**γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής**

**δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx > \dfrac{1}{2\sqrt[4]{e}}$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$f(t) > 0 \text{ για κάθε } t \in [0, x], \text{ με } x > 0$$

οπότε

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_g$ της συνάρτησης $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = u$, με $u > 0$ είναι:

$$E(u)=\int_0^u\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)dx \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\int_0^u\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)dx=u\int_0^u f(t)\,dt+\frac{1}{2}f(u) \qquad (5)$$

Παραγωγίζοντας λοιπόν και τα δύο μέλη της σχέσης (5) έχουμε:

$$\int_0^u f(t)\,dt=\int_0^u f(t)\,dt+u\,f(u)+\frac{1}{2}f'(u)\Leftrightarrow$$

$$u\,f(u)+\frac{1}{2}f'(u)=0\Leftrightarrow f'(u)=-2u\,f(u)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=-2u\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\left(\ln f(u)\right)'=\left(-u^2\right)'\Leftrightarrow \ln f(u)=-u^2+c \qquad (6)$$

Είναι:

$$f(0)=1,\text{ οπότε } c=0$$

Άρα η σχέση (6) γράφεται:

$$\ln f(u)=-u^2\Leftrightarrow f(u)=e^{-u^2},\quad u>0 \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (2) και (7) συμπεραίνουμε ότι:

$$f(x)=e^{-x^2},\quad x\ge 0$$

**β) i)** Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\nu=1$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x^\nu}\overset{\nu=1}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}(*)}{=}}\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\int_0^x f(t)\,dt=0$$

(*) Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, οπότε είναι και συνεχής, άρα $\lim\limits_{x\to0^+}G(x)=G(0)=0$

- Αν $\nu\ge2$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x^\nu}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)}{\nu x^{\nu-1}}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{g'(x)}{\nu(\nu-1)x^{\nu-2}}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\nu(\nu-1)x^{\nu-2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x^2}}{\nu(\nu-1)x^{\nu-2}}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-x^2}}{\nu(\nu-1)}\cdot\frac{1}{x^{\nu-2}}\right)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x^2}}{\nu(\nu-1)}=\frac{1}{\nu(\nu-1)}\quad\text{ και }\quad\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^{\nu-2}}=\begin{cases}1\ , & \text{αν } \nu=2\\ +\infty\ , & \text{αν } \nu>2\end{cases}$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x^\nu}=\begin{cases}0 & ,\ \text{αν}\ \nu=1\\ \frac{1}{2} & ,\ \text{αν}\ \nu=2\\ +\infty & ,\ \text{αν}\ \nu>2\end{cases}$$

**ii)** Για $x>0$ έχουμε:

$$x\le t\le x+1\Rightarrow x^2\le t^2\le (x+1)^2\Leftrightarrow -(x+1)^2\le -t^2\le -x^2\overset{e^t\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{-(x+1)^2}\le e^{-t^2}\le e^{-x^2}$$

οπότε:

$$\int_x^{x+1} e^{-(x+1)^2}dt\le\int_x^{x+1} e^{-t^2}dt\le\int_x^{x+1} e^{-x^2}dt\Leftrightarrow$$

$$e^{-(x+1)^2}\left(x+1-x\right)\le\int_x^{x+1} e^{-t^2}dt\le e^{-x^2}\left(x+1-x\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{e^{(x+1)^2}}\le\int_x^{x+1} f(t)\,dt\le\frac{1}{e^{x^2}}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{(x+1)^2}}=0\quad\text{και}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,dt=0$

**γ)** Για κάθε $x>0$ έχουμε:

- $f'(x)=-2xe^{-x^2}$
- $f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$

Είναι:

- $f''(x)=0\Leftrightarrow 2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f''(x)>0\Leftrightarrow 2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)>0\Leftrightarrow x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

Το πρόσημο της $f''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ | |

Είναι:

- $\begin{cases} \text{f συνεχής στο } \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ f''(x) < 0 \text{ στο } \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

- $\begin{cases} \text{f συνεχής στο } \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \\ f''(x) > 0 \text{ στο } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

- $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ και εκατέρωθεν του $x_o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ αλλάζει η κυρτότητα της συνάρτησης f, άρα

  το σημείο $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$, δηλαδή το $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης f

**δ)** Στο (γ) ερώτημα αποδείξαμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = -2xe^{-x^2} < 0$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα και στο $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, οπότε έχουμε:

$$0 < x < \frac{1}{2} \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(0) > f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

Άρα:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx > \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}\right) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx > e^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2} - 0\right) \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx > \frac{1}{2\sqrt[4]{e}}$$

## ΘΕΜΑ 38ο :

**Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_x^{x^2} e^{x-t}dt$, $x \in R$**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 - e^{-x^2+x}$, $x \in R$**

**β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f**

**δ) Να αποδείξετε ότι:**

**i) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$**

**ii) $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$**

**ε) Να υπολογίσετε τα όρια:**

**i)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\cdot ημ(2012x)\right)$

**ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2012\cdot f(x)+\dfrac{ημx}{x}\right)$

**στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=(2x-1)f(x)$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{1}{2}$ και $x=1$**

## ΛΥΣΗ

**α) $1^{ος}$ τρόπος:**

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f(x)=\int_x^{x^2}e^{x-t}dt=-\int_x^{x^2}e^{x-t}(x-t)'dt=-\left[e^{x-t}\right]_x^{x^2}=$$

$$=-\left(e^{x-x^2}-e^{x-x}\right)=-e^{-x^2+x}+1$$

**$2^{ος}$ τρόπος:**

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f(x)=\int_x^{x^2}e^{x-t}dt=\int_x^{x^2}e^xe^{-t}dt=e^x\int_x^{x^2}e^{-t}dt=e^x\left(\int_0^{x^2}e^{-t}dt-\int_0^{x}e^{-t}dt\right)$$

Η συνάρτηση $e^{-t}$ είναι συνεχής στο R, επομένως οι συναρτήσεις $\int_0^{x^2}e^{-t}dt$ και $\int_0^{x}e^{-t}dt$ είναι παραγωγίσιμες στο R. Επίσης η $e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(e^x\right)'\left(\int_0^{x^2}e^{-t}dt-\int_0^{x}e^{-t}dt\right)+e^x\left(\int_0^{x^2}e^{-t}dt-\int_0^{x}e^{-t}dt\right)'=$$

$$=e^x\left(\int_0^{x^2}e^{-t}dt-\int_0^{x}e^{-t}dt\right)+e^x\left(e^{-x^2}(x^2)'-e^{-x}\right)=$$

$$=f(x)+e^x\left(2xe^{-x^2}-e^{-x}\right)=f(x)+2xe^{-x^2+x}-1,\ x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=f(x)+2xe^{-x^2+x}-1\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=2xe^{-x^2+x}-1\overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=2xe^{-x^2+x}e^{-x}-e^{-x}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{-x}+(e^{-x})'f(x)=2xe^{-x^2}-e^{-x}\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)e^{-x}\right)'=\left(-e^{-x^2}+e^{-x}\right)'$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f(x)e^{-x}=-e^{-x^2}+e^{-x}+c\qquad(1)$$

Για $x=0$ από τη δοθείσα σχέση έχουμε $f(0)=\int_0^0 e^{0-t}dt=0$ και από τη σχέση (1) έχουμε $c=0$, οπότε:

$$f(x)e^{-x}=-e^{-x^2}+e^{-x}\overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} f(x)=-e^{-x^2+x}+1\ ,\quad x\in R$$

**β)** Για κάθε $x\in R$ είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο:

$$f'(x)=-e^{-x^2+x}(-x^2+x)'=(2x-1)e^{-x^2+x}$$

Είναι:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow(2x-1)e^{-x^2+x}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow(2x-1)e^{-x^2+x}>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $1-\sqrt[4]{e}$<br>ελάχιστο | $\nearrow$ |

Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right)$. Επίσης η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=\frac{1}{2}$ με ελάχιστη τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right)=-e^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}+1=-e^{\frac{1}{4}}+1=1-\sqrt[4]{e}$

**γ)**
- Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο R, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- Για $x\in(0\ ,+\infty)$ είναι:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x^2+x}\right)\overset{-x^2+x=t}{=}\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-x^2+x}+1\right)=0+1=1 \qquad (2)$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης $f$ στο $+\infty$

- Για $x\in(-\infty\ ,0)$ είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x^2+x}\right)\overset{-x^2+x=t}{=}\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{-x^2+x}+1\right)=0+1=1 \qquad (3)$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης $f$ στο $-\infty$

**δ)** Το πρόσημο της συνάρτησης $-x^2+x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $-x^2+x$ | $-$ | $+$ | $0$ | $-$ |

**i)** Για κάθε $x\in(-\infty\,,0)\cup(0\,,+\infty)$ είναι:

$$-x^2+x<0\Leftrightarrow e^{-x^2+x}<e^0\Leftrightarrow e^{-x^2+x}<1\Leftrightarrow$$

$$-e^{-x^2+x}>-1\Leftrightarrow -e^{-x^2+x}+1>0\Leftrightarrow f(x)>0$$

**ii)** Για κάθε $x\in[0\,,1]$ είναι:

$$-x^2+x\ge 0\Leftrightarrow e^{-x^2+x}\ge e^0\Leftrightarrow e^{-x^2+x}\ge 1\Leftrightarrow$$

$$-e^{-x^2+x}\le -1\Leftrightarrow -e^{-x^2+x}+1\le 0\Leftrightarrow f(x)\le 0$$

**ε)** **i)** Για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ είναι:

$$\left|\frac{\eta\mu(2012x)}{x}\right|=\frac{|\eta\mu(2012x)|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}=\frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\left|\frac{\eta\mu(2012x)}{x}\right|\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow -\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu(2012x)}{x}\le\frac{1}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu(2012x)}{x}=0$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot\eta\mu(2012x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\frac{\eta\mu(2012x)}{x}\right)=1\cdot 0=0$$

**ii)** Για κάθε $x\in(-\infty\,,0)$ είναι:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \le -\frac{1}{x} \Leftrightarrow -\left(-\frac{1}{x}\right) \le \frac{\eta\mu x}{x} \le -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le -\frac{1}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

Από τη σχέση (3) έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2012\cdot f(x) + \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 2012\cdot 1 + 0 = 2012$$

**στ)** Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Επίσης για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subseteq [0, 1]$ είναι $2x - 1 \ge 0$ και $f(x) \le 0$, οπότε $g(x) = (2x-1)f(x) \le 0$. Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_g$ της συνάρτησης $g$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$ και $x = 1$, είναι:

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{1} -g(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} -(2x-1)f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2x)\left(-e^{-x^2+x}+1\right)dx =$$

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2x)\cdot e^{-x^2+x}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2x)dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(e^{-x^2+x}\right)'dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-x^2\right)'dx =$$

$$= -\left[e^{-x^2+x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[x-x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -\left(1-e^{\frac{1}{4}}\right) + \left(0-\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} - \frac{5}{4} = \sqrt[4]{e} - \frac{5}{4}$$

## ΘΕΜΑ 39ο :

**Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- $\left(f''(x)+1\right)\sigma\upsilon\nu x - f'(x)\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du = 0\ ,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **(1)**
- $f''(0)+1 = f'(0) = f(0) = 0$ **(2)**

**α) Να αποδείξετε ότι** $\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du = \eta\mu x\ ,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

**β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln(\sigma\upsilon\nu x)$ , $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$**

**γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$**

**δ) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta$ για κάθε $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$**

**ε) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu^2 x}$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\int_{-x}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du=\int_{-x}^{0}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du+\int_{0}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du \qquad (3)$$

Είναι:

$$I_1=\int_{-x}^{0}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du$$

Θέτουμε:

$$u=-t,\ \text{οπότε}\ du=-dt$$

Για $u=-x$ είναι $t=x$ και για $u=0$ είναι $t=0$

Έχουμε:

$$I_1=\int_{x}^{0}\frac{\sigma\upsilon\nu(-t)}{1+e^{-t}}(-dt)=-\int_{x}^{0}\frac{e^t\sigma\upsilon\nu t}{e^t(1+e^{-t})}dt=\int_{0}^{x}\frac{e^t\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt=\int_{0}^{x}\frac{e^u\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\int_{-x}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du=\int_{0}^{x}\frac{e^u\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du+\int_{0}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du=\int_{0}^{x}\left(\frac{e^u\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}+\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}\right)du=$$

$$=\int_{0}^{x}\frac{(e^u+1)\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du=\int_{0}^{x}\sigma\upsilon\nu u\,du=\left[\eta\mu u\right]_0^x=\eta\mu x-\eta\mu 0=\eta\mu x \qquad (5)$$

**β)** Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\left(f''(x)+1\right)\sigma\upsilon\nu x-f'(x)\int_{-x}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du=0\overset{(5)}{\Leftrightarrow}\left(f''(x)+1\right)\sigma\upsilon\nu x-f'(x)\eta\mu x=0\Leftrightarrow$$

$$f''(x)\sigma\upsilon\nu x-f'(x)\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\left(f'(x)\sigma\upsilon\nu x\right)'=\left(-\eta\mu x\right)'\Leftrightarrow$$

$$f'(x)\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x + c_1 \ , \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f'(0)\sigma\upsilon\nu 0 = -\eta\mu 0 + c_1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0 \cdot 1 = 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$f'(x)\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}(\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\right)' \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right) + c_2 \ , \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = \ln\left(\sigma\upsilon\nu 0\right) + c_2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0 = \ln 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Άρα:

$$f(x) = \ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right) \ , \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

**γ)** Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\right)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}(\sigma\upsilon\nu x)' = -\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\varepsilon\varphi x$$

$$f''(x) = (-\varepsilon\varphi x)' = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} < 0$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

**δ)** Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\alpha = \beta$, τότε ισχύει η ισότητα.
- Αν $\alpha < \beta$, τότε η συνάρτηση $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε δύο διαστήματα, στα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$, οπότε θα υπάρχουν:
  - $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$
  - $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

Η συνάρτηση $f$ είναι κοίλη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα η συνάρτηση $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, οπότε ισχύει:

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\xi_1<\xi_2<\beta<\frac{\pi}{2} \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)>f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \overset{\beta-\alpha>0}{\Rightarrow}$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha) > f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha)+f(\beta) \Rightarrow$$

$$2\ln\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)+\ln(\sigma\upsilon\nu\beta) \Rightarrow \ln\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \ln(\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta) \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha+\beta}{2} > \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta$$

- Αν $\alpha>\beta \Leftrightarrow \beta<\alpha$, τότε η συνάρτηση $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε δύο διαστήματα, στα $\left[\beta\,,\,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\,,\,\alpha\right]$, οπότε με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στην αποδεικτέα σχέση.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει η σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta, \text{ για κάθε } \alpha\,,\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$$

**ε)** Για $x$ « κοντά στο 0 » έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\left(\eta\mu^2 x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\cdot\frac{x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\cdot\frac{1}{2\frac{\eta\mu x}{x}\sigma\upsilon\nu x}\right) = f''(0)\cdot\frac{1}{2\cdot 1\cdot\sigma\upsilon\nu 0} = -1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$