**ΘΕΜΑΤΑ**

**1.**Αν ,να αποδείξετε ότι η Cf δεν δέχεται εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους.

**2.**Έστω συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο R και ∀ x∈R ισχύει:

x2f(x)≤ημ3x+x5.

i) Αν η f περιττή να βρεθεί ο τύπος της.

ii) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x0=0.

**3.**Να βρεθούν τα α∈R ώστε να υπάρχουν δύο εφαπτομένες της Cf της f(x)=x2+αx+1 που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και τέμνονται κάθετα.

**4.**Δίνεται η συνάρτηση 

Να αποδείξετε ότι: α) η f είναι αύξουσα στο (0,+∞)

β) η ψ=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της Cf

γ) η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μία λύση στο [1/4,1].

**5.**Αν η f΄ συνεχής στο R και ισχύει:,να αποδείξετε ότι είναι δυό φορές παραγωγίσιμη στο x0=0.

**6.**Έστω f παραγωγίσιμη στο (0,+∞), με .

Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(1,2),να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

**7.**α) Δείξτε ότι:

β) Δείξτε ότι:

**8.**Έστω συνάρτηση f συνεχής στο (0,+∞) με Να βρείτε την κλίση της Cf στο x0=1.

**9.**Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο [0,1] και τέτοια ώστε :0<f(t)<1 ∀t∈[0,1].

Θεωρούμε ακολούθως και την 

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση ,έχει μοναδική λύση στο (0,1).

**10.**Θεωρούμε την συνάρτηση f:R→R με τύπο f(x)=καx+λβx+μγx,όπου

0<α,β,γ≠1 και κ,λ,μ ∈R και όχι όλοι μηδενικοί.

α) Αν f(x)≥κ+λ+μ ∀x∈R αποδείξτε ότι:ακβλγμ=1.

β) Αν κ,λ,μ≥0 και όχι όλοι μηδενικοί αποδείξτε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

**11.**Αν ,να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να λυθεί η ανίσωση:.

**12.**Έστω η συνάρτηση .Αν ,τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:.

β) Η παίρνει την τιμή 2/3 στο (0,1).

**13.**Δίνεται η .Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x0=4 και ισχύει:,να βρεθούν τα α,β∈R.

**14.**Έστω f συνεχής στο R με  η μέση τιμή της f στο [-1,1],να βρεθεί το λ∈R ώστε να ισχύει:.

**15.**Έστω .

α) Να βρεθούν οι κ,λ∈R,ώστε η g να είναι παράγουσα της f στο R\*.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf τον x΄x και τις ευθείες x=1,x=2.

**16.**Να βρεθεί ο α,αν στο σημείο τομής των , οι εφαπτομένες είναι κάθετες μεταξύ τους.

**17.**Δείξτε ότι αν 0<3α<8 τότε η συνάρτηση ,στρέφει τα κοίλα άνω ∀x∈R.

**18.**Έστω F το σύνολο των συναρτήσεων f που παράγεται σύμφωνα με τον τύπο:.

α) Να καθορισθεί (εφ’ όσον υπάρχει) συνάρτηση f∈F συνεχής στο R.

β) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που καθορίζεται από την Cf ,τον θετικό ημιάξονα Οx και την ευθεία x=e.

**19.**Να προσδιορισθεί η εξίσωση ψ=f(x) καμπύλης (κ) εφ’ όσον αυτή κείται μέσα στην πρώτη γωνία των αξόνων και εκπληρώνει τους ακόλουθους όρους:

α) Η (κ) διέρχεται από το σημείο Ρ(2,2).

β) Η f(x) είναι παραγωγίσιμη στο  με f΄(x)≠0 ∀x∈(0,+∞).

γ) Η εφαπτομένη της (κ) σε ένα σημείο Α(x0,f(x0)) τέμνει τον x-άξονα στο Β και τον ψ-άξονα στο Μ και το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

**20.**Θεωρούμε τις συναρτήσεις που παράγονται από τον τύπο: .Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία και μόνο μία συνάρτηση του παραπάνω συνόλου που είναι συνεχής στο R.

**21.**Θεωρούμε την συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο Δ=(0,+∞) και τέτοια ώστε να είναι .

α) Αν ,δείξτε ότι η g είναι σταθερή στο Δ.

β) Αν Ρ(4,1) είναι ένα σημείο της Cf,να προσδιοριστεί η f(x) και να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**22.**Έστω .

α) Να βρεθεί ο λ ώστε στο [-1,0] να ισχύει:.

β) Δείξτε ότι ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο +∞.

**23.**Να δείξετε ότι η εξίσωση 2συν2x-5x=1 έχει μοναδική ρίζα στο (0,π).

**24.**Αν f συνεχής με ,να βρεθούν οι τιμές των λ∈Ζ\* και θ∈(0,π) και να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο R.

**25.**Αν f ορισμένη στο (0,+∞) με f΄(x3)=2 ∀x∈(0,+∞) να βρεθεί ο α∈R ώστε η Cf να διέρχεται από τα σημεία Α(8,15) και Β(1,2α3-α2).

**26.**i) Αποδείξτε ότι ∀x>0,x2-2lnx-1≥0.

ii) Έστω .

α) Δείξτε ότι η ψ=x είναι ασύμπτωτη της Cf.

β) Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα.

γ) Να βρείτε σημείο Μ,ώστε η εφαπτομένη στο Μ να είναι παρ/λη με την ψ=x.

δ) Να βρείτε το σημείο τομής του x΄x με την εφαπτομένη της Cf στο Α(1,f(1)).

ε) Να αποδείξετε ότι η f(x)=0 έχει μοναδική λύση στο (1/2,1).

**27.**Έστω η συνεχής συνάρτηση f:(0,+∞)→R. Να αποδείξετε ότι:

.

**28.**α) Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο [0,α],α>0.Να αποδείξετε ότι ισχύει:

.

β) .

**29.**Έστω η συνάρτηση f με f΄΄ συνεχή στο [α,β].Αν f΄(α)=f(α) και f΄(β)=f(β),να αποδείξετε ότι:.

**30.**Έστω η συνάρτηση .

α) Να αποδείξετε ότι:Αν 0<x<1 και f(x)≥0 τότε ισχύει:x≤1/e.

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες x=1/2,x=1/4,ψ=0 και την γραφική παράσταση της g,όπου .

**31.**Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με f΄(x)ex+f(x)=x(2-x),∀x∈(0,+∞).

Αν η Cf διέρχεται από το σημείο Α(1,-1),να βρεθεί ο τύπος της f και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf ,τον x΄x και τις ευθείες x=1/e,x=1.

**32.**Δείξτε ότι η εξίσωση:αx-3xν+1996=0,όπου 0<α<1 και ν περιττός φυσικός αριθμός,έχει μοναδική λύση.

**33.**Δίνεται η συνάρτηση  .

 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:.

**34.**Δίνεται η συνάρτηση .

α) Να προσδιορίσετε την τιμή του β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής .

β) Να εξετάσετε την μονοτονία της,στο διάστημα (0,1/2).

**35.**Δίνεται η συνάρτηση Να εξετάσετε άν υπάρχει x0∈(0,2π), τέτοιο ώστε:f(x0)=11/2.

**36.**Θεωρούμε τις f,g συνεχείς στο R,ώστε να ισχύει η σχέση:

.Δείξτε ότι η εξίσωση:x3f(x)=xg(x)+2,έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

**37.**Δίνεται η συνάρτηση Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.Να προσδιορισθούν επίσης οι ασύμπτωτες,που τυχόν διαθέτει η γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

**38.**Αν ,να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

**39.**Θεωρούμε την συνάρτηση f,ορισμένη και συνεχή στο [0,1].Ορίζουμε την συνάρτηση .Δείξτε ότι:

α) Υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(0,1),ώστε f(ξ)=f(1-ξ).

β) .

**40.**Θεωρούμε την συνάρτηση f συνεχή για x0=2,και τέτοια ώστε να ισχύει: .Να βρείτε το f(2).

**41.**Έστω Ιν=.Να υπολογίσετε τα εξής:

α) Το Ιν+1 συναρτήσει του Ιν.

β Το άθροισμα S=Ι1+Ι2+Ι3+Ι4.

**42.**Έστω .Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

**43.**Έστω η συνεχής συνάρτηση g:R→R,για την οποία ισχύει:

.Να βρείτε το g(1).

**44.**Έστω Ω={ω1,ω2,ω3} ο δ.χ. ενός πειράματος τύχης με Ρ(ω1)=λ-3/4 και Ρ(ω2)=2μ-7/2,(λ,μ θετικοί ακέραιοι).Δείξτε ότι:Ρ(ω1)=Ρ(ω3)=1/2Ρ(ω2).

**45.**Έστω f παραγωγίσιμη στο R και .Αν f΄(x)>3x2g(x) ∀x∈R\*, να μελετηθεί η g ως προς την μονοτονία.

**46.**Αν  και συνεχής στο x0=0,να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x0=0 και να βρεθεί το f(0).

**47.**Έστω f,g συναρτήσεις ορισμένες στο R.Αν η f συνεχής στο x0=1 και g(x)=⏐x2-x⏐f(x),δείξτε ότι αν η g είναι παρ/μη στο x0=1 τότε f(1)=0.

**48.**Έστω f,g συναρτήσεις ορισμένες στο R με g(x)≠0 ∀x∈R και τέτοιες ώστε:

.Αν η g είναι παρ/μη στο 0 με g΄(0)=- και g(0)=, βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο Μ(0,f(0)).

**49.**Έστω f:R→R με f(x)=ln(x2+1)+μx,μ∈R.Να δειχθεί ότι η Cf έχει δύο Σ.Κ. Α,Β και ότι η ΑΒ τέμνει τον ψ΄ψ σε σημείο με τεταγμένη ανεξάρτητη του μ.

**50.**Θεωρούμε την f παρ/μη στο Δ=[0,1] και τέτοια ώστε ∀x∈Δ να είναι 0<f(x)<1 και f΄(x)≠1.Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)-x=0 έχει μοναδική λύση στο (0,1).

**51.**α) Δίνεται η f:[0,π/2]→R με f(x)=συνx-x+1.Να αποδείξετε ότι η f(x)=0 έχει μοναδική λύση στο (0,π/2)

β) Όμοια για την g(x)=ημx-2x+1 στο (-π/2,π/2).

**52.**Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και ∀x∈R ισχύει: ln(ex+2)+ef(x)=3ex+4x .Δείξτε ότι η f δεν έχει κανένα τοπικό ακρότατο.

**53.**Αν f(x)=(x+3)100-x100-3100,να αποδείξετε ότι η Cf τέμνει σε ένα ακριβώς σημείο τον άξονα x΄x.

**54.**Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και τέτοια ώστε να ισχύει:Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της Cf σε κάθε σημείο της,βρίσκεται κάτω από την Cf.

**55.**Αν f ορισμένη στο R με ,να βρεθεί η τιμή του μ∈R.

**56.**Δίνονται οι συναρτήσεις .Αν η εφαπτομένη της Cf στο σημείο Α(1,f(1)) είναι παράλληλη στον x΄x,να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cg,τον x΄x και τις ευθείες x=0,x=1.

**57.**Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x)=x2,η οποία διέρχεται από το σημείο Α(1/2,0) και δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.Στην συνέχεια να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f,την εφαπτομένη της στο Α και τον x΄x.

**58.**Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f(x)+f΄(x)=x ∀x∈R και f(x)=2.Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**59.**Αν f συνάρτηση ορισμένη στο R και είναι [x2f(x)-3x3+4x2]=2,να βρεθεί η ασύμπτωτη της Cf στο +∞.

**60.**Έστω f συνεχής στο R και ∀x∈R ισχύει:.Να βρεθεί ο λ∈R,αν είναι γνωστό ότι η Cf διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**61.**Έστω g συνεχής στο R και .Αν η Cg διέρχεται από το Α(0,1),να βρεθεί η κλίση της Cf στο Μ(0,f(0)).

**62.**Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο R και συνεχής στο x0=1 ώστε .

α) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x0=1.

β) Αν  να βρεθεί ο ν.

**63.**Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο [0,1] και ισχύουν: f(0)=1, g(1)=2, 2≤f΄(x)≤5, 4≤g΄(x)≤7 ∀x∈(0,1),να δείξετε ότι 5≤f(1)-g(0)≤11.

**64.**Αν η f είναι συνεχής στο x0=0 και ,δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x0=0 και να βρείτε το f΄(0).

**65.**Δίνεται η .Αν τότε:

α) Να υπολογιστούν τα ακρότατα της f.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf και τις ευθείες ψ=0,x=0,x=2.

**66.**Δίνεται η .

α) Να βρεθεί ο λ ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο R.

β) Για τις τιμές του λ που βρήκατε,εξετάστε αν υπάρχουν σημεία καμπής της f.

**67.**α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x)=ln(1+ημx) και να δείξετε ότι:

f΄΄(x)+e-f(x)=0.

β) Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της f στο [0,π].

**68.**α) Να δείξετε ότι η εξίσωση 5x-3-x+x=0 έχει μοναδική ρίζα.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=ex+x , g(x)=e2-x-x+2 με κοινό πεδίο ορισμού το R.Να δείξετε ότι οι Cf,Cg, έχουν ένα και μόνο κοινό σημείο και να το βρείτε.

**69.**Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ∃α∈R ώστε να ισχύει:

f΄(x)>f(α) ∀x∈R,δείξτε ότι f(α+1)>2f(α).

**70.**Έστω  .α) Να βρεθεί η f΄(x), β) Να μελετηθεί η μονοτονία, γ) Δείξτε ότι η f΄(x) είναι συνεχής στο x0=0.

**71.**Θεωρούμε τις συναρτήσεις που παράγονται από τον τύπο: για τις διάφορες τιμές των α,β ∈R.

α) Να προσδιοριστούν οι α,β ώστε οι αντίστοιχες προκύπτουσες συναρτήσεις να έχουν κρίσιμο σημείο το 2.Πότε αυτό το σημείο είναι και σημείο ακροτάτου;

β) Να βρεθούν οι εφαπτομένες των f στα Α(-1,f(-1)),B(1,f(1)).

**72.**α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα .

β) Να βρείτε το .

**73.**Έστω η συνάρτηση f(x)=xx+1 με x∈(0,+∞).Να αποδείξετε ότι f΄(x)≠0 για κάθε x∈(0,+∞).

**74.**Δείξτε ότι αν ισχύει 0<3α<8,τότε η συνάρτηση f(x)=x4-αx3+αx2+x+1 στρέφει τα κοίλα άνω για κάθε x∈R.

**75.**Έστω η συνάρτηση .

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της Cf που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό α,ώστε η ευθεία (η):ψ=α,να διαιρεί σε δύο ισοδύναμα χωρία,την περιοχή του επιπέδου που περικλείεται από την Cf,τον x΄x και την εφαπτομένη ευθεία (ε).

**76.**Έστω συνάρτηση f δύο φορές παρ/μη στο [α,β] και έστω ότι για κάθε x∈[α,β] η f στρέφει τα κοίλα άνω και f(α)=f΄(α)>0.Δείξτε ότι η Cf είναι πάνω από τον x΄x για κάθε x∈[α,β].

**77.**Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο (0,+∞).Αν ψ=2x+β η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, να βρεθεί β∈R\* ώστε να ισχύει:

.

**78.**Έστω συνάρτηση f με τύπο ,ορισμένη στο Α=[α,+∞) με α>e2.

α) Να μελετηθεί η μονοτονία της f στο Α.

β) Δείξτε ότι: με e2<α<β.

**79.**Θεωρούμε την συνάρτηση f:R→R με ,όπου ρ1,ρ2 είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α,Β΄του δειγματικού χώρου Ω.Αν τα ενδεχόμενα Α,Β΄ δεν είναι κενά και f(x)≥2,να δείξετε ότι:

α) ρ1ρ2=1

β) Τα ενδεχόμενα Α και Β είναι αντίθετα(συμπληρωματικά).

**80.**Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:



**81.**Αν η συνάρτηση h είναι συνεχής στο R και ,δείξτε ότι αν η h είναι γνησίως φθίνουσα,τότε και η g είναι γνησίως φθίνουσα.

**82.**Έστω η συνάρτηση f(x)=x2ν-4xν με ν∈Ν και ν>1.Να βρεθεί η μικρότερη δυνατή τιμή του ν ώστε να ισχύει 3f΄(1)=f΄(-1) και στην συνέχεια για την τιμή του ν που βρήκατε να βρεθεί το .

**83.**Αν το σημείο Μ(α,β) ανήκει στον κύκλο (x-2)2+ψ2=1,να δείξετε ότι η εξίσωση

3(α-2)2x2+2β2x-1=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

**84.**Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞),να βρεθεί ο α∈R,ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Α(1,3α+1) και ώστε

.

**85.**Έστω η συνάρτηση .

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της Cg στο (1,g(1)).

β) Να προσδιοριστεί ο λ∈R,ώστε η ευθεία (ε):,να είναι κάθετη στην προηγούμενη εφαπτομένη.

**86.**Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=ημx,τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0,x=π,χωρίζεται από την ευθεία x=λ σε δύο μεικτόγραμμα χωρία με εμβαδά Ε1,Ε2.Αν Ε1=Ε2 να προσδιορισθεί ο λ.

**87.**Δίνεται η συνάρτηση:.Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο με τετμημένη x0=1.

**88.**Αν ,να βρεθεί η πολυωνυμική συνάρτηση f αν f(0)=2 και η εφαπτομένη της Cf στο x0=-1 είναι παράλληλη προς την ευθεία ψ=3x-2.

**89.**Αν ,να βρεθεί η συνάρτηση f αν γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει ακρότατο στο x0=-1 και η γραφική της παράσταση τέμνει τον ψ΄ψ στο σημείο με τεταγμένη 2.Στην συνέχεια να βρεθεί το .

**90.**Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο R και η οποία ικανοποιεί την σχέση: .Δείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη στο x0=0.

**91.**Εστω συνάρτηση f συνεχής στο R,ώστε να επαληθεύει την σχέση:

xf(x)-λημ2x=x2 για κάθε x∈R.Να βρεθεί ο λ,ώστε η εφαπτομένη της Cf στο σημείο Α(0,f(0)),να διέρχεται από το σημείο Μ(1,2).

**92.**Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R,ώστε:f2(x)-4xf(x)≤(x2-2)2-4, x∈R.Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x0=0.

**93.**Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης Cf , της συνάρτησης f(x)=x2, (x≥0),η οποία σχηματίζει με την Cf και τον άξονα Οx, εμβαδόν ισο με 18τ.μ.

**94.**Να αποδείξετε ότι η εξίσωση x+x3+x5=α2(α-x)+β2(β-x), α,β∈R, έχει μία μόνο πραγματική ρίζα.

**95.**Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R και ισχύει ότι:⏐f(x)-α⏐≤(x-α)2 για κάθε α∈R.Δείξτε ότι η ευθεία ψ=α είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x0=α.

**96.**Δίνεται συνάρτηση f με τύπο 

α)Να εξετασθεί η f ως προς την μονοτονία.

β)Να βρεθεί το Σύνολο τιμών της.

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την Cf και τις ευθείες x=1,x=e και ψ=0.

**97.**Να βρεθεί το αν:



**98.**Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο (1,+∞) με f΄΄(x)≠0,να αποδείξετε ότι αν η f είναι κυρτή στο (1,+∞) και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(3,3),τότε θα ισχύει ότι:f(4)+f(2)>6.

**99.**Έστω η συνάρτηση .

α) Δείξτε ότι f(x)>0 για κάθε x∈(0,+∞).

β) Αν ,δείξτε ότι η Cg έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞.

**100.**Έστω η συνάρτηση .

α) Να βρεθεί,αν υπάρχει,η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης,στα σημεία x1=1,x2=0.

β) Να βρεθούν τα ακρότατα της f στο [0,2].

**101.**Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με f΄΄(x)>0, f(0)=0 και ,να αποδείξετε ότι η συνάρτηση ,ορίζεται για κάθε x∈R,και παρουσιάζει ελάχιστο στο x0=0.

**102.**Δείξτε ότι η συνάρτηση f με f(x)=συνx-ln(συνx) είναι γνησίως αύξουσα στο (0,π/2) και στρέφει τα κοίλα άνω στο (0,π/2).

**103.**Δίνεται η συνάρτηση .Να αποδείξετε ότι η f έχει το πολύ ένα ακρότατο.

**104.**Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει το Θ. Rolle στο διάστημα [α,β].να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε οι εφαπτομένες των Cf και Cg στο σημείο με τετμημένη ξ να είναι παράλληλες.

**105.**Αν f,g παραγωγίσιμες στο R και g(x)≠0 και f΄(x)g(x)<f(x)g΄(x) για κάθε x∈R δείξτε ότι αν g(0)=g(1) τότε f(1)<f(0).

**106.**Έστω οι συναρτήσεις f,g ορισμένες στο [1/4,1/2] με f(x)=ex και g(x)=lnx.Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο θετικοί αριθμοί κ,λ∈R τέτοιοι ώστε για κάθε x∈[1/4,1/2] να ισχύει κ+lnx≤λ+lnx.

**107.**Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και τέτοια ώστε να ισχύει:f(x)≥0 για κάθε x∈[α,β] και .

Να αποδείξετε ότι για κάθε x∈[α,β] ισχύει:f(x)=0.

**108.**Δίνεται η συνάρτηση .

α) Δείξτε ότι f(x)>0 για κάθε x≠0.

β) Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την Cf,τον x΄x και τις ευθείες x=1,x=2.

**109.**Αν ,όπου α,β αντίστροφοι θετικοί αριθμοί.

α) Δείξτε ότι με x>α ισχύει:.

β) Αν ,να βρεθούν οι α και β.

**110.**Έστω F:R→R με F(x)=,όπου f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με f(x)=f΄΄(x) για κάθε x∈R.Αν x1,x2 με x1<x2,είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f,να αποδείξετε ότι:

α) F(x1)=-2x1f(x1)+c.

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον x0∈R ώστε:x02f(x0)+2f(x0)+2x0f΄(x0)=0.