Γυμνάσιο- Λ. Τ. Λαιμού Πρεσπών
Λαιμός Πρεσπών, Φλώρινα
Τηλ. 2385051330, 2385051395

Γυμνάσιο- Λ.Τ.
Λαιμού Πρεσπών

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Φυσική Γ΄ Λυκείου (Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης)

ΙΩΑΝΝΗΣ Ν. ΒΕΛΟΝΑΚΗΣ (ΦΥΣΙΚΟΣ)

Κεφάλαιο 5: κρούσεις και σχετικές κινήσεις.

Ορισμοί

1. ***Γραμμική ορμή*** ($\vec{p}$)**:** διανυσματικό φυσικό μέγεθος. Στη Νευτώνεια Μηχανική ορίζεται ίσο με το γινόμενο της μάζας m του σώματος επί τη γραμμική ταχύτητά του $\vec{\upsilon}$ (μονάδα στο S.I. το 1 $Kg.m.s^{-1}$)

$$\vec{p} = m.\vec{\upsilon} \qquad (5.1).$$

2. ***Σύστημα σωμάτων:*** είναι μια συλλογή ενός ή περισσοτέρων σωμάτων που αυθαίρετα τα θεωρούμε και τα μελετάμε σαν ενιαίο σύνολο. Τα υπόλοιπα σώματα θα λέμε ότι αποτελούν το περιβάλλον του συστήματος και χωρίζεται από αυτό με διαχωριστικές γραμμές ή επιφάνειες (συνήθως νοητές) που ονομάζονται όρια του συστήματος. Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα ενός συστήματος μπορούν να ονομαστούν εσωτερικές, όταν ασκούνται από άλλα σώματα του θεωρούμενου συστήματος, και εξωτερικές, όταν ασκούνται από σώματα έξω από το θεωρούμενο σύστημα.

3. ***Μονωμένο σύστημα:*** είναι ένα σύστημα σωμάτων στο οποίο η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με το μηδέν.

Οι Νόμοι του Newton

1^{ος} Νόμος Newton ***(Νόμος της Αδράνειας):*** κάθε σώμα συνεχίζει να παραμένει ακίνητο ή να κινείται ευθύγραμμα ομαλά εφόσον η συνισταμένη των δυνάμεων που επιδρούν σε αυτό είναι μηδενική

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\upsilon} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\upsilon} = \text{σταθερή} \qquad (5.2).$$

2^{ος} Νόμος Newton: (*Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής*)*:* η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα ισούται με το στιγμιαίο χρονικό ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος.

$$\sum \vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \begin{aligned} \sum F_x &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{dp_x}{dt} \,\kappa\alpha\iota \\ \sum F_y &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{dp_y}{dt} \,\kappa\alpha\iota \\ \sum F_z &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p_z}{\Delta t} = \frac{dp_z}{dt} \end{aligned} \qquad (5.3).$$

Παρατήρηση: όταν σε ένα σώμα σταθερής μάζας m, επιδρά συνισταμένη δύναμη το σώμα αποκτά επιτάχυνση ανάλογη της συνισταμένης δύναμης και αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του m, αν βέβαια η ταχύτητά του παραμένει πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό

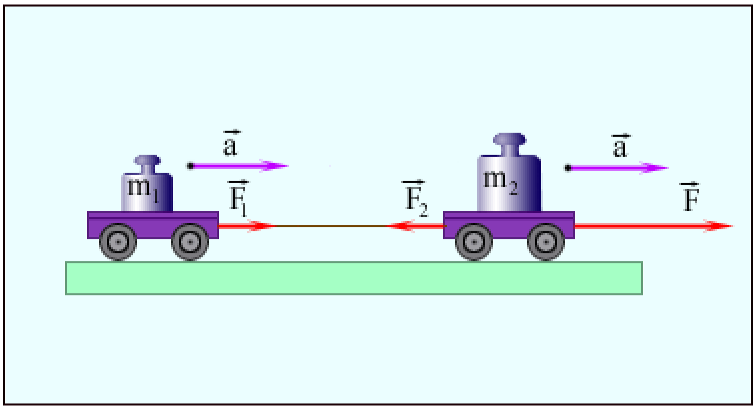
$$\sum \vec{F}_i = m.\vec{a} \qquad (5.4).$$

3^{ος} Νόμος Newton ***<u>(Αρχή Διατήρησης της Γραμμικής Ορμής):</u>*** όταν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων σε ένα σύστημα σωμάτων είναι ίση με το μηδέν τότε η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{o\lambda} = \text{σταθερή} \qquad (5.5).$$

Παρατήρηση ***<u>(Αρχή δράσης- αντίδρασης)</u>*:** όταν ένα σώμα ασκεί δύναμη σε ένα δεύτερο σώμα (***δράση***), τότε και το δεύτερο σώμα ασκεί στο πρώτο δύναμη ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης (***αντίδραση***).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (5.6).$$



Εικ.5.1: μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις μπορούν να αλλάξουν την κινητική κατάσταση ενός συστήματος.

<u>Απόδειξη:</u> Θεωρείστε δύο αυθαίρετα αλληλεπιδρώντα σώματα που περιέχονται σε ένα μονωμένο σύστημα. Έστω ότι $\vec{F}_{12}$ και $\vec{F}_{21}$ οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα σώματα $\vec{p}_{12}$ και $\vec{p}_{21}$ είναι οι γραμμικές ορμές τους. Από την *<u>Αρχή Διατήρησης της Γραμμικής Ορμής</u>* προκύπτει:

$$\vec{p}_{o\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (5.7).$$

$$\Leftrightarrow \vec{p}_{12} + \vec{p}_{21} = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (5.8).$$

Περνώντας στους στιγμιαίους χρονικούς ρυθμούς μεταβολής της γραμμικής ορμής έχουμε:

$$\frac{d\vec{p}_{12}}{dt} + \frac{d\vec{p}_{21}}{dt} = 0 \qquad (5.9).$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{p}_{12}}{dt} = -\frac{d\vec{p}_{21}}{dt} \qquad (5.10).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα και το *2^o Νόμο του Newton (Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής)* προκύπτει η σχέση (5.6) *(Αρχή δράσης- αντίδρασης)*. Αυτή δηλώνει ότι η συνολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος σωμάτων (το διανυσματικό άθροισμα των γραμμικών ορμών όλων των σωμάτων στο σύστημα) δεν αλλάζει εξαιτίας των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των σωμάτων του.

Μέση δύναμη: ονομάζεται μέση δύναμη η νοητή σταθερή δύναμη ($\vec{F}_{av}$) που αν ασκηθεί σε ένα σώμα στη θέση μιας μεταβλητής δύναμης $\vec{F}$ για ορισμένη χρονική διάρκεια Δt προκαλεί στο σώμα την ίδια μεταβολή ορμής με αυτήν της μεταβλητής δύναμης για την παραπάνω χρονική διάρκεια, δηλαδή

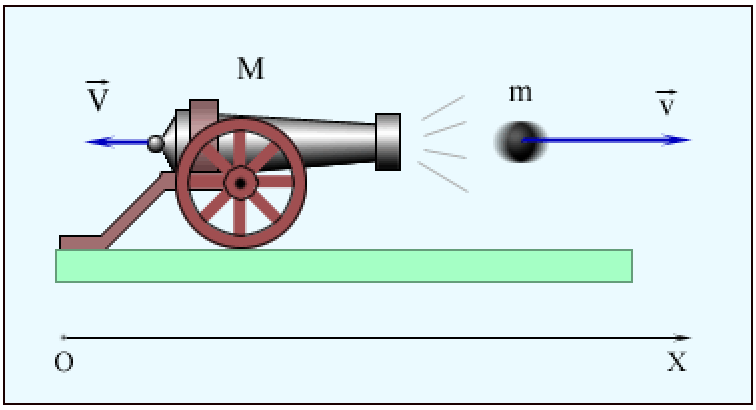
$$\vec{F}_{av} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \qquad (5.11).$$

Η *Αρχή Διατήρησης της Γραμμικής Ορμής* σε πολλές περιπτώσεις μας επιτρέπει να βρούμε τις ταχύτητες των αλληλεπιδρώντων σωμάτων ακόμη και όταν οι τιμές των δυνάμεων που δρουν είναι άγνωστες. Καλά τέτοια παραδείγματα είναι η ανάκρουση των όπλων και η *πρόωση αερίων.*

Όταν ένα όπλο πυροβολικού πυροβολεί, εμφανίζεται η *ανάκρουση*, δηλαδή το βλήμα κινείται προς τα εμπρός και το όπλο κυλάει προς τα πίσω. Το βλήμα και το όπλο είναι δύο αλληλεπιδρώντα σώματα. Η ταχύτητα την οποία κερδίζει το όπλο κατά την ανάκρουση, εξαρτάται μόνο από την ταχύτητα του βλήματος και από το λόγο της μάζας (βλέπε εικόνα 5.2). Αν συμβολίσουμε τις ταχύτητες του όπλου και του βλήματος με $\vec{V}$ και $\vec{\upsilon}$ και τις μάζες τους με M και m αντίστοιχα, τότε βασιζόμενοι στο νόμο της διατήρησης της ορμής μπορούμε να γράψουμε με βάση τις προβολές στον άξονα Ox τα παρακάτω:

$$MV + mv = 0 \qquad (5.12)$$

$$\Leftrightarrow V = -\frac{mv}{M} \qquad (5.13).$$



Εικ.5.2: Η ανάκρουση όταν πυροβολούμε από πυροβόλο όπλο

Μια εφαρμογή του 2ου Νόμου του Newton- προώθηση του πυραύλου.

Η <u>πρόωση αερίων</u> βασίζεται στην αρχή της ανάκρουσης. Σε ένα <u>πύραυλο</u> τα αέρια λόγω της καύσης του καυσίμου, το οποίο θερμαίνεται σε υψηλή θερμοκρασία, αποβάλλονται από ακροφύσιο με ταχύτητα $\vec{u}$ σε σχέση με τον πύραυλο. Ας συμβολίσουμε τη μάζα των εξερχόμενων αερίων με m, και τη μάζα του πυραύλου μετά την αποβολή του αερίου με M. Τότε για το απομονωμένο σύστημα «πύραυλος+ αέρια» εξαιτίας της Αρχής Διατήρησης της Γραμμικής Ορμής μπορούμε να γράψουμε (όμοια με το πρόβλημα του πυροβόλου όπλου):

$$V = -\frac{mu}{M} \tag{5.13}$$

όπου V είναι η ταχύτητα του πυραύλου μετά την αποβολή του αερίου.

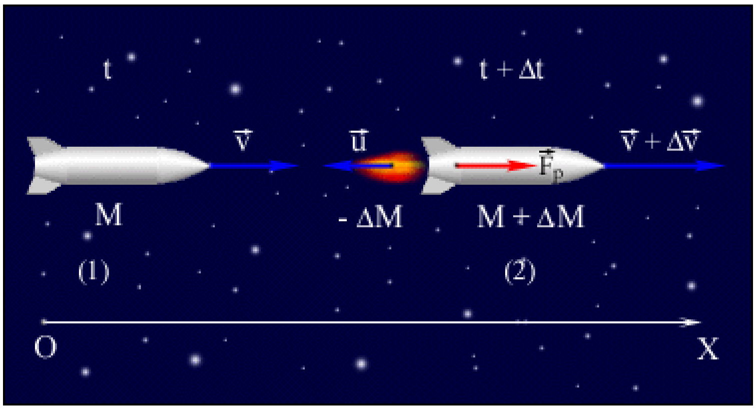
Για να σχηματίσουμε μια ακριβή εξίσωση της διεργασίας της αποβολής από το ακροφύσιο του πυραύλου πρέπει να εξετάσουμε το πρόβλημα πιο προσεκτικά. Υποθέστε ότι ο πύραυλος τη χρονική στιγμή t έχει μάζα M και κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (βλέπε εικόνα 5.3 (1)). Κατά τη διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος dt ένα συγκεκριμένο μέρος αερίου με σχετική ταχύτητα $\vec{u}$ θα εξέλθει από τον πύραυλο. Ο πύραυλος τη χρονική στιγμή t + dt θα έχει ταχύτητα $\vec{v} + d\vec{v}$, ενώ η μάζα του θα είναι ίση με M + dM, όπου dM < 0 (βλέπε εικόνα 5.3 (2)). Η μάζα των εξερχόμενων αερίων θα είναι προφανώς ίση με – dM > 0. Η ταχύτητα των αερίων ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Ox θα είναι ίση με $\vec{v} + \vec{\upsilon}$. Ας εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της (γραμμικής) Ορμής. Τη χρονική στιγμή t + Δt η γραμμική ορμή του πυραύλου ισούται με $(M + dM).(\vec{v} + d\vec{v})$ και η γραμμική ορμή των εξερχόμενων αερίων ισούται με $-dM.(\vec{v} + \vec{\upsilon})$. Τη χρονική στιγμή t η γραμμική ορμή ολόκληρου του συστήματος είναι ίση με $M.\vec{v}$. Λαμβάνοντας το σύστημα "πύραυλος + αέρια" ως απομονωμένο, μπορούμε να γράψουμε:

$$M.\vec{v} = (M + dM).(\vec{v} + d\vec{v}) - dM.(\vec{v} + \vec{\upsilon}) \Leftrightarrow \tag{5.14}$$

$$dM.\vec{\upsilon} = M.d\vec{v} + dM.d\vec{v} \qquad (5.15)$$

Η τιμή $dM.d\vec{v}$ μπορεί να αγνοηθεί, επειδή dM << M. Διαιρώντας και τα δύο μέρη της τελευταίας σχέσης με dt, παίρνουμε

$$\frac{dM}{dt}.\vec{\upsilon} = M.\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (5.16)$$



Εικ.5.3 (1) Ένας πύραυλος που κινείται στο διάστημα (χωρίς βαρύτητα) τη χρονική στιγμή t. Η μάζα του πυραύλου είναι M, η ταχύτητα του είναι $\vec{v}$.

(2) Ο πύραυλος τη χρονική στιγμή t + dt. Η μάζα του πυραύλου M + dM, όπου dM < 0, η ταχύτητα του $\vec{v} + d\vec{v}$, η μάζα των εξερχόμενων αερίων – dM > 0, η σχετική ταχύτητα των αερίων $\vec{\upsilon}$, η ταχύτητα των αερίων ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς. $\vec{v} + \vec{\upsilon}$.

Η ποσότητα

$$\mu = -\frac{dM}{dt} \qquad (5.17)$$

είναι η κατανάλωση του καυσίμου ανά μονάδα χρόνου. Η ποσότητα

$$\vec{F}_p = -\mu.\vec{\upsilon} \qquad (5.18)$$

ονομάζεται η δύναμη πρόωσης του αερίου. Με την δύναμη της πρόωσης του αερίου, τα εξερχόμενα αέρια δρουν στον πύραυλο, κατευθύνονται προς τα πίσω, αντίθετα προς τη σχετική ταχύτητα. Η σχέση

$$M.\vec{a} = \vec{F}_p = -\mu.\vec{\upsilon} \qquad (5.19)$$

εκφράζει το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για σώματα διαφορετικών μαζών. Αν τα αέρια εξέρχονται από το ακροφύσιο του πυραύλου (βλέπε εικόνα 5.1), τότε με βαθμωτή μορφή μπορούμε να γράψουμε το παρακάτω:

$$M.a = F_p = -\mu.\upsilon \qquad (5.20),$$

όπου υ είναι η απόλυτη τιμή της σχετικής ταχύτητας. Με τη βοήθεια της μαθηματικής ολοκλήρωσης από αυτή τη σχέση, παίρνουμε την εξίσωση για την τελική ταχύτητα V του πυραύλου:

$$\mathrm{v} = \upsilon.\ln\left(\frac{M_0}{M}\right) \qquad (5.21),$$

όπου M/ M_0 είναι ο λόγος της αρχικής μάζας προς την τελική μάζα του πυραύλου.

Από αυτή την εξίσωση προκύπτει ότι η τελική ταχύτητα του πυραύλου δεν μπορεί να ξεπεράσει τη σχετική ταχύτητα των αερίων. Σαν αποτέλεσμα, ο πύραυλος μπορεί να επιταχύνει σε μεγάλες ταχύτητες, που είναι απαραίτητες για διαστημικά ταξίδια. Αλλά αυτό μπορεί να επιτευχθεί μόνο καταναλώνοντας μια μεγάλη μάζα καυσίμου, το οποίο είναι το κύριο μέρος της αρχικής μάζας του. Για παράδειγμα, για να κερδίσουμε τροχιακή ταχύτητα $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 = 7{,}9\cdot10^3$ m.s^{-1} όταν $\upsilon = 3\cdot10^3$ m.s^{-1} (οι ταχύτητες αποβολής του αερίου είναι περίπου $2\cdot10^3$ $4\cdot10^3$ m.s^{-1}) η αρχική μάζα του πυραύλου ενός σταδίου είναι περίπου 14 φορές την τελική μάζα. Με σκοπό να φτάσουμε την τελική ταχύτητα v = 4.υ η σχέση $\frac{M}{M_0}$ πρέπει να ισούται με 50.

Σημαντική μείωση της αρχικής μάζας του πυραύλου μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας πυραύλους πολλών σταδίων, όπου τα στάδια του πυραύλου σταδιακά διαχωρίζονται ενώ το καύσιμο καίει. Οι μάζες των περιεχομένων στο οποίο το καύσιμο περιέχεται, μηχανές, συστήματα ελέγχου κ.τ.λ. εξαιρούνται από τη διεργασία της πρόωσης του πυραύλου. Οι πύραυλοι πολλών σταδίων προτιμούνται στη σύγχρονη αστροναυτική.

Μελέτη κρούσεων

Ο νόμος της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και ο νόμος της διατήρησης της ορμής μας επιτρέπουν να βρίσκουμε λύσεις σε μηχανικά προβλήματα στις περιπτώσεις όπου οι δρώντες δυνάμεις είναι άγνωστες. Ένα παράδειγμα τέτοιων προβλημάτων είναι οι ***κρούσεις*** των σωμάτων. Με τη σύγκρουση σωμάτων ερχόμαστε σε επαφή στην καθημερινή μας ζωή, στη μηχανική και στη φυσική (ειδικά στην ατομική φυσική και στη φυσική των σωματιδίων).Το μέγεθος της δύναμης είναι συνήθως άγνωστο. Έτσι η σύγκρουση δεν μπορεί να εξεταστεί απευθείας με τη βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα. Η εφαρμογή των νόμων της διατήρησης της ενέργειας και της γραμμικής ορμής σε πολλές περιπτώσεις μας επιτρέπει να μη λάβουμε υπόψη τη διεργασία της σύγκρουσης και να πάρουμε τη σχέση ανάμεσα στις ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά τη σύγκρουση, παρακάμπτωντας όλες τις ενδιάμεσες τιμές αυτών των ποσοτήτων.

Κρούση ή σκέδαση: ονομάζουμε κρούση ή σκέδαση το φαινόμενο κατά το οποίο δυο ή περισσότερα σώματα που πλησιάζουν μεταξύ τους αλληλεπιδρούν με πολύ ισχυρές δυνάμεις, οι οποίες όμως διαρκούν για πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Κατά τις κρούσεις προκαλούνται αλλαγές στην ορμή και στην ενέργεια των σωμάτων που αλληλεπιδρούν. Τα σώματα που συγκρούονται μπορεί να έρχονται σε επαφή (στο μακρόκοσμο) ή απλώς να πλησιάζουν πολύ κοντά το ένα στο άλλο (στο μικρόκοσμο).

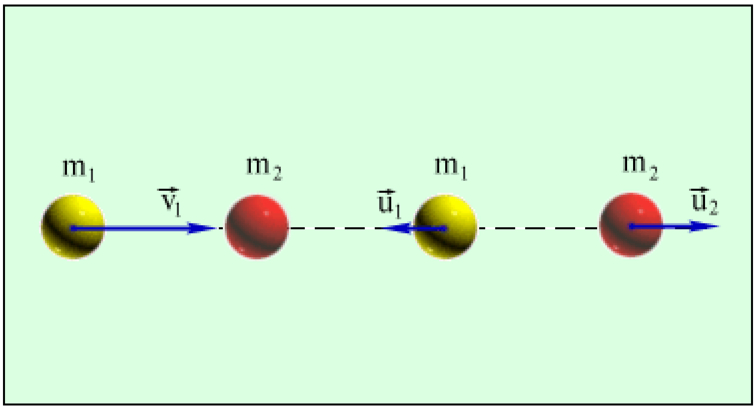
- **Κεντρική ή μετωπική κρούση:** ονομάζεται κεντρική η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Αν μάλιστα τα σώματα που συγκρούονται είναι σφαίρες τότε και οι ταχύτητές τους μετά την κρούση θα είναι στην ίδια αρχική διεύθυνση.
- **Έκκεντρη κρούση:** ονομάζεται έκκεντρη η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλα .
- **Πλάγια κρούση:** ονομάζεται πλάγια η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται σε διαφορετικές διευθύνσεις.
- **Ελαστική κρούση:** ονομάζεται (απόλυτα ή τέλεια) ελαστική η κρούση κατά την οποία, εκτός από την Αρχή διατήρησης της Ορμής (Α. Δ. Ο.), ισχύει και η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α. Δ. Μ. Ε.), δηλαδή η μηχανική ενέργεια των σωμάτων που συμμετέχουν διατηρείται. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι συγκρούσεις των ατόμων, των μορίων και των στοιχειωδών σωματιδίων, υπακούν στους νόμους της απόλυτα ελαστικής κρούσης.
- **Ανελαστική κρούση:** ονομάζεται ανελαστική η κρούση κατά την οποία μέρος της αρχικής Μηχανικής Ενέργειας των σωμάτων που συγκρούονται μετατρέπεται σε θερμότητα .
- **Πλαστική κρούση:** είναι ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης η οποία οδηγεί στη συγκόλληση δυο ή περισσότερων σωμάτων σχηματίζοντας ένα συσσωμάτωμα .

1. **Παρατηρήσεις για τις κρούσεις:**

- Σε όλες σχεδόν τις κρούσεις οι εξωτερικές δυνάμεις θεωρούνται αμελητέες σε σύγκριση με τις εσωτερικές, οπότε κατά τη διάρκειά τους ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής (Α. Δ. Ο).
- Σε όλες τις κρούσεις ισχύει και η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας (Α. Δ. Ε.).

2. **κεντρική μετωπική ελαστική κρούση δυο σφαιρών**

Ένα απλό παράδειγμα μιας απόλυτα ελαστικής κρούσης μπορεί να αποτελέσει μια κεντρική κρούση δύο μπαλών του μπιλιάρδου, μια εκ των οποίων πριν από τη σύγκρουση βρισκόταν σε ηρεμία (βλέπε εικόνα 5.4). Χρησιμοποιώντας τις Αρχές της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας και της Γραμμικής Ορμής, μπορούμε να καθορίσουμε τις ταχύτητες των μπαλών μετά τη σύγκρουση αν οι ταχύτητες πριν την κρούση είναι γνωστές.



Εικ.5.4. Απόλυτα ελαστική κεντρική κρούση δύο σφαιρών.

Γενικά, οι μάζες m_1 και m_2 των συγκρουόμενων μπαλών μπορούν να είναι διαφορετικές. Σύμφωνα με την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

$$\frac{m_1.v_1^2}{2}+\frac{m_2.v_2^2}{2}=\frac{m_1.\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2.\upsilon_2^2}{2} \qquad (5.22).$$

Εδώ, $\vec{v}_1$ είναι η ταχύτητα της πρώτης μπάλας πριν τη σύγκρουση, $\vec{v}_2$ η ταχύτητα της δεύτερης μπάλας, $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ οι ταχύτητες των μπαλών μετά την κρούση. Η Αρχή Διατήρησης της Ορμής για τις προβολές των ταχυτήτων στους άξονες συντεταγμένων που κατευθύνεται κατά μήκος της ταχύτητας της πρώτης μπάλας πριν τη σύγκρουση, γράφεται με την παρακάτω μορφή:

$$m_1.v_1 + m_2.v_2 = m_1.\upsilon_1 + m_2.\upsilon_2 \qquad (5.23).$$

Παίρνουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων. Αυτό το σύστημα μπορεί να λυθεί και οι άγνωστες ταχύτητες υ_1 και υ_2 των μπαλών μετά την κρούση μπορούν να βρεθούν:.

$$m_1.(v_1 - \upsilon_1) = m_2.(\upsilon_2 - v_2) \qquad (5.24).$$

$$m_1.v_1^2 + m_2.v_2^2 = m_1.\upsilon_1^2 + m_2.\upsilon_2^2 \qquad (5.25).$$

$$v_1 + \upsilon_1 = v_2 + \upsilon_2 \qquad (5.26).$$

$$m_1.v_1 + m_2.v_2 = m_1.\upsilon_1 + m_2.\upsilon_2 \qquad (5.27).$$

$$\upsilon_1 = \frac{2.m_2.v_2}{m_1 + m_2} + \frac{(m_1 - m_2).v_1}{m_1 + m_2} \qquad (5.28).$$

$$\upsilon_2 = \frac{2.m_1.v_1}{m_1 + m_2} + \frac{(m_2 - m_1).v_2}{m_1 + m_2} \qquad (5.29).$$

Ειδικές περιπτώσεις:

- Αν $\upsilon_1 < 0$ τότε $\vec{\upsilon}_1 \uparrow\downarrow \vec{v}_1$.
- Αν οι δύο μπάλες έχουν την ίδια μάζα (m_1=m_2), οι μπάλες ανταλλάσσουν ταχύτητες ($\vec{\upsilon}_1 = \vec{v}_2$ και $\vec{\upsilon}_2 = \vec{v}_1$) και, φυσικά, γραμμικές ορμές.
- Αν ισχύει $v_1 = 0$ τότε

$$\upsilon_1 = \frac{2.m_2.v_2}{m_1 + m_2} \qquad (5.30),$$

$$\upsilon_2 = \frac{(m_2 - m_1).v_2}{m_1 + m_2} \qquad (5.31),$$

Αν μάλιστα $m_1 >> m_2$ τότε

$$\upsilon_1 \approx 0 \qquad (5.32),$$

$$\upsilon_2 \approx -\mathrm{v}_1 \qquad (5.33).$$

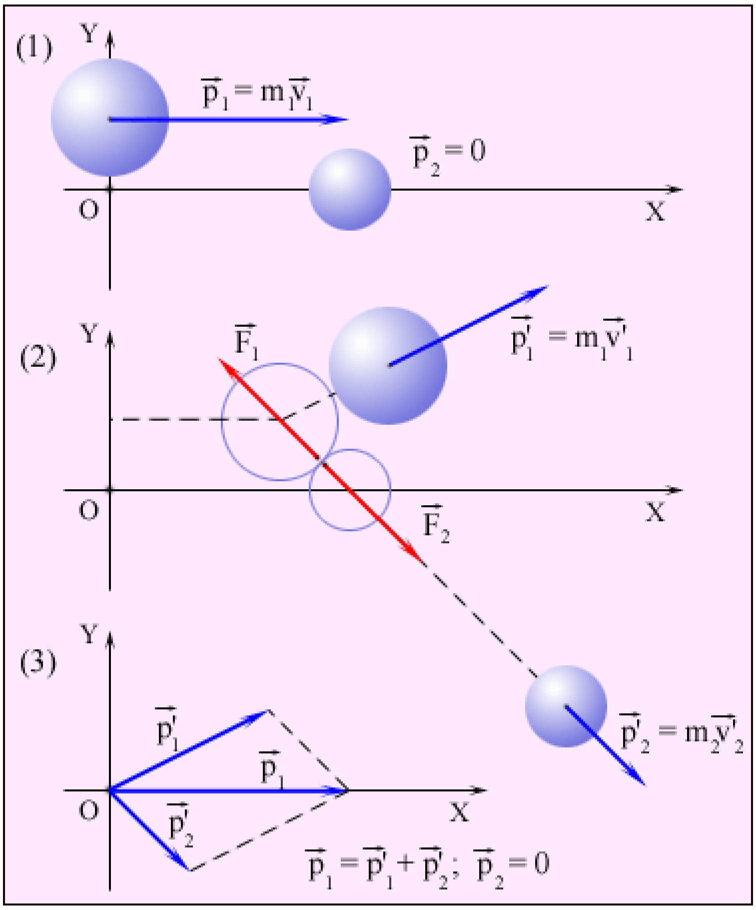
(η ακίνητη σφαίρα πρακτικά δεν επηρεάζεται ενώ η άλλη αναπηδά με ταχύτητα αντίθετη περίπου της αρχικής). Αν πάλι $m_2 >> m_1$ τότε

$$\upsilon_1 \approx 2.\mathrm{v}_1 \qquad (5.34),$$

$$\upsilon_2 \approx \mathrm{v}_1 \qquad (5.35).$$

(η ταχύτητα της κινούμενης σφαίρας πρακτικά δεν επηρεάζεται ενώ η άλλη κινείται με ταχύτητα διπλάσια περίπου της αρχικής). Στην ειδική περίπτωση που οι δύο μπάλες έχουν την ίδια μάζα ($m_1 = m_2$), η πρώτη μπάλα σταματάει μετά τη σύγκρουση ($\upsilon_1 = 0$), και η δεύτερη κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2 = \vec{v}_1$ (και πάλι οι μπάλες ανταλλάσσουν ταχύτητες και γραμμικές ορμές).

3. **Πλάγια κρούση δυο σφαιρών (η μία αρχικά ακίνητη)**



Εικ.5.5. Μια πλάγια κρούση με δύο μπάλες διαφορετικών μαζών. (1) γραμμικές ορμές προτού την κρούση, (2) γραμμικές ορμές μετά την κρούση, (3) το διάγραμμα γραμμικής ορμής.

Τα διανύσματα των γραμμικών ορμών από τις δύο μπάλες πριν και μετά τη σύγκρουση, είναι σχεδιασμένα στην εικ.5.5. και μπορούν να προβληθούν στους άξονες συντεταγμένων Ox και Oy. Ο νόμος της διατήρησης της γραμμικής ορμής ισχύει επίσης και για την προβολή αυτών των διανυσμάτων σε κάθε άξονα. Πιο συγκεκριμένα, από το διάγραμμα της ορμής (εικ.5.5) προκύπτει ότι οι προβολές των διανυσμάτων $\vec{p}$ και $\vec{p}'$ των γραμμικών ορμών και για τις δύο μπάλες πάνω στον Oy άξονα μετά τη σύγκρουση, πρέπει να είναι ίσες σε απόλυτη τιμή και να έχουν διαφορετικά πρόσημα έτσι ώστε το άθροισμα τους να είναι ίσο με μηδέν.

4. **κεντρική μετωπική πλαστική κρούση**

Ένα παράδειγμα μιας απόλυτα ανελαστικής κεντρικής μετωπικής (πλαστικής) κρούσης είναι το χτύπημα μιας σφαίρας (ή ενός βλήματος) μάζας m_1 σε ένα άλλο σώμα- στόχο μάζας m_2. Η σφαίρα κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, χτυπάει το στόχο, ο οποίος κινείται αρχικά με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$, και παραμένει μέσα σε αυτόν.

Έστω $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του σώματος με τη σφαίρα μέσα σε αυτό (συσσωμάτωμα δυο σωμάτων). Μετά, σύμφωνα με την Αρχή Διατήρησης της Ορμής, έχουμε:

$$m_1.\upsilon_1 + m_2.\upsilon_2 = (m_1 + m_2).\upsilon \quad (5.36)$$

$$\Leftrightarrow \upsilon = \frac{m_1.\upsilon_1 + m_2.\upsilon_2}{m_1 + m_2} \quad (5.37).$$

Όταν η σφαίρα καρφώνεται στο σώμα, χάνεται η παρακάτω κινητική ενέργεια, η οποία μετατρέπεται σε θερμότητα Q:

$$\Delta E_K = E_K - E_{K0} = \frac{(m_2 + m_1).\upsilon_2^2}{2} - \frac{m_1.\upsilon_2^2}{2} - \frac{m_2.\upsilon_2^2}{2} \quad (5.38).$$

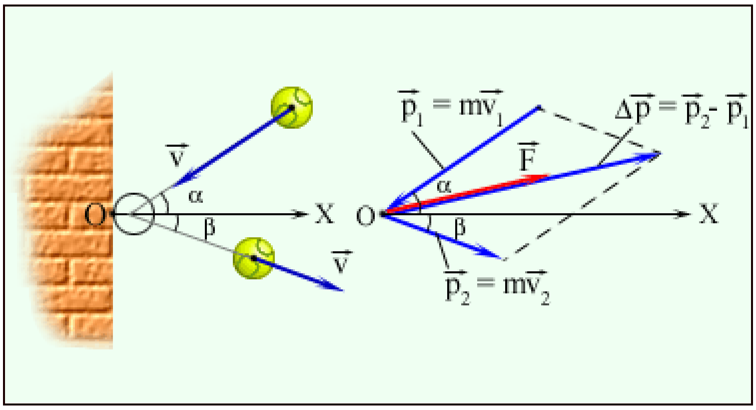
$$\Delta E_K = E_K - E_{K0} = \frac{-m_1.m_2.(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2)}{2.(m_1 + m_2)} \quad (5.39).$$

Ο λόγος

$$\mu = \frac{m_1.m_2}{m_2 + m_2} \quad (5.40)$$

έχει διαστάσεις μάζας και ονομάζεται ανηγμένη μάζα του συστήματος των m_1, m_2.

5. **πλάγια ελαστική κρούση σφαίρας- τοίχου**



Εικ.5.6. Η μπάλα που αναπηδά από ένα τραχύ τοίχο και το διάγραμμα γραμμικής ορμής της.

Οι κεντρικές (μετωπικές) κρούσεις συμβαίνουν πολύ σπάνια, ειδικά αν έχουμε να κάνουμε με συγκρούσεις ατόμων και μορίων. Μια ειδική περίπτωση πλάγιας ελαστικής κρούσης είναι η ελαστική κρούση μιας σφαίρας με έναν ακίνητο τοίχο πολύ μεγαλύτερης μάζας, όταν η ταχύτητά της πριν την κρούση δεν είναι κάθετη σε αυτόν. Ισχύει

$$\upsilon_y = \upsilon_{y'} \quad (5.41),$$

$$\upsilon_x = -\upsilon'_x \quad (5.42),$$

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon_x'^2 + \upsilon_y'^2} \quad (5.43),$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \quad (5.44),$$

$$\eta\mu\theta_\pi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} \quad (5.45),$$

$$\eta\mu\theta_a = \frac{\upsilon'_y}{\upsilon} \quad (5.46),$$

$$\eta\mu\theta_\pi = \eta\mu\theta_\alpha \quad (5.47),$$

$$\Leftrightarrow \theta_\pi = \theta_\alpha \quad (5.48).$$

Τυπολόγιο 5^{ου} Κεφαλαίου

Νόμοι του Newton

1^{ος} Νόμος Newton ***(Νόμος της Αδράνειας):***

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\upsilon} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\upsilon} = \text{σταθερή}$$

2^{ος} Νόμος Newton: (*Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής*):

$$\sum \vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Παρατήρηση: όταν σε ένα σώμα σταθερής μάζας m, επιδρά συνισταμένη δύναμη το σώμα αποκτά επιτάχυνση ανάλογη της συνισταμένης δύναμης και αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του m, αν βέβαια η ταχύτητά του παραμένει πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό

$$\sum \vec{F}_i = m.\vec{a}$$

3^{ος} Νόμος Newton *<u>(Αρχή Διατήρησης της Γραμμικής Ορμής):</u>*

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{o\lambda} = \text{σταθερή}$$

Παρατήρηση *<u>(Αρχή δράσης- αντίδρασης</u>*): όταν ένα σώμα ασκεί δύναμη σε ένα δεύτερο σώμα (***δράση***), τότε και το δεύτερο σώμα ασκεί στο πρώτο δύναμη ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης (***αντίδραση***).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Κεντρική Μετωπική Ελαστική Κρούση

$$\upsilon_1 = \frac{2.m_2.v_2}{m_1 + m_2} + \frac{(m_1 - m_2).v_1}{m_1 + m_2}$$

$$\upsilon_2 = \frac{2.m_1.v_1}{m_1 + m_2} + \frac{(m_2 - m_1).v_2}{m_1 + m_2}$$

Ειδικές περιπτώσεις:

- Αν $\upsilon_1 < 0$ τότε $\vec{\upsilon}_1 \uparrow\downarrow \vec{v}_1$.
- Αν οι δύο μπάλες έχουν την ίδια μάζα (m_1=m_2), οι μπάλες ανταλλάσσουν ταχύτητες ($\vec{\upsilon}_1 = \vec{v}_2$ και $\vec{\upsilon}_2 = \vec{v}_1$) και, φυσικά, γραμμικές ορμές.
- Αν ισχύει $v_1 = 0$ τότε

$$\upsilon_1 = \frac{2.m_2.v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\upsilon_2 = \frac{(m_2 - m_1).v_2}{m_1 + m_2}$$

Αν μάλιστα $m_1 >> m_2$ τότε

$$\upsilon_1 \approx 0$$

$$\upsilon_2 \approx - v_1$$

(η ακίνητη σφαίρα πρακτικά δεν επηρεάζεται ενώ η άλλη αναπηδά με ταχύτητα αντίθετη περίπου της αρχικής). Αν πάλι $m_2 >> m_1$ τότε

$$\upsilon_1 \approx 2.v_1 \qquad (5.34),$$

$$\upsilon_2 \approx v_1 \qquad (5.35).$$

(η ταχύτητα της κινούμενης σφαίρας πρακτικά δεν επηρεάζεται ενώ η άλλη κινείται με ταχύτητα διπλάσια περίπου της αρχικής). Στην ειδική περίπτωση που οι δύο μπάλες έχουν την ίδια μάζα ($m_1 = m_2$), η πρώτη μπάλα σταματάει μετά τη σύγκρουση ($\upsilon_1 = 0$), και η δεύτερη κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2 = \vec{v}_1$ (και πάλι οι μπάλες ανταλλάσσουν ταχύτητες και γραμμικές ορμές).

Πλάγια ελαστική κρούση σφαίρας- τοίχου

Γωνία Πρόσπτωσης = Γωνία Ανάκλασης

Ασκήσεις

Ελαστικές- Πλαστικές κρούσεις

1. Σφαίρα Σ_1 έχει μάζα $m_1 = 8$ kg και συγκρούεται με σφαίρα Σ_2 που έχει μάζα $m_2 = 8$ kg. Οι ταχύτητες των σφαιρών πριν και μετά την κρούση τους είναι αντίστοιχα $\upsilon_2 = 10$ m/sec, $\upsilon_{1'} = 8$ m/sec και $\upsilon_2 = 5$ m/sec.

   - Να γίνουν στο ίδιο διάγραμμα οι γραφικές παραστάσεις των ορμών p_1 και p_2 καθώς και της συνολικής ορμής των δυο σφαιρών συναρτήσει του χρόνου (κατ’ εκτίμηση).
   - Να γίνουν επίσης τα διαγράμματα $F_1 = f(t)$ και $F_2 = f(t)$, όπου F_1, F_2 οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στις δυο σφαίρες.

- Η κρούση είναι ελαστική;

2. Κάτω από την κούνια μιας παιδικής χαράς, ακριβώς στην κατακόρυφη που περνά από το σημείο εξάρτησής της στέκεται ένα παιδί με μάζα m_1 = 10 kg. Ένας νεαρός με μάζα m_1 = 40 kg ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα με την κούνια αρχικά σε ύψος h_1 = 2,5 m από το έδαφος. Αυτός κατά τη σύγκρουση με το παιδί το αρπάζει και συνεχίζουν μαζί την αιώρηση. Να βρείτε το μέγιστο ύψος h_2 στο οποίο θα φτάσει η κούνια μετά την κρούση. Δίνεται ότι η μάζα της κούνιας, οι τριβές και οι διαστάσεις του παιδιού και του νεαρού θεωρούνται αμελητέες.

3. Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με λόγο μαζών $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$ βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η Σ_1 κινείται με ταχύτητα υ_1 και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με τη Σ_2 που είναι ακίνητη. Να αποδειχτεί ότι τα μέτρα των ταχυτήτων που έχουν οι σφαίρες μετά την κρούση είναι ίσα.

4. Σφαίρα με μάζα m_1 = 1,5 kg και ταχύτητα υ, συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2. Αν το μέτρο της ταχύτητας της Σ_2 μετά την κρούση είναι v_2 = υ να βρείτε τη μάζα της m_2.

5. Δύο ελαστικές σφαίρες με μάζες m_1 = 2.m και m_2 = m είναι δεμένες στις άκρες κατακόρυφων νημάτων μήκους l το καθένα με τρόπο που να εφάπτονται μεταξύ τους με τα κέντρα τους στην ίδια οριζόντια διεύθυνση. Εκτρέπουμε τη σφαίρα m_1 ώστε το νήμα να σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη. Να βρείτε σε ποιο ύψος από το επίπεδο ηρεμίας θα φτάσει κάθε σφαίρα μετά την κρούση.

6. Τρεις ελαστικές σφαίρες με μάζες m_1 m_2,m_2 είναι δεμένες στις άκρες κατακόρυφων νημάτων με τρόπο που να εφάπτονται μεταξύ τους και τα κέντρα τους να βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Αν μετά από εκτροπή η m_1 πέφτει πάνω στην m_2 με ταχύτητα υ_1 να βρείτε με ποια ταχύτητα υ_3 αρχίζει να κινείται η m_3. Δίνεται ότι m_1 = m, m_2 = 3.m, m_3 = 6.m.

7. Σφαίρα μάζας m_1 = 1 kg είναι δεμένη στην άκρη νήματος μήκους l = 2m. εκτρέπουμε τη σφαίρα από τη θέση ισορροπίας ώστε θ = 60^o και την αφήνουμε ελεύθερη. Όταν αυτή φτάσει στην κατώτερη θέση συγκρούεται ελαστικά με σώμα μάζας m_2 = 4 kg που ηρεμεί σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο με n = 0,02. Να βρεθεί το διάστημα που διανύει το m_2 στο οριζόντιο επίπεδο και η μέγιστη απόκλιση της m_1 μετά τη κρούση. Δίνεται η g.

8. Δύο ελαστικές σφαίρες με μάζες m_1 = m και m_2 = 1,5 m έχουν συνδεθεί στα άκρα δύο νημάτων με μήκη l_1 = l και l_2 = $2.l.3^{-1}$ ώστε τα κέντρα τους

να βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Απομακρύνουμε την πρώτη ώστε $\theta = 60^o$ και την αφήνουμε ελεύθερη. Να βρεθεί η μέγιστη γωνία απόκλισης κάθε νήματος μετά την κρούση. Δίνεται η g.

9. Μια ελαστική σφαίρα μάζας $m_1 = 2$ kg συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη σφαίρα μάζας $m_2 = 1$ kg που κινείται με ταχύτητα $\upsilon_2 = 4$ $m.s^{-1}$. Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα της πρώτης σφαίρας ώστε η δεύτερη μετά την κρούση να μένει ακίνητη;

10. Ένα σώμα μάζας m, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ένα ακίνητο σώμα μάζας m_2. Να βρεθεί σε συνάρτηση με το λόγο $x = \dfrac{m_1}{m_2}$ το κλάσμα της κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται από το ένα σώμα στο άλλο και να βρεθεί για ποια τιμή του x το κλάσμα αυτό γίνεται μέγιστο.

11. Κομμάτι ξύλου μάζας M = 3,9 kgr κρέμεται από την άκρη σχοινιού μήκους l = 1 m που η άλλη του άκρη είναι δεμένη σε σταθερό σημείο. Βλήμα με μάζα m = 0,1 kgr κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ = 100 $m.s^{-1}$. Να βρείτε την ανύψωση του κέντρου βάρους και το % ποσοστό της ενέργειας που χάθηκε στην κρούση αν

- το βλήμα σφηνώνεται στο ξύλο.
- το βλήμα διαπερνά το ξύλο και βγαίνει από αυτό με $\upsilon_2 = 22$ $m.s^{-1}$.

Δίνεται ότι g = 10 $m.s^{-2}$.

12. Δύο σώματα A και B με μάζες $m_1 = m_2 = m_3$ συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά με ταχύτητες $\upsilon_1 = 2.\upsilon$ και $\upsilon_2 = \upsilon$ της ίδιας φοράς. Να βρείτε το % ποσοστό της ενέργειας που χάνεται.

13. Σφαίρα μάζας m που κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ_1 διαπερνάει σώμα μάζας M που κρέμεται από ακλόνητο σημείο με νήμα μήκους l = 2 m. Η σφαίρα βγαίνει από το σώμα με ταχύτητα υ_2. Αν $\upsilon_2 = 0,9.\upsilon_2$ και m = 0,1.M να βρείτε

- Το % ποσοστό της ενέργειας που χάνεται στην κρούση
- Την ελάχιστη ώστε το M να εκτελέσει ανακύκλωση.
- Πόση η ελάχιστη τιμή της υ_1 για ανακύκλωση του M αν αντί για νήμα έχουμε ράβδο μήκους επίσης 1;

Δίνεται η g.

14. Σφαίρα με μάζα $m_1 = 0{,}1$ kg εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon_1 = 300$ $m.s^{-1}$ εναντίον ξύλινου κιβωτίου μάζας $m_2 = 2$ kg που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Η σφαίρα βγαίνει από το κιβώτιο με $\upsilon_2 = 100$ $m.s^{-1}$. Αν το κιβώτιο ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο και σταματάει μετά από διάστημα S = 20 m να βρείτε:

- το συντελεστή τριβής κιβωτίου-επιπέδου.
- την ενέργεια που χάνεται στην κρούση.

Δίνεται η g = 10 ms^{-2}.

15. Να αποδείξετε ότι κατά τη μη μετωπική ελαστική κρούση δύο σφαιρών της ίδιας μάζας από τις οποίες η μια αρχικά ήταν ακίνητη, οι σφαίρες μετά την κρούση θα κινούνται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους.

16. Σώμα μάζας M ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής n. Το σώμα είναι στερεωμένο στη μία άκρη νήματος μήκους R που το άλλο του άκρο είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο O. Ένα βλήμα με μάζα m κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα υ που σχηματίζει με το νήμα γωνία θ σφηνώνεται στο σώμα. Το σύστημα τότε διαγράφει έναν κύκλο ακτίνας R και σταματάει στην αρχική του θέση. Βρείτε τη υ. Δίνεται η g.

17. Ένα κομμάτι ξύλου μάζας M = 1,9 kgr δεμένο στο ένα άκρο του νήματος μήκους 1 = 0,9 m το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το ξύλο ισορροπεί με το νήμα σε κατακόρυφη θέση. Βλήμα μάζας m = 0,1 kgr που κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ_o και σφηνώνεται στο ξύλο. Το σύστημα βλήμα-ξύλο εκτρέπεται ώστε η μέγιστη απόκλιση του νήματος από την αρχική κατακόρυφη θέση να είναι $\theta = 60^o$. Να υπολογιστούν

- Η ταχύτητα υ_o του βλήματος
- Το % ποσοστό ελάττωσης της κινητικής ενέργειας του συστήματος βλήμα- ξύλο κατά την κρούση.

Δίνεται ότι $g = 10$ $m.s^{-2}$ (Θέμα 1988).

18. Ένα σώμα Α με μάζα m_1 είναι πάνω σε ένα άλλο σώμα Β που έχει μάζα Μ και βρίσκεται σε ηρεμία πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στα δύο σώματα και ανάμεσα στο σώμα Β και το επίπεδο είναι n. Αν δώσουμε στο Β μια αρχική ταχύτητα $υ_o$ να βρείτε:

- Την κοινή ταχύτητα V των δύο σωμάτων όταν παύει η σχετική τους κίνηση και ο χρόνος που χρειάστηκε για αυτό
- Η απώλεια ενέργειας σε αυτό το χρόνο.
- Ο χρόνος που περνά συνολικά μέχρι να ηρεμήσουν τα δύο σώματα.

Δίνεται η g.

19. Σφαίρα μάζας m = 0,1 kgr κινούμενη οριζόντια με ταχύτητα $υ_o$ διαπερνά κομμάτι ξύλου μάζας M_1 = 2 kgr που κρεμόταν με νήμα μήκους l = 0,9 m. Το ξύλο μάζας M_1 μετά τη διάτρηση ανυψώνεται σε τέτοια θέση ώστε το νήμα να σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία $θ = 60^o$. Στη συνέχεια η σφαίρα σφηνώνεται σε δεύτερο κομμάτι ξύλου μάζας Μ = 0,9 kgr που είναι επίσης κρεμασμένο με νήμα. Αν το συσσωμάτωμα ανυψώνεται κατά h =0,2 m να βρείτε την αρχική ταχύτητα $υ_o$ της σφαίρας. Δίνεται ότι g = 10 $m.s^{-2}$.

20. Όχημα έχει μάζα Μ = 9 kgr και ηρεμεί σε λείο οριζόντιο δάπεδο έχοντας πάνω του σώμα μάζας m = 1 kgr που παρουσιάζει με το δάπεδο του οχήματος συντελεστή τριβής ολίσθησης n = 0,1. Μια οριζόντια και σταθερή δύναμη F = 19 N θέτει σε κίνηση το όχημα και ασκείται σε αυτό μέχρι να το μετατοπίσει κατά S = 4 m.

- Πόση ταχύτητα V απόκτησε το όχημα στη διαδρομή S και σε πόσο χρόνο
- Πόση είναι η αντίστοιχη ταχύτητα υ του σώματος και πόση η μετατόπισή του πάνω στο όχημα.

Δίνεται ότι g = 10 $m.s^{-2}$.

21. Βλήμα όπλου μάζας m = 0,1 kgr κινείται οριζόντια και συγκρούεται με ακίνητο και ακλόνητο κομμάτι ξύλου μάζας Μ = 1,1 kgr, εισχωρεί δε μέσα σε αυτό κατά α = 0,06 m. Σε πόσο βάθος θα είχε εισχωρήσει το βλήμα αν το ακίνητο κομμάτι του ξύλου ηρεμούσε ελεύθερο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Θεωρείστε ότι και στις δύο περιπτώσεις εισχώρησης το βλήμα δέχεται την ίδια σταθερή δύναμη F_A από το ξύλο.

22. Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο ακινητεί σφαίρα μάζας M. Βλήμα με μάζα m συγκρούεται κεντρικά και μετωπικά με τη σφαίρα. Αν η κρούση έχει σαν αποτέλεσμα την παραμόρφωση της σφαίρας με δέσμευση ενέργειας E βρείτε

- την ελάχιστη ταχύτητα υ_o του βλήματος για γα συμβεί αυτό
- τις ταχύτητες της σφαίρας και του βλήματος όταν $\upsilon_o = \upsilon_{o(min)}$.

23. Από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου ύψους h = 1,6 m και γωνίας κλίσης θ = π/6 αφήνεται γα ολισθήσει σώμα μάζας m_1 = 1 kgr. Στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου το σώμα συναντά λείο οριζόντιο επίπεδο στο οποίο και κινείται μέχρις ότου συγκρουστεί πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2 = 4 kgr. Το συσσωμάτωμα κινούμενο συναντά και συσπειρώνει ιδανικό οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k = 1000 $N.m^{-1}$ που η άλλη του άκρη είναι ακλόνητη. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης στο κεκλιμένο επίπεδο είναι $n = \frac{\sqrt{3}}{4}$ βρείτε:

- Τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου
- Το % ποσοστό της ελάττωσης της αρχικής ενέργειας του m_1 κατά την ολίσθηση στο κεκλιμένο επίπεδο.

Δίνεται ότι g = 10 $m.s^{-2}$.

24. Δύο σώματα μαζών m και 3.m είναι κρεμασμένα από ένα σημείο (O) με νήματα του ίδιου μήκους l. Εκτρέπουμε τα σώματα ώστε τα νήματα να γίνουν οριζόντια, με αντίθετες κατευθύνσεις, και ύστερα τα αφήνουμε ελεύθερα ταυτόχρονα. Τα σώματα συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά στην κατώτερη κατακόρυφη θέση.

- Να βρεθούν οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση και να δειχτεί ότι το σώμα μάζας m θα κάνει ανακύκλωση.
- Να δειχτεί ότι μετά τη $2^η$ κρούση τα σώματα θα φτάσουν μέχρι το αρχικό ύψος, δηλ. τελικά το φαινόμενο επαναλαμβάνεται περιοδικά.

25. Ένα βλήμα με μάζα m =1 kgr μπαίνει σε μια σανίδα πάχους d = 0,16 m με ταχύτητα υ_1 = 600 $m.s^{-1}$ και βγαίνει με ταχύτητα υ_2 = 200 $m.s^{-1}$. Αν η σανίδα παραμείνει ακίνητη και η κίνηση του βλήματος θεωρηθεί μέσα στη σανίδα ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη, να βρείτε:

- τη δύναμη που ασκεί η σανίδα στο βλήμα,
- την επιβράδυνση a
- το χρόνο που το βλήμα διαπερνά τη σανίδα.

26. Ρεύμα νερού κινείται με ταχύτητα υ μέσα σε οριζόντιο σωλήνα σχήματος U σταθερής διατομής S. Να βρείτε τη δύναμη που ασκεί η μάζα του νερού στο πλευρικό τοίχωμα του σωλήνα στη βάση του U. Η πυκνότητα του νερού είναι d_N.

27. Οριζόντιος σωλήνας με σταθερή διατομή χρησιμοποιείται σε δίκτυο παροχής νερού. Η παροχή του νερού είναι 3,6 $m^3.h^{-1}$ και γίνεται με ταχύτητα 20 $m.s^{-1}$. Ο σωλήνας παρουσιάζει μια κάμψη με αλλαγή διεύθυνσης κατά γωνία φ ενώ η ταχύτητα του νερού στο σωλήνα παραμένει η ίδια. Υπολογίστε πόση δύναμη δέχεται ο σωλήνας στην καμπή του αν

    i) $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

    ii) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Δίνεται ότι η πυκνότητα του νερού είναι ίση με 10^3 $kg.m^{-3}$.

Εκρήξεις- ανακρούσεις και άλλες περιπτώσεις κατά τις οποίες διατηρείται η ορμή.

1. Σώμα μάζας m = 8 kg που έχει επάνω του εκρηκτικό μηχανισμό κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon_o = 20$ $m.s^{-1}$.Κάποια στιγμή επιτελείται έκρηξη και το σώμα χωρίζεται σε δυο κομμάτια με μάζες m_1 και m_2 που κινούνται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και σε διευθύνσεις $\varphi = 60^o$ προς τα πάνω η πρώτη και $\theta = 30^o$ προς τα κάτω η δεύτερη. Να βρεθούν οι αντίστοιχες ταχύτητες υ_1 και υ_2 των m_1 και m_2 μετά την έκρηξη καθώς και η θερμότητα που εκλύεται κατά την έκρηξη.

2. Ένα ακίνητο σώμα διασπάται λόγω έκρηξης σε δυο κομμάτια με μάζες m_1= 2 kg και m_2 = 4 kg. Αν η ολική κινητική ενέργεια αυτών των μαζών είναι 6 J να βρείτε τις αντίστοιχες ταχύτητές τους υ_1 και υ_2.

3. Με πυροβόλο όπλο ρίχνουμε κατακόρυφα προς τα πάνω ένα βλήμα με ταχύτητα υ_o = 10 $m.s^{-1}$. Όταν το βλήμα φτάσει στο μέγιστο ύψος διασπάται σε δυο κομμάτια με ίσες μάζες. Αν το πρώτο κομμάτι πέσει στο σημείο βολής με ταχύτητα υ_1 = 50 $m.s^{-1}$ να βρείτε με ποια ταχύτητα υ_2 θα πέσει το δεύτερο κομμάτι στο έδαφος και σε ποιο σημείο.

4. Πυροβόλο κινείται χωρίς τριβή σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης θ. Όταν έχει διανύσει στο κεκλιμένο επίπεδο διάστημα S βάλει οριζόντια ένα βλήμα μάζας m. Αν η μάζα του πυροβόλου είναι M, πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα βολής υ του βλήματος ώστε το πυροβόλο να μείνει ακίνητο τη στιγμή της βολής;

5. Ένα βλήμα μάζας m = 10 kgr κινείται με ταχύτητα $υ_o$ = 100 m.s^{-1}. Σε κάποια χρονική στιγμή εκρήμνυται και χωρίζεται σε δύο ίσα κομάτια. Αν το ένα κομάτι κινείται με ταχύτητα $υ_1$ =200.√3 m.s^{-1} σε διεύθυνση κάθετη στην αρχική διεύθυνση κίνησης, να βρείτε:

- Την ταχύτητα του άλλου κομματιού.
- Την ενέργεια που απελευθέρωσε η έκρηξη.

6. Σώμα μάζας m = 4 kg κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_o$ =10 m.s^{-1} πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα λόγω έκρηξης χωρίζεται σε δύο κομμάτια μαζών m_1 και m_2 με $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$. Η μάζα m_1 κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο με $υ_1$ = 20 m.s^{-1} και σε διεύθυνση με θ =60^o ως προς την αρχική. Να βρεθεί η ταχύτητα της m_2.

7. Μια μάζα m = 1 kgr κρέμεται με νήμα μήκους l =1m από τη οροφή οχήματος M = 49 kgr που βρίσκεται ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Εκτρέπουμε το νήμα κατά γωνία θ =60^o και το αφήνουμε ελεύθερο. Να βρεθεί η ταχύτητα υ του οχήματος τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο. Δίνεται ότι g = 10 m.s^{-2}.

8. Σφαίρα με μάζα m, που κινείται με ταχύτητα υ μπαίνει σε ακίνητο αρχικά οδηγό δρόμο με σχήμα τεταρτοκύκλιου ακτίνας R = 0,5m. Ο οδηγός δρόμος μπορεί να κινείται χωρίς τριβή στο οριζόντιο επίπεδο και έχει μάζα M = 8.m. Αν $υ_o$ = 3 m.s^{-1} σε ποιο ύψος ανεβαίνει η σφαίρα; Δίνεται ότι g = 10 m.s^{-2}.

9. Πλάκα μάζας M μπορεί να γλιστράει χωρίς τριβές πάνω σε εναέριους οριζόντιους οδηγούς xy και x΄y΄. Κάτω από την πλάκα κρέμεται με μη έκτακτο νήμα μήκούς l το σώμα Σ μάζας m. Πόση οριζόντια ταχύτητα $υ_o$ πρέπει να δώσουμε στο Σ ώστε να φτάσει μέχρι τούς οδηγούς. Δίνεται το g.

10. Ένας δοκιμαστικός σωλήνας έχει μάζα M και κλείνεται με φελλό μάζας m. Ο σωλήνας περιέχει λίγες σταγόνες αιθέρα και είναι στερεωμένος σε οριζόντια θέση, στην άκρη που μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα (O) που περνάει από την πάνω άκρη του νήματος. Όταν

θερμάνουμε το σωλήνα, παράγονται ατμοί αιθέρα με πίεση και ο φελλός εκτοξεύεται. Πόση ταχύτητα πρέπει να αποκτήσει ο φελλός ώστε ο σωλήνας

- μόλις να διαγράψει ανακύκλωση
- να εκτραπεί κατά γωνία φ από την κατακόρυφο.

Δίνεται το g.

11. Δύο ίδιες σφαίρες Α και Β συνδέονται μεταξύ τούς με λεπτό αβαρές και πολύ ανθεκτικό νήμα μήκους l. Οι σφαίρες ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο. Να βρείτε με ποια ταχύτητα θα πρέπει να εκτοξεύσουμε τη μια σφαίρα κατακόρυφα προς τα πάνω ώστε να φτάσει σε ύψος h = 2.1. Δίνεται η g.

12. Τρεις βάρκες με την ίδια μάζα Μ = 90 kg κινούνται με την ίδια ταχύτητα υ_o = 10 $m.s^{-1}$, στην ίδια διεύθυνση η μια πίσω από την άλλη. Από τη μεσαία βάρκα ρίχνονται ταυτόχρονα, με ταχύτητα υ = 20 $m.s^{-1}$ ως προς τη βάρκα αυτή, από ένα σώμα μάζας m = 10 kg στην α και γ βάρκα. Ποια η νέα ταχύτητα κάθε βάρκας;

13. Ένας κυνηγός βρίσκεται πάνω σε μια ακίνητη βάρκα και πυροβολεί υπό γωνία θ = 60^o ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Το βλήμα έχει ταχύτητα υ = 320 $m.s^{-1}$ όταν φεύγει από την κάνη. Αν η μάζα βάρκας- όπλου- κυνηγού είναι Μ = 70 kgr, με πόση ταχύτητα θα κινηθεί η βάρκα; Ποια μεταβολή ορμής παθαίνει η βάρκα αν δεν βυθιστεί επιπλέον λόγω του πυροβολισμού;

14. Δύο άνθρωποι με μάζες m_1 = 60 kgr και m_2 = 80 kgr βρίσκονται στις άκρες μιας ακίνητης βάρκας μάζας m_a = 160 kgr και μήκος l_b = 15 m. Οι δύο άνθρωποι αρχίζουν να περπατούν ώστε να αλλάξουν τη θέση τους στον ίδιο χρόνο. Πόσο μετατοπίστηκε η βάρκα μέχρι τη στιγμή που οι άνθρωποι άλλαξαν αμοιβαία θέση;

15. Ένας πατινέρ στέκεται πάνω στα πατίνια του σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η μάζα του συστήματος πατινέρ-πατίνια είναι m = 60 kgr. Ο πατινέρ μπορεί να πετάξει κάθε σφαίρες μάζας m = 20 kgr η καθεμιά. Αν ο πατινέρ μπορεί να πετάξει κάθε σφαίρα με ταχύτητα προς αυτόν $\upsilon_{\sigma\chi}$ = 5 $m.s^{-1}$, να βρείτε την ταχύτητά του όταν πετάει προς τα πίσω

- τη μια σφαίρα,
- και τις δύο σφαίρες μαζί

- πρώτα τη μία και μετά την άλλη.

16. Σε μια βάρκα μάζας $m_β = m$ που κινείται με ταχύτητα υ βρίσκονται τέσσερα παιδιά με μάζα $m_p = 0,5.m$ το καθένα. Αν κάθε παιδί μπορεί να αναπτύξει ταχύτητα $υ_{σχ}$ ως προς τη βάρκα να βρείτε την ταχύτητα της βάρκας:

    - όταν τα παιδιά κινηθούν ταυτόχρονα με $υ_{σχ}$ και πηδήξουν αντίθετα από την κίνηση της βάρκας.
    - όταν κάθε παιδί πηδάει ξεχωριστά ώστε το επόμενο να ξεκινάει όταν πηδήξει το προηγούμενο με φορά αντίθετη της κίνησης της βάρκας.

Δυνάμεις που μεταβάλλονται με το χρόνο

1. Σε σώμα μάζας M = 1 kgr που κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $υ = 20\ m.sec^{-1}$ αρχίζει να δρα μια δύναμη F αντίρροπη της ταχύτητας που το μέτρο της δίνεται από τη σχέση $F = 3^{-1}.t$ (S.I.).

    - Βρείτε τη μεταβολή της ορμής για t = 6 sec
    - Ποια ταχύτητα του σώματος τότε;
    - Πόσο το έργο της F για την παραπάνω χρονική διάρκεια;

2. Σώμα μάζας 2 kgr ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $F_1 = 5$ N για χρόνο $t_1 = 2$ sec. Στη συνέχεια ασκείται μια άλλη επίσης οριζόντια δύναμη $F_2 = 5$ N που η διεύθυνσή της είναι κάθετη στη διεύθυνση της F_1 για χρόνο $Δt_2 = 2$ sec. Να βρεθούν:

    - η τελική ταχύτητα του σώματος.
    - η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος.

3. Μπαλάκι του τένις με μάζα m = 1 kgr κτυπάει στη ρακέτα με ταχύτητα $υ = 20\ m.s^{-1}$ και φεύγει από αυτή με ταχύτητα $υ = 40\ m.s^{-1}$ και σε διεύθυνση που σχηματίζει με την αρχική γωνία $θ = 120^0$. Αν η διάρκεια επαφής είναι $Δt = \sqrt{28}$ msec να βρείτε τη μέση δύναμη που ασκείται από τη ρακέτα στο μπαλάκι.

4. Σώμα μάζας m = 1kgr κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $υ_1 = 2\ m.s^{-1}$. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 2.\sqrt{2}$ N για χρόνο Δt = 3 sec που σχηματίζει γωνία $θ = 45^o$ με την αρχική διεύθυνση

της υ. Να βρεθούν:

- η τελική ταχύτητα του σώματος.
- η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.

5. Η δύναμη που ασκείται σε σώμα μάζας m = 10 kgr αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο από την τιμή $F_o = 0$ μέχρι την τιμή $F_1 = 200$ N σε χρόνο t = 4 sec. Να βρεθεί η ταχύτητα που αποκτά το σώμα αν αρχικά ήταν ακίνητο. Τριβές ασήμαντες

6. Ένα σώμα μάζας m = 40 kgr ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη που το μέτρο της δίνεται από τη σχέση: $F_1 = -50t + 200$ (S.I.) για $0 \leq t(s) \leq 6$ και $F_2 = 50.t - 400$ (S.I.) για $6 \leq t(s) \leq 8$. Να βρείτε:

   - Τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα
   - Την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t = 8sec.

7. Σώμα μάζας m = 1 kgr ανεβαίνει κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης θ με ημθ = 0,6. Τη στιγμή που το σώμα έχει ταχύτητα υ = 20 $m.s^{-1}$ ασκείται σε αυτό δύναμη F κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο με μέτρο F = 4 – 4.t (S.I.). Αν n = 0,4 και g = 10 $m.s^{-2}$ να βρείτε την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που μηδενίζεται η F.

8. Σώμα μάζας m=10 kgr δένεται στην άκρη νήματος που έχει όριο θραύσης $T_{ορ}$ =200 N. Στην άλλη άκρη του νήματος ασκείται κατακόρυφα προς τα πάνω δύναμη F που το μέτρο της δίνεται από τη σχέση F = 25.t (S.I.). Να βρείτε:

   - Πότε θα σπάσει το νήμα,
   - Το μέγιστο ύψος που θα φτάσει η σφαίρα, πάνω από το σημείο που σπάει το νήμα.

   Δίνεται g = 10 $m.s^{-2}$.

9. Σώμα μάζας m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα αρχίζει να δρα μια δύναμη F που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ προς τα πάνω. Αν το μέτρο της δύναμης δίνεται από τη σχέση F = k.t (S.I.) να

υπολογιστούν:

- πότε το σώμα εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο.
- ποια ταχύτητα έχει εκείνη τη στιγμή.
- πόσο το έργο της F μέχρι εκείνη τη στιγμή. Δίνεται ότι $g = 10\ m.s^{-2}$.

10. Σώμα μάζας m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα αρχίζει να δρα μια δύναμη F που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ προς τα κάτω. Αν το μέτρο της δύναμης δίνεται από τη σχέση F = k.t (S.I.) να υπολογιστούν:

- πότε το σώμα εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο,
- ποια ταχύτητα έχει εκείνη τη στιγμή,
- πόσο το έργο της F μέχρι εκείνη τη στιγμή.

Δίνεται ότι $g = 10\ m.s^{-2}$.

11. Να απαντηθούν τα ερωτήματα της προηγούμενης άσκησης αν ανάμεσα στο σώμα και το οριζόντιο επίπεδο υπάρχει τριβή με συντελεστή n.

12. Σφαίρα μάζας m = 1 Kgr κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο στη διεύθυνση του άξονα ενός ιδανικού ελατηρίου που η μια του άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη σε κατακόρυφο τοίχο. Η ταχύτητα της σφαίρας είναι $υ_o = 20\ m.s^{-1}$. Η σφαίρα συγκρούεται με το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου. Να βρείτε τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας από τη στιγμή της σύγκρουσης μέχρι τη στιγμή που το ελατήριο έχει συμπιεστεί στο μισό της μέγιστης συσπείρωσης x_{max}.

13. Σώμα μάζας m = 1 Kgr κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής ολίσθησης n = 0,2. Τη χρονική στιγμή t = 0 που το σώμα έχει ταχύτητα $υ = 10\ m.s^{-1}$, πιέζεται προς τα κάτω με κατακόρυφη δύναμη F που το μέτρο της δίνεται από την εξίσωση F=10 – 5.t. Η δύναμη επιδρά μέχρι να μηδενιστεί.

    - Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που μηδενίζεται η δύναμη F.
    - Η διάρκεια της κινήσεως του σώματος.

Δίνεται ότι g = 10 m.s^{-2}.

14. Τεμάχιο μετάλλου σχήματος κύβου μάζας M=10 kgr, ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός σφαιρών που πρέπει γα συγκρουστεί σε μια από τις κατακόρυφες έδρες σε χρόνο Δt = 0,3 sec, ώστε να αρχίσει να κινείται. Η κάθε σφαίρα κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_1$ = 400 m.s^{-1} και ανακλάται με ταχύτητα $υ_2$ = 200 m.s^{-1}. Δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης n = 0,8, g = 10 m.s^{-2} και η μάζα κάθε σφαίρας m = 0,01 kgr. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων θεωρείται αμελητέος.

15. Σώμα μάζας m = 1 kgr βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και παρουσιάζει με αυτό συντελεστή τριβής ολίσθησης n = 0,5. Το σώμα αρχικά ηρεμεί και κάποια στιγμή, ασκούνται ταυτόχρονα δύο δυνάμεις: μια οριζόντια με μέτρο F_1 = 4.t και μια κατακόρυφη, με φορά προς τα πάνω και μέτρο F_2 = 2.t. Να βρείτε:

- ποια χρονική στιγμή το σώμα αρχίζει να κινείται.
- ποια χρονική στιγμή το σώμα αρχίζει να χάνει την επαφή του με το έδαφος και ποια η ταχύτητά του εκείνη τη στιγμή
- αν τη στιγμή που το σώμα χάνει την επαφή του με το επίπεδο παύουν να ασκούνται οι δυνάμεις F_1 και F_2 μετά από πόσο χρόνο θα σταματήσει το σώμα;

Δίνεται ότι g = 10 m.s^{-2}.

Κεφάλαιο 1: ταλαντώσεις.

Ορισμοί

1. ***Χρονική στιγμή:*** είναι η ένδειξη t του χρονομέτρου όταν συμβαίνει ένα γεγονός και εκφράζει τον χρόνο που πέρασε από τότε που αρχίσαμε να μετράμε μέχρι τότε που συνέβη το γεγονός αυτό. Η χρονική στιγμή δεν έχει διάρκεια.

2. ***Χρονική διάρκεια ή χρονικό διάστημα:*** είναι ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο χρονικές στιγμές.

$$\Delta t = t_{\tau\varepsilon\lambda} - t_{\alpha\rho\chi} \qquad (1.1).$$

Μονάδα χρόνου στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI) είναι το δευτερόλεπτο (second ή s).

3. ***Σύστημα Αναφοράς:*** μας επιτρέπει να καθορίσουμε τη θέση ενός κινούμενου σώματος σε κάθε χρονική στιγμή. Σχηματίζεται από ένα σύστημα συντεταγμένων που σχετίζεται με το σώμα αναφοράς και ένα ρολόι με κάποια αρχή για τη μέτρηση του χρόνου.

4. ***Διάνυσμα θέσης ή επιβατική ακτίνα:*** ονομάζεται το διάνυσμα που καθορίζει τη θέση ενός κινούμενου σώματος (το οποίο μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο) σε σχέση με ορισμένο σύστημα αναφοράς σε κάθε χρονική στιγμή. Έχει πάντα αρχή την το κέντρο των συντεταγμένων του χρησιμοποιούμενου συστήματος αναφοράς και πέρας σε κάθε χρονική στιγμή το σημείο στο οποίο βρίσκεται το σώμα τότε (βλέπε εικ.1.1).

5. ***Νόμος κίνησης:*** είναι η θέση ενός υλικού σημείου στο χώρο σε κάθε χρονική στιγμή. Μπορεί να αναπαρασταθεί είτε από την εξάρτηση των συντεταγμένων του σώματος από το χρόνο (αναπαράσταση με συντεταγμένες),

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (1.2).$$

ή με την εξάρτηση του διανύσματος θέσης από το χρόνο (αναπαράσταση με το διάνυσμα θέσης), το οποίο σχεδιάζουμε από το κέντρο των συντεταγμένων προς το δοσμένο σημείο.

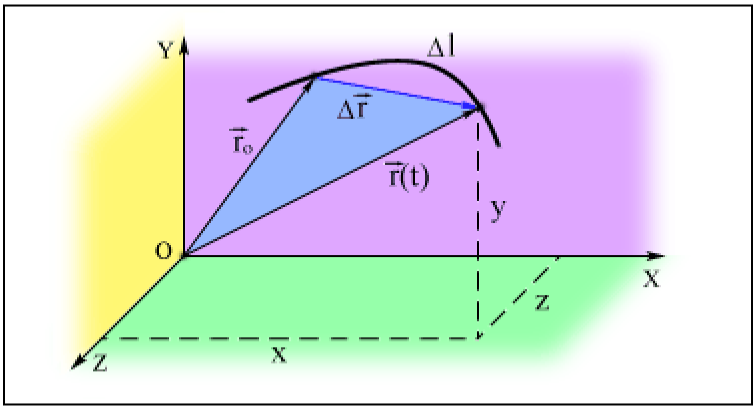
$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1.3).$$

6. ***Τροχιά κίνησης:*** είναι η συγκεκριμένη καμπύλη γραμμή την οποία σχηματίζει ένα σώμα (το οποίο μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο) καθώς κινείται από ένα σημείο στο άλλο με την πάροδο του χρόνου.

7. ***Εξίσωση τροχιάς κίνησης:*** είναι η μαθηματική σχέση (της μορφής f(x,y,z) = 0) που συνδέει τις συντεταγμένες των διαδοχικών σημείων της τροχιάς ενός σώματος.

8. ***Μετατόπιση:*** είναι διανυσματικό φυσικό μέγεθος. Ορίζεται ίσο με τη μεταβολή του διανύσματος θέσης. Έχει μέτρο την απόσταση μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης ενός κινητού και κατεύθυνση την κατεύθυνση της κίνησης. Επομένως (βλέπε εικ.1.1)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{r}_{\alpha\rho\chi} \qquad (1.4).$$

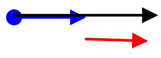


Εικ.1.1. Αναπαράσταση της θέσης του σημείου με τη βοήθεια των συντεταγμένων και του ακτινικού διανύσματος $\vec{r} = \vec{r}(t)$. $\vec{r}_0$ είναι το ακτινικό διάνυσμα της θέσης του σημείου τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Σε μία διάσταση η σχέση (1.4) γίνεται (βλέπε εικ.1.2).

$$\Delta x = x_{\tau\varepsilon\lambda} - x_{\alpha\rho\chi} \qquad (1.5).$$

$x_{\alpha\rho\chi}$ $x_{\tau\varepsilon\lambda}$



Εικ.1.2. Υπολογισμός μετατόπισης στην ευθύγραμμη κίνηση.

9. ***Διάστημα ή Απόσταση***(S)**:** είναι <u>*μονόμετρο μέγεθος*</u>. Ορίζεται ίσο με το μήκος της τροχιάς που διαγράφει ένα σώμα κατά την κίνησή του (σε χρονική διάρκεια Δt). Η μονάδα μήκους στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI) είναι το μέτρο (meter ή m) .

<u>*Παρατήρηση:*</u> όταν κινείται σε καμπύλη τροχιά, η απόλυτη τιμή του διανύσματος μετατόπισης είναι πάντα μικρότερη από την απόσταση που διανύθηκε (βλέπε εικ.1.3).

Εικ.1.3. Η απόσταση η οποία διανύθηκε l και το διάνυσμα μετατόπισης $\vec{s}$ στην περίπτωση της καμπυλοειδούς κίνησης (a στο b είναι το αρχικό και τελικό σημείο της τροχιάς).

10. ***Αριθμητική μέση ταχύτητα*** ($\bar{\upsilon}$)**:** μονόμετρο φυσικό μέγεθος. Ορίζεται ίσο με το πηλίκο του συνολικού διαστήματος ΔS που διένυσε το κινητό προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια Δt.

$$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (1.6).$$

Π.χ. αν ένα αυτοκίνητο διανύσει 150 km σε 2 ώρες η μέση ταχύτητά του είναι

$$\bar{\upsilon} = \frac{150km}{2h} = 75\frac{km}{h}.$$

11. ***Μέση διανυσματική γραμμική ταχύτητα***($\vec{\upsilon}_\mu$)**:** είναι διανυσματικό φυσικό μέγεθος. Ορίζεται ως το πηλίκο της μετατόπισης $\Delta\vec{r}$ προς τηναντίστοιχη

χρονική διάρκεια Δt (μέσα στην οποία πραγματοποιείται), δηλαδή:

$$\text{ταχύτητα} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρονικό διάστημα}}$$

Με σύμβολα έχουμε:

$$\vec{\upsilon}_{\mu} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \upsilon_{\mu x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\ \kappa\alpha\iota \\ \upsilon_{\mu y} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}\ \kappa\alpha\iota \\ \upsilon_{\mu z} = \dfrac{\Delta z}{\Delta t} \end{array} \qquad (1.7).$$

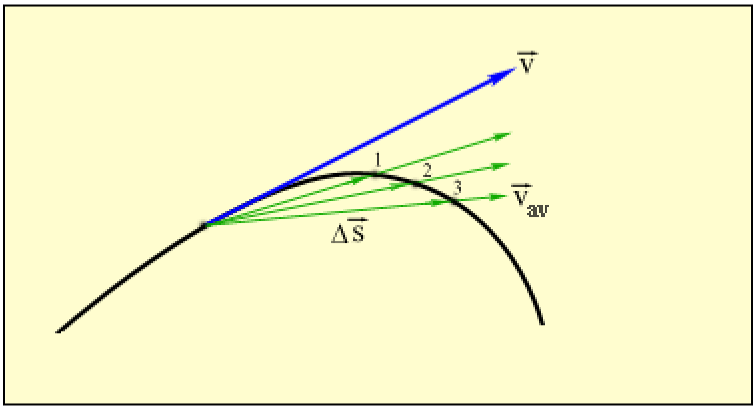
Μονάδα της ταχύτητας στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI) είναι το 1 μέτρο ανά δευτερόλεπτο (1 $\frac{m}{s}$).

12. ***<u>Στιγμιαία γραμμική ταχύτητα</u>*** ($\vec{\upsilon}$)**:** διανυσματικό φυσικό μέγεθος. Ορίζεται ως ο <u>*στιγμιαίος χρονικός ρυθμός μεταβολής του διανύσματος της θέσης*</u>. Στα μαθηματικά αυτό ονομάζεται <u>*χρονική παράγωγος του διανύσματος θέσης*</u> και συμβολίζεται

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow \qquad (1.8)$$

$$\begin{array}{l} \upsilon_x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}\ \kappa\alpha\iota \\ \upsilon_y = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{dy}{dt}\ \kappa\alpha\iota \\ \upsilon_z = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta t} = \dfrac{dz}{dt} \end{array} \qquad (1.9).$$

Η στιγμιαία ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ενός σώματος σε κάθε σημείο της καμπύλης τροχιάς του κατευθύνεται κατά μήκος της εφαπτομένης προς την τροχιά στο σημείο αυτό. Η εικ.1.4. δείχνει τη διαφορά ανάμεσα στη διανυσματική μέση και τη στιγμιαία ταχύτητα.



Εικ.1.4. Μέση και στιγμιαία ταχύτητα. $\Delta\vec{s}_1$, $\Delta\vec{s}_2$, $\Delta\vec{s}_3$ οι μετατοπίσεις κατά τα χρονικά διαστήματα Δt_1, Δt_2, Δt_3. $\vec{\upsilon}_{av} \rightarrow \vec{\upsilon}$ όταν $\Delta t \rightarrow 0$.

13. ***<u>Μεταβολή της γραμμικής ταχύτητας</u>***($\Delta\vec{\upsilon}$)***:*** είναι διανυσματικό φυσικό μέγεθος. Εκφράζει την αλλαγή στη γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ενός σώματος το οποίο κινείται (κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος Δt) είτε κατά μέτρο είτε κατά διεύθυνση και ορίζεται με την ακόλουθη σχέση

$$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi} \qquad (1.10).$$

14. ***<u>Μέση επιτάχυνση</u>***($\vec{a}_{\mu}$)***:*** είναι διανυσματικό φυσικό μέγεθος. Ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας $\Delta\vec{\upsilon}$ προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια Δt, μέσα στο οποίο αυτή πραγματοποιείται.

$$\vec{a}_{\mu} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \qquad (1.11).$$

Μονάδα της επιτάχυνσης στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI) είναι το 1 $\frac{m}{s^2}$ (είναι η επιτάχυνση ενός κινητού που αυξάνει την ταχύτητά του κατά 1 $\frac{m}{s}$ κάθε δευτερόλεπτο).

15. ***<u>Στιγμιαία επιτάχυνση</u>***($\vec{a}$)***:*** διανυσματικό φυσικό μέγεθος.Ορίζεται ως ο *<u>στιγμιαίος χρονικός ρυθμός μεταβολής του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας</u>*. Στα μαθηματικά λέγεται και *<u>χρονική παράγωγος του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας</u>* και συμβολίζεται

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Leftrightarrow \qquad (1.12).$$

$$\begin{aligned} a_x &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t} = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \; \kappa\alpha\iota \\ a_y &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon_y}{\Delta t} = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} \; \kappa\alpha\iota \qquad (1.13). \\ a_z &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon_z}{\Delta t} = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned}$$

16. ***<u>Περιοδικά φαινόμενα:</u>*** περιοδικά φαινόμενα ονομάζουμε τα φαινόμενα εκείνο που εξελίσσονται και επαναλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο ανά ίσα χρονικά διαστήματα .Μερικά παραδείγματα (κατά προσέγγιση) περιοδικών φαινομένων είναι οι παλμοί της καρδιάς, η κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο και η κίνηση του γιο-γιο.

17. ***<u>Περιοδική συνάρτηση:</u>*** μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Re$ θα λέγεται περιοδική αν και μόνο αν υπάρχει Τ > 0 τέτοιο ώστε $\forall x \in \Re, n \in Z$ να ισχύει

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x+n.T) = f(x) \qquad (1.14).$$

Το Τ θα λέγεται περίοδος της συνάρτησης f (μαθηματικός ορισμός).

18. ***<u>Περίοδος</u>***(Τ- φυσικός ορισμός)**:** περίοδο ενός περιοδικού φαινομένου ονομάζουμε το χαρακτηριστικό χρόνο που χρειάζεται στο φαινόμενο για να πραγματοποιηθεί μια πλήρης μεταβολή. Μονάδα της περιόδου στο διεθνές σύστημα είναι το 1 sec.

19. ***<u>Συχνότητα</u>***(f)**:** συχνότητα ενός περιοδικού φαινομένου ονομάζουμε των αριθμό των πλήρων μεταβολών που λαμβάνουν χώρα στην μονάδα του χρόνου. Ισχύει:

$$f = \frac{\Delta N}{\Delta t} \qquad (1.15),$$

όπου ΔΝ ο αριθμός των πλήρων μεταβολών και Δt ο χρόνος που απαιτείται για την πραγματοποίησή τους. Μονάδα μέτρησης της συχνότητας στο διεθνές σύστημα είναι το 1 Hertz = 1 sec^{-1} (1 χερτζ) που συμβολίζεται με 1 Hz. Η περίοδος και η συχνότητα είναι μεγέθη αντιστρόφως ανάλογα , δηλαδή

$$f = \frac{1}{T} \qquad (1.16),$$

(από την (1.15) αφού για Ν = 1 ισχύει από τον ορισμό της περιόδου Δt = Τ).

20. ***<u>Γωνιακή ή κυκλική συχνότητα</u>***(ω)**:** είναι μέγεθος χωρίς συνήθως άμεση φυσική σημασία και ορίζεται ως

$$\omega = 2.\pi.\ f\ = 2.\pi.T^{-1} \qquad (1.17).$$

Στις κυκλικές και περιστροφικές περιοδικές κινήσεις η γωνιακή συχνότητα ταυτίζεται με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας (βλέπε κεφάλαιο 3).

21. ***<u>Ταλάντωση:</u>*** ταλάντωση ονομάζουμε το (συχνά περιοδικό) φαινόμενο κατά το οποίο γίνεται μία παλινδρομική κίνηση μεταξύ δυο ακραίων σημείων με κέντρο μία ορισμένη θέση ισορροπίας (όπου $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$), η οποία ονομάζεται κέντρο ισορροπίας ή κέντρο της ταλάντωσης.

Οι ταλαντώσεις μπορούν να διακριθούν σε:

- αμείωτες ταλαντώσεις, όταν η ενέργεια και το πλάτος του ταλαντούμενου συστήματος παραμένουν σταθερά στο χρόνο.
- φθίνουσες ταλαντώσεις, όταν η ενέργεια και το πλάτος του ταλαντούμενου συστήματος δεν παραμένουν σταθερά στο χρόνο αλλά ελαττώνονται λόγω τριβών.

Επίσης μπορούν να διακριθούν σε:

- ελεύθερες ταλαντώσεις, όπου το σώμα μετά από μία μόνο διέγερση αφήνεται ελεύθερο να ταλαντωθεί με τη δικιά του συχνότητα-ιδιοσυχνότητα (δεν αναπληρώνεται με κάποιο εξωτερικό μηχανισμό η ενέργεια του ταλαντούμενου συστήματος που χάνεται λόγω τριβών).
- εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, όπου το σώμα ταλαντώνεται υπό την επίδραση κάποιας εξωτερικής περιοδικής δύναμης που του επιβάλλει τη δικιά της συχνότητα (αναπληρώνεται με κάποιο εξωτερικό μηχανισμό η ενέργεια του ταλαντούμενου συστήματος που χάνεται λόγω τριβών).

22. ***<u>Απομάκρυνση</u>***(x)**:** ονομάζουμε απομάκρυνση ενός σώματος που εκτελεί (μηχανική) ταλάντωση τη συντεταγμένη θέσης του σώματος αυτού (γραμμική, γωνιακή κ.τ.λ.) μετρημένη στο σύστημα αναφοράς του κέντρου ταλάντωσης (θέση ισορροπίας, όπου $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$) σε μια χρονική στιγμή. Η έννοια της απομάκρυνσης μπορεί να γενικευτεί για να συμπεριλάβει και άλλα είδη ταλαντώσεων, π.χ. ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις.

23. ***<u>Πλάτος ταλάντωσης</u>***(x_o)**:** πλάτος ταλάντωσης ονομάζουμε τη μέγιστη απόσταση που απέχει το σώμα που εκτελεί (μηχανική) ταλάντωση από το κέντρο της ταλάντωσης (θέση ισορροπίας, όπου $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$). Η έννοια του πλάτους μπορεί να γενικευτεί για να συμπεριλάβει και άλλα είδη ταλαντώσεων, π.χ. ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις.

24. ***<u>Συντονισμός</u>***: συντονισμό σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση ονομάζουμε το φαινόμενο εκείνο κατά το οποίο το πλάτος της ταχύτητας της εξαναγκασμένης ταλάντωσης και η μεταφερόμενη ισχύς από το περιοδικό εξωτερικό αίτιο (διεγέρτη, πχ. δύναμη) στο ταλαντούμενο σύστημα παίρνουν τη μέγιστη τιμή τους. Αυτό συμβαίνει όταν η συχνότητα (f) του διεγέρτη γίνεται ίση με την ιδιοσυχνότητα (f_{00}) του ταλαντούμενου συστήματος ($f = f_{00}$) αν δεν υπήρχαν τριβές και αντιστάσεις. Το φαινόμενο του συντονισμού βρίσκει πολλές εφαρμογές, όπως στην κατασκευή κεραιών, κτιρίων και γεφυρών.

25. ***<u>Γραμμική ή Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Γ.Α.Τ ή Α.Α.Τ.):</u>*** ονομάζουμε Απλή ή Γραμμική Αρμονική Ταλάντωση κάθε κίνηση στην οποία η γενικευμένη απομάκρυνση μπορεί να γραφεί ως ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή

$$x = x_0.\eta\mu(\omega_0.t + \varphi_0) \qquad (1.18).$$

Γραμμική (ή Απλή) Αρμονική Ταλάντωση (Γ. Α. Τ. ή Α. Α. Τ.)

1. Δυναμική μελέτη της Γ. Α. Τ.

Για να είναι μια κίνηση Γ. Α. Τ. πρέπει και αρκεί η συνισταμένη δύναμη στη διεύθυνση της κίνησης να είναι δύναμη επαναφοράς, δηλαδή

$$\sum F_x = -D.x \quad (\text{D: σταθερά επαναφοράς}) \qquad (1.19).$$

$$\sum F_x = m.a_x \quad (2^{ος} \text{ Νόμος Newton}) \qquad (1.20).$$

(1.13),(1.19),(1.20) $\Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2.x = 0$ (διαφορική εξίσωση της Γ. Α. Τ.) (1.21),

με $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{D}{m}}$ (1.22).

2. Κινηματική μελέτη της Γ. Α. Τ.

Η λύση της (1.21) είναι η της μορφής της (1.18), όπου ω_0 η κυκλική συχνότητα(δίνεται από τη σχέση (1.17)), φ_0 η αρχική φάση και x_0 το πλάτος της Γ. Α. Τ. (τα φ_0, x_0 καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες). Από τις (1.9), (1.13) και (1.18) προκύπτει ότι:

$$\upsilon_x = \upsilon_0.\sigma\upsilon\nu(\omega_0.t + \varphi_0) \quad (\text{ταχύτητα}) \qquad (1.23),$$

$$\upsilon_0 = \omega_0.\, x_0 \quad (\text{πλάτος ταχύτητας}) \qquad (1.24),$$

$$a_x = -a_0.\eta\mu(\omega_0.t + \varphi_0) \quad (\text{επιτάχυνση}) \qquad (1.25),$$

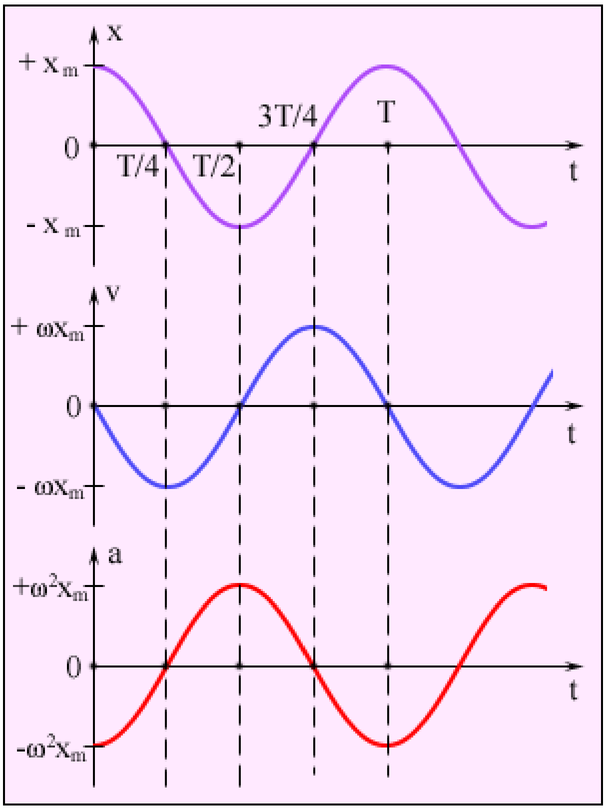
$$a_0 = \omega_0^2.\, x_0 \quad (\text{πλάτος επιτάχυνσης}) \qquad (1.26),$$

$$x^2 + \left(\frac{\upsilon_x}{\omega_0}\right)^2 = x_0^2 \qquad (1.27).$$

Υπολογισμός της αρχικής φάσης $\varphi_0 \in [0,2\pi)$ αν γνωρίζουμε την ταχύτητα και την απομάκρυνση σε μια ορισμένη χρονική στιγμή t_1:

$$\upsilon_{x1} = \omega_0.\, x_0.\sigma\upsilon\nu(\omega_0.t_1 + \varphi_0) \qquad (1.28),$$

$$x_1 = x_0.\eta\mu(\omega_0.t_1 + \varphi_0) \qquad (1.29).$$



Εικ.1.5. Διαγράμματα της απομάκρυνσης x(t), της ταχύτητας v(t) και της επιτάχυνσης a(t) ενός σώματος που εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση με αρχική φάση $\varphi_0 = 0$.

3. Ενεργειακή μελέτη της Γ. Α. Τ.

Ενέργεια(Ε)**:** είναι μονόμετρο φυσικό μέγεθος. Ένα σώμα έχει ενέργεια όταν μπορεί να *προκαλέσει* μία μεταβολή στον εαυτό του ή στο περιβάλλον του. *Μονάδα ενέργειας στο S.I.* είναι το 1 Joule που γράφεται 1 J. Ανάλογα με το είδος της προκαλούμενης μεταβολής η ενέργεια εμφανίζεται στη φύση με διάφορες μορφές:

- κινητική ενέργεια.

- δυναμική ενέργεια.
- μηχανική ενέργεια.
- θερμική ενέργεια
- χημική ενέργεια.
- θερμότητα
- έργο.

<u>Μηχανικό έργο ή έργο δύναμης</u>: είναι μονόμετρο φυσικό μέγεθος. Έργο είναι μορφή ενέργειας που μεταφέρεται από ένα σώμα σε ένα άλλο η μετατρέπεται από τη μια μορφή στην άλλη. Μια δύναμη παράγει έργο όταν μπορεί και μετακινεί το σώμα στο οποίο ασκείται. Το έργο εξαρτάται από τη δύναμη και από την απόσταση στην οποία μετακινήθηκε το σώμα.

<u>Έργο σταθερής δύναμης</u>: για τη μετατόπιση από μια θέση (Α) σε μια άλλη θέση (Γ) ορίζεται σαν το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί το μέτρο της μετατόπισης του σώματος και επί το συνημίτονο της γωνίας θ ανάμεσα στα διανύσματα της δύναμης $\vec{F}$ και της μετατόπισης $\Delta\vec{r}$ (βλέπε εικόνα 1.6)

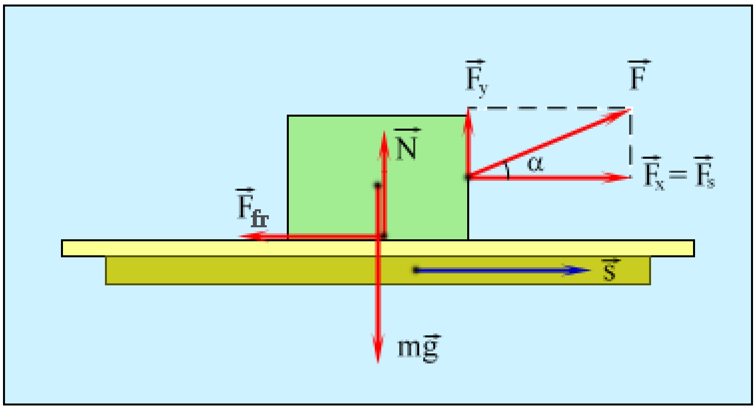
$$W_{\vec{F}}^{A\to\Gamma} = F.\Delta r.\sigma\upsilon\nu\theta = F_x.\Delta x + F_y.\Delta y + F_z.\Delta z \qquad (1.30).$$

Περιπτώσεις:

- Αν $0^o \leq \theta < 90^o$ το έργο είναι *<u>θετικό</u>* και λέγεται *<u>παραγόμενο γιατί</u>* *<u>εκφράζει μεταφορά ενέργειας σε ένα σώμα από το περιβάλλον του</u>*.
- Αν $90^o < \theta \leq 180^0$ το έργο είναι *<u>αρνητικό</u>* και λέγεται *<u>καταναλισκόμενο γιατί εκφράζει μεταφορά ενέργειας από ένα σώμα στο περιβάλλον του</u>*.
- Αν $\theta = 90^o$ (*<u>η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση</u>*) η δύναμη *<u>δεν παράγει έργο</u>*.

Παρατήρηση: από τα παραπάνω προκύπτει ότι μία δύναμη δεν παράγει έργο όταν

- Δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της δηλ. $\Delta x = 0$.
- Η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της γίνεται κάθετα προς την δύναμη.



Εικ. 1.6: Το έργο μιας δύναμης $W_{\vec{F}}^{A\to\Gamma} = F.\Delta x.\sigma\upsilon\nu\theta = F_x.\Delta x$.

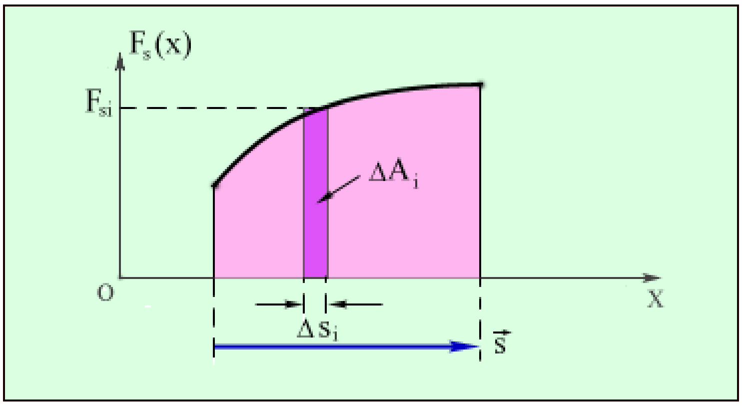
<u>Έργο μεταβλητής δύναμης</u>: αν η συνιστώσα F_x της δύναμης $\vec{F}$ στη διεύθυνση της μετατόπισης δεν παραμένει σταθερή θα πρέπει να υπολογιστεί το *<u>στοιχειώδες έργο</u>* για *<u>πολύ μικρές αλλά μη μηδενικές</u>* (*<u>στοιχειώδεις</u>*) μετατοπίσεις dx

$$dW_{Fx} = F_x.dx = dS \qquad (1.31),$$

όπου dS μια στοιχειώδης επιφάνεια της καμπύλης κάτω από το διάγραμμα $F_x = f(x)$. Τα αποτελέσματα πρέπει να αθροιστούν ώστε να προκύψει το ολικό έργο (i = 1, 2, 3,....):

$$W_{Fx}^{A\to\Gamma} = \sum_i dW_{Fxi} = \sum_i F_{xi}.dx_i = \sum_i dS_i = S \qquad (1.32).$$

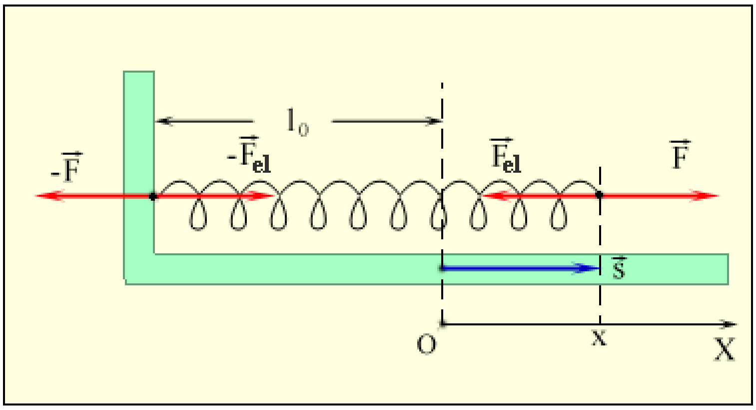
Σχηματικά, το έργο καθορίζεται από την επιφάνεια της καμπύλης κάτω από το διάγραμμα $F_x = f(x)$ (εικ.1.7).



Εικ.1.7. Σχηματικός ορισμός του έργου μεταβλητής δύναμης.

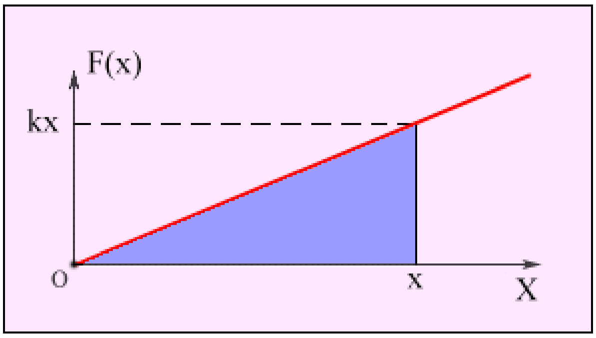
<u>Μονάδα έργου στο S.I.</u>: είναι το Joule που γράφεται **J.** Το Joule είναι το έργο δύναμης 1N που μετακινεί ένα σώμα κατά 1m προς την κατεύθυνση της. Είναι δηλαδή 1 J = 1 N·m .

Σαν παράδειγμα της δύναμης της οποίας η απόλυτη τιμή εξαρτάται από τη συντεταγμένη, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ελαστική δύναμη ενός ελατηρίου, που υπακούει το νόμο του Hooke (βλέπε κεφάλαιο 1.2, Φυσική Α΄ Λυκείου). Για να τεντώσουμε το ελατήριο, πρέπει να ασκήσουμε εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ της οποίας το μέτρο είναι ανάλογο με την επιμήκυνση του ελατηρίου (εικ.1.8).



Εικ.1.8: ένα τεντωμένο ελατήριο. Η κατεύθυνση της εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$ συμπίπτει με την κατεύθυνση της μετατόπισης $\Delta\vec{x}$ και $F_{ελ}$ = k.x, όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

Η εξάρτηση του μέτρου της εξωτερικής δύναμης από τη συντεταγμένη x παριστάνεται από μια ευθεία γραμμή (εικ.1.9).



Εικ.1.9: Η εξάρτηση της απόλυτης τιμής της εξωτερικής δύναμης από τη συντεταγμένη όταν το ελατήριο επιμηκύνεται.

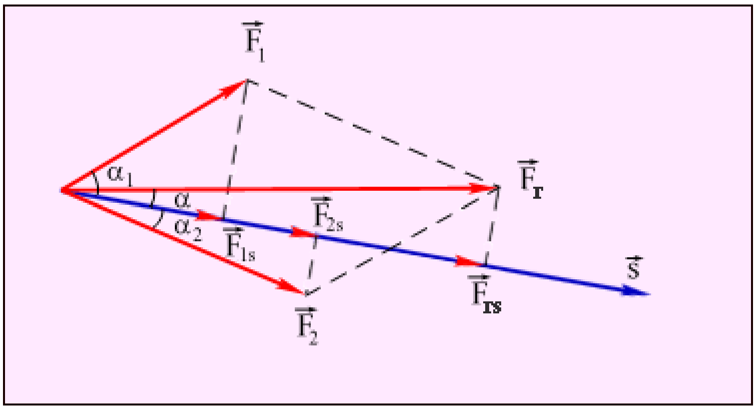
Από την επιφάνεια του τριγώνου στην εικ.1.18.4 κάποιος μπορεί να καθορίσει το έργο που παράγεται από την εξωτερική δύναμη και εφαρμόζεται στο δεξί ελεύθερο άκρο του ελατηρίου :

$$W_{\vec{F}}^{A\to\Gamma} = \frac{k.x^2}{2} \quad (1.33).$$

Το έργο που παράγεται από την εξωτερική δύναμη όταν το ελατήριο είναι συμπιεσμένο δίνεται με βάση την ίδια εξίσωση. Και στις δύο περιπτώσεις το έργο της ελαστικής δύναμης είναι ίσο σε απόλυτη τιμή με το έργο της εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$ και έχει αντίθετο πρόσημο.

<u>Αρχή της Επαλληλίας για το Έργο</u>: αν περισσότερες από μια δυνάμεις εφαρμοστούν στο σώμα, τότε το συνολικό έργο όλων των δυνάμεων είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των έργων που παράγουν ξεχωριστές δυνάμεις και ίσο με το <u>έργο της *συνισταμένης των εφαρμοζόμενων δυνάμεων*</u> (βλέπε εικ.1.10).

$$W_{\mathrm{ΟΛ}}^{\mathrm{Α}\to\Gamma} W_{\sum\vec{F}}^{\mathrm{Α}\to\Gamma} = W_{\vec{F}_1}^{\mathrm{Α}\to\Gamma} + W_{\vec{F}_2}^{\mathrm{Α}\to\Gamma} + ... = \sum_i W_{\vec{F}_i}^{\mathrm{Α}\to\Gamma} \qquad (1.34).$$



Εικ. 1.10. Το έργο της συνισταμένης δύναμης.

<u>Κινητική Ενέργεια:</u> μονόμετρο φυσικό μέγεθος, Ένα σώμα έχει κινητική ενέργεια όταν κινείται, δηλαδή όταν έχει ταχύτητα. Η κινητική ενέργεια είναι ανάλογη της μάζας (m) του σώματος και ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητάς του, δηλαδή ισχύει :

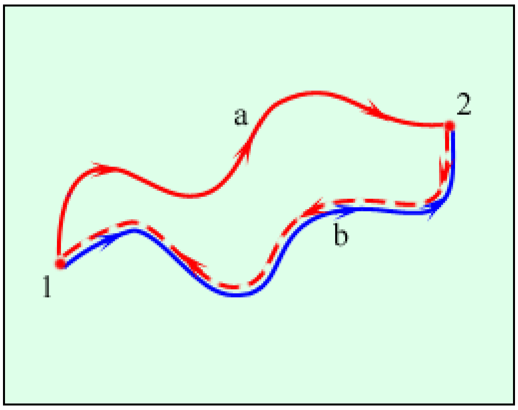
$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2} \qquad (1.35).$$

<u>Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)</u>: σε κάθε μετατόπιση το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος

$$W_{\vec{F}(o\lambda)}^{\mathrm{Α}\to\Gamma} = E_{K(\Gamma)} - E_{K(A)} = \Delta E_K^{\mathrm{Α}\to\Gamma} \qquad (1.36).$$

Αυτή η έκφραση δείχνει ότι το έργο της δύναμης (ή της συνισταμένης όλων των δυνάμεων), συνδέεται με την μεταβολή του τετραγώνου της ταχύτητας (όχι με την ταχύτητα).

Συντηρητικές ή διατηρητικές δυνάμεις: μια δύναμη λέγεται συντηρητική όταν το έργο σε μια οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή είναι ίσο με μηδέν. Αυτό φαίνεται στην εικόνα 1.11. Οι βαρυτικές, οι ηλεκτροστατικές και οι ελαστικές δυνάμεις είναι συντηρητικές.



Εικ.1.11. Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης $W_{1a2}=W_{1b2}$. Το έργο σε μια κλειστή τροχιά $W=W_{1a2}+W_{2b1}=W_{1a2}-W_{1b2}=0$.

Θεώρημα Μεταβολής της Δυναμικής Ενέργειας (Θ.Μ.Δ.Ε.): το έργο μιας *συντηρητικής δύναμης* δεν εξαρτάται από την τροχιά της κίνησης του σώματος και καθορίζεται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σώματος. Για μια τέτοια δύναμη μπορούμε να ορίσουμε μια μορφή ενέργειας, τη *δυναμική ενέργεια*, η μεταβολή της οποίας σε κάθε μετατόπιση να είναι ίση με το αντίθετο του έργου της *συντηρητικής δύναμης*

$$W_{\vec{F}}^{\mathrm{A}\to\Gamma} = E_{\Delta(\mathrm{A})} - E_{\Delta(\Gamma)} = -\Delta E_{\Delta}^{\mathrm{A}\to\Gamma} \qquad (1.37).$$

Δυναμική Ενέργεια: ένα σώμα έχει δυναμική ενέργεια εάν ασκούνται σε αυτό συντηρητικές δυνάμεις (βαρυτικές, ηλεκτροστατικές δυνάμεις ή δυνάμεις ελαστικής παραμόρφωσης). Η δυναμική του ενέργεια εξαρτάται από το μέγεθος των δυνάμεων αυτών και τη θέση ή την κατάσταση του σώματος (σε σχέση με τα σώματα με τα οποία αλληλεπιδρά). Δυναμική ενέργεια έχει λ.χ. ένας πλανήτης που περιστρέφεται γύρω από τη Γη λόγω τη έλξης που δέχεται από αυτή.

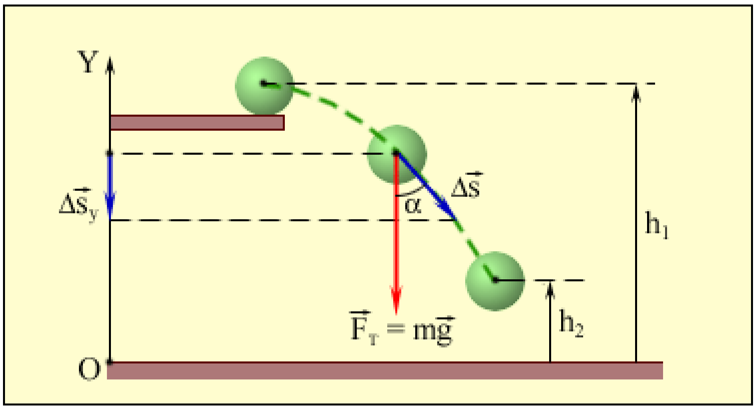
Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια: ονομάζουμε την ενέργεια που έχει ένα αντικείμενο που βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος, λόγω του βάρους του. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ($E_{\delta\upsilon\nu(\mathrm{B})}$) ισούται με το έργο που χρειάστηκε για να ανυψωθεί σε ύψος h το αντικείμενο, δηλαδή ισχύει:

$$E_{\Delta(\mathrm{B}),1} - E_{\Delta(\mathrm{B}),2} = \mathrm{W_B} = \mathrm{B\ h} \qquad (1.38).$$

αλλά $B = m.g$ και $E_{\Delta(B),2} = 0$ (ορίζουμε αυθαίρετη στάθμη αναφοράς, συνήθως την επιφάνεια της Γης), επομένως

$$E_{\Delta(B)} = mgh \qquad (1.39).$$

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια θα μεταβληθεί μόνο εάν οι δύο θέσεις έχουν υψομετρική διαφορά h και η μεταβολή της θα είναι ίση με mgh. Η ίδια μεταβολή θα προκύψει όποιο δρόμο και αν ακολουθήσει το σώμα από την θέση Α στην θέση Β (βλέπε εικόνα 1.12).



Εικ.1.12. Το έργο της δύναμης της βαρύτητας.

<u>Ελαστική Δυναμική Ενέργεια:</u> η δυναμική ενέργεια ενός παραμορφωμένου ελαστικού σώματος είναι ίση με το έργο της ελαστικής δύναμης σε μια μετάβαση από μια δοσμένη κατάσταση σε μια άλλη με μηδενική παραμόρφωση .

$$E_{\Delta(E\Lambda)} = \frac{kx^2}{2} \qquad (1.40).$$

<u>Δυναμική Ενέργεια Ταλάντωσης:</u> η συνισταμένη δύναμη στη Γ. Α. Τ. είναι διατηρητική (συντηρητική), δηλαδή από το Θ. Μ. Δ. Ε. θα ισχύει

$$\sum_i^{A\to A} W_{\Sigma\vec{F}} = 0 \Leftrightarrow dW_{\Sigma\vec{F}} = -dE_{\Delta(\tau\alpha\lambda)} \qquad (1.41).$$

Από τον ορισμό του έργου για τη στοιχειώδη μετόπιση έχουμε

$$dW_{\Sigma\vec{F}} = -D.x.dx \qquad (1.42).$$

Από τις (1.41), (1.42) προκύπτει ότι (με κατάλληλη επιλογή της σταθεράς ολοκλήρωσης):

$$\frac{dE_{\Delta(\tau\alpha\lambda)}}{dx} = D.x \Rightarrow \tag{1.43}$$

$$E_{\Delta(\tau\alpha\lambda)} = \frac{D.x^2}{2} \tag{1.44}$$

<u>Μηχανική Ενέργεια</u>: ενός σώματος ονομάζουμε το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας κάθε χρονική στιγμή, επομένως ισχύει:

$$E_M = E_K + E_\Delta \tag{1.45}$$

Ένα σώμα που έχει μηχανική ενέργεια μπορεί να προκαλέσει μηχανικές μεταβολές στο ίδιο ή σε άλλα σώματα. Μηχανική ενέργεια έχει ένα σώμα που κινείται, ένα αντικείμενο που πέφτει, ένα σώμα που ανυψώνεται, ένα συσπειρωμένο ελατήριο.

<u>Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.)</u>: η μηχανική ενέργεια ενός σώματος διατηρείται σταθερή, όταν σε αυτό επιδρούν μόνο <u>συντηρητικές δυνάμεις</u> (βαρυτικές, ηλεκτροστατικές δυνάμεις ή δυνάμεις ελαστικής παραμόρφωσης).

Παρατηρήσεις:

- Είναι πολύ σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η *<u>Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας</u>* μας επιτρέπει να αποκτήσουμε τη σχέση ανάμεσα στις συντεταγμένες και στις ταχύτητες του σώματος σε δύο διαφορετικά σημεία της τροχιάς του χωρίς την ανάλυση του νόμου της κίνησης σε όλα τα ενδιάμεσα σημεία. Η εφαρμογή της *<u>Αρχής Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας</u>* μπορεί να απλοποιήσει σημαντικά τη λύση ορισμένων φυσικών προβλημάτων.
- Κάτω από πραγματικές συνθήκες σχεδόν πάντοτε παράλληλα με τις βαρυτικές δυνάμεις, τις ελαστικές δυνάμεις και άλλες δυνάμεις διατήρησης, δρουν δυνάμεις τριβής και δυνάμεις αντίστασης σε κινούμενα σώματα. Η δύναμη της τριβής δεν είναι συντηρητική. Το έργο της δύναμης της τριβής εξαρτάται από την απόσταση που διανύθηκε. *<u>Στην τριβή δεν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε δυναμική ενέργεια</u>*. Σε τέτοιες περιπτώσεις η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται. Ένα συγκεκριμένο μέρος της μηχανικής ενέργειας μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια των σωμάτων (θερμότητα).

<u>Αρχή Διατήρησης της ΕνέργειαςΤαλάντωσης (Α.Δ.Ε.Ταλ)</u>: σε κάθε αμείωτη ταλάντωση το άθροισμα Κινητικής και Δυναμικής Ενέργειας Ταλάντωσης παραμένει σταθερό (Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας της Ταλάντωσης) και ίσο με την Ολική Ενέργεια της Ταλάντωσης.

$$E_{\mathrm{K}} + E_{\Delta(\tau\alpha\lambda)} = E_{\mathrm{O\Lambda}(\tau\alpha\lambda)} \qquad (1.46).$$

Απόδειξη (στην περίπτωση της Γ.Α.Τ.)**:** από τους τύπους της κινητικής (1.35) και της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης (1.44) έχουμε, με τη βοήθεια τριγωνομετρικών τύπων:

$$E_{\Delta(\tau\alpha\lambda)} = \frac{m.(\omega_0.x_0)^2.\eta\mu^2(\omega_0.t+\varphi_0)}{2} \Rightarrow \qquad (1.47)$$

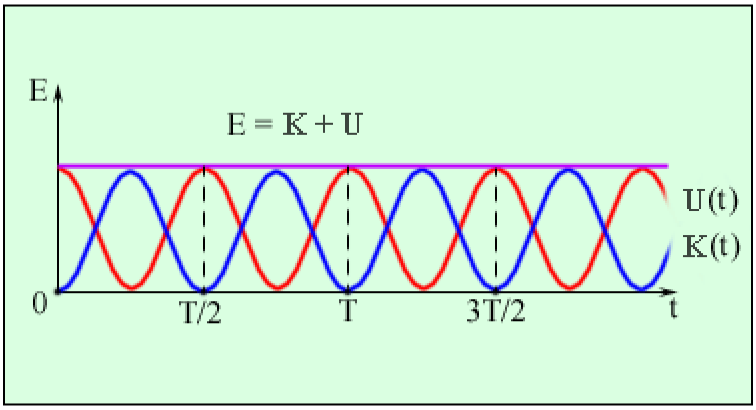
$$E_{\Delta(\tau\alpha\lambda)} = \frac{m.(\omega_0.x_0)^2.[1-\sigma\upsilon\nu(2.\omega_0.t+2.\varphi_0)]}{2} \qquad (1.48).$$

$$E_{\mathrm{K}} = \frac{m.(\omega_0.x_0)^2.\sigma\upsilon\nu^2(\omega_0.t+\varphi_0)}{2} \Rightarrow \qquad (1.49)$$

$$E_{\mathrm{K}} = \frac{m.(\omega_0.x_0)^2.[1+\sigma\upsilon\nu(2.\omega_0.t+2.\varphi_0)]}{2} \qquad (1.50).$$

Τελικά προκύπτει

$$E_{\mathrm{K}} + E_{\Delta(\tau\alpha\lambda)} = \frac{D.x_0^2}{2} = \frac{m.\upsilon_0^2}{2} = E_{\mathrm{O\Lambda}(\tau\alpha\lambda)} \qquad (1.51).$$



Εικ.1.13. Διαγράμματα ενέργειας- χρόνου σε Απλή Αρμονική Ταλάντωση.

Το απλό ή μαθηματικό εκκρεμές.

Εργαζόμαστε σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων

$$\sum F_x = -T_x = -m.g.\eta\mu\varphi \qquad (1.52).$$

Για μικρές γωνίες απόκλισης του νήματος από την κατακόρυφο έχουμε

$$\sum F_x \approx -\, m.g.εφφ \Rightarrow \qquad (1.53)$$

$$\sum F_x = -\frac{m.g}{l}.x \qquad (1.54),$$

όπου l το μήκος του εκκρεμούς και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Αυτό γράφεται ισοδύναμα

$$\sum F_x = -\, D.x \ \text{(δύναμη επαναφοράς)} \qquad (1.55),$$

με σταθερά επαναφοράς

$$D = \frac{m.g}{l} \qquad (1.56).$$

Επομένως, για μικρές γωνίες απόκλισης από την κατακόρυφο, το απλό εκκρεμές εκτελεί Γ.Α.Τ. και η μαθηματική σχέση για την περίοδό του είναι η

$$T = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1.57).$$

Φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις (κινηματική και δυναμική μελέτη).

Σε μια φθίνουσα ταλάντωση στην οποία η τριβή είναι ανάλογη της ταχύτητας (με σταθερά αναλογίας b) ισχύει

$$\sum F_x = -\, D.x - b.υ_x \ \text{(D: σταθερά επαναφοράς)} \qquad (1.58),$$

(1.9), (1.13), (1.20),(1.58) $\Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2.\gamma.\dfrac{dx}{dt} + \omega_{00}^2.x = 0$ (1.59),

με $$\omega_{00} = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad (1.60),$$

και $\gamma = \dfrac{b}{2m}$ (διαφορική εξίσωση της φθίνουσας ταλάντωσης) (1.61).

Για τη λύση της (1.59) εξετάζουμε περιπτώσεις :

- Για b $\geq 2.m.\omega_{00}$ η κίνηση είναι απεριοδική-το κινητό προσεγγίζει τη θέση ισορροπίας του χωρίς ποτέ να τη φτάνει.

- Για b <2.m.ω_{00} η κίνηση είναι φθίνουσα ταλάντωση και ισχύει

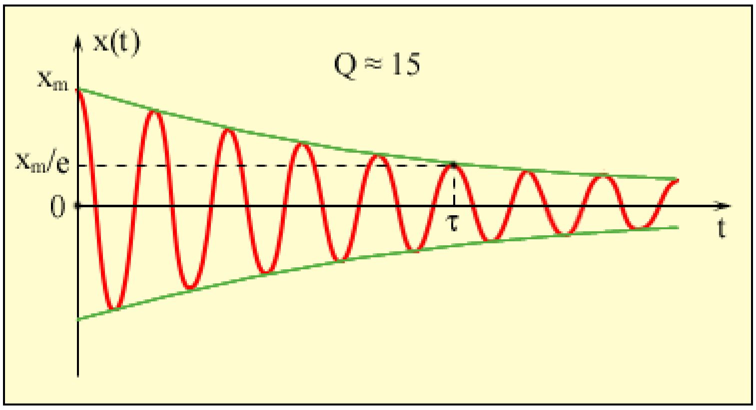
$$x = x_0.\exp(-\gamma.t).\eta\mu(\omega_0.t + \varphi_0) \quad \text{(απομάκρυνση)} \qquad (1.62),$$

όπου ω_0 η κυκλική συχνότητα του συστήματος, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{b^2}{4.m^2}} \approx \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad (1.63),$$

φ_0 η αρχική φάση και x_0 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης για t = 0 (τα φ_0, x_0 καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες). Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης εξαρτάται από το χρόνο και δίνεται από τη σχέση:

$$A = x_0.\exp(-\gamma.t) \qquad (1.64).$$



Εικ.1.14. Διάγραμμα απομάκρυνσης- χρόνου σε φθίνουσα ταλάντωση.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις- συντονισμός

Μελετάμε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις στις οποίες η εξωτερική δύναμη που τις προκαλεί είναι συνάρτηση της μορφής

$$F = F_0.\sigma\upsilon\nu(\omega.t) \qquad (1.65),$$

οπότε (D: σταθερά επαναφοράς)

$$\sum F_x = -D.x - b.\upsilon_x + F_0.\sigma\upsilon\nu(\omega.t) \qquad (1.66),$$

(1.9), (1.13), (1.20),(1.66) $\Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2.\gamma.\dfrac{dx}{dt} + \omega_{00}^2.x = F_0\sigma\upsilon\nu(\omega.t)$ (1.67), με $$\omega_{00} = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad (1.68),$$

(διαφορική εξίσωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης) και

$$\gamma = \frac{b}{2m} \qquad (1.69).$$

Οι λύσεις της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης στη μόνιμη κατάσταση του συστήματος είναι

$$x = A.\eta\mu(\omega.t + \varphi) \text{ (απομάκρυνση)} \qquad (1.70),$$

$$\upsilon_x = \omega.A.\sigma\upsilon\nu(\omega.t + \varphi) \quad \text{(ταχύτητα)} \qquad (1.71),$$

όπου

$$A = \frac{F_0}{m.\sqrt{(\omega - \omega_{00})^2 + 4.\gamma^2.\omega^2}} \qquad (1.72).$$

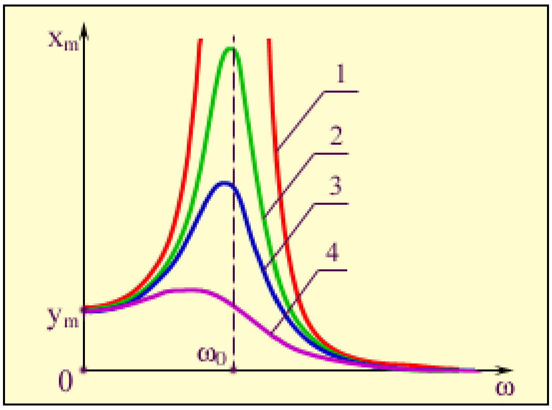
$$\varepsilon\varphi\phi = \frac{\omega_{00}^2 - \omega^2}{2.\gamma.\omega} \qquad (1.73).$$

Παρατηρήσεις:

- Εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις πραγματοποιούνται στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος (A.C.)
- Σύγκριση ελεύθερων και εξαναγκασμένων ταλαντώσεων

Ελεύθερη ταλάντωση	Εξαναγκασμένη ταλάντωση
Ασκείται μόνο μια φορά εξωτερική δύναμη στο ταλαντούμενο σύστημα που το εκτρέπει από τη θέση ισορροπίας	Ασκείται συνεχώς στο ταλαντούμενο σύστημα περιοδική εξωτερική δύναμη (διεγέρτης) συχνότητας f
Η συχνότητα του ταλαντούμενου συστήματος είναι καθορισμένη και ονομάζεται ιδιοσυχνότητα. Εξαρτάται μόνο από τα χαρακτηριστικά ταλαντούμενου συστήματος και αποτελεί μια σταθερά αυτού.	Η συχνότητα ταλάντωσης δεν είναι σταθερή αλλά ισούται κάθε φορά με τη συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης.
Το πλάτος παραμένει σταθερό αν είναι αμείωτη και εξαρτάται από την ενέργεια που δώσαμε αρχικά στο σύστημα για να το θέσουμε σε	Το πλάτος εξαρτάται από τη συχνότητα και το πλάτος του διεγέρτη. Όταν η συχνότητα του διεγέρτη γίνεται ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντούμενου

ταλάντωση.	συστήματος το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο (συντονισμός).



Εικ.1.15. Καμπύλες συντονισμού για διαφορετικούς ρυθμούς απόσβεσης. 1 - ένα σύστημα ταλαντώνεται χωρίς τριβή. Στο συντονισμό το πλάτος x_m των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων αυξάνει χωρίς όριο. 2, 3, 4 - οι πραγματικές καμπύλες συντονισμού για συστήματα που ταλαντώνονται για διάφορες αποσβέσεις. Για χαμηλές συχνότητες ($\omega << \omega_0$) $x_m \approx y_m$. Για μεγάλες συχνότητες ($\omega >> \omega_0$) $x_m \to y_m$.

Σύνθεση ταλαντώσεων

1. Σύνθεση δυο Γ. Α. Τ. με την ίδια συχνότητα και διεύθυνση γύρω από το ίδιο σημείο.

$$x_1 = x_{01}.\eta\mu(\omega_0.t) \quad (1.74),$$

$$x_2 = x_{02}.\eta\mu(\omega_0.t + \theta_0) \quad (1.75),$$

$$x = x_1 + x_2 \text{ (Αρχή της Επαλληλίας)} \quad (1.76).$$

Από τις σχέσεις (1.74),(1.75),(1.76) προκύπτει με πράξεις ότι

$$x = x_{01}.\eta\mu(\omega_0.t) + x_{02}.\eta\mu(\omega_0.t).\sigma\upsilon\nu\theta_0 + x_{02}.\eta\mu\theta_0.\sigma\upsilon\nu(\omega_0.t) \quad (1.77)$$

$$\Leftrightarrow x = (x_{01} + x_{02}.\sigma\upsilon\nu\theta_0).\eta\mu(\omega_0.t) + x_{02}.\eta\mu\theta_0.\sigma\upsilon\nu(\omega_0.t) \quad (1.78).$$

$$\Rightarrow x = x_0.\eta\mu(\omega_0.t + \varphi_0) \quad (1.79),$$

με

$$x_0 = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2.x_{01}.x_{02}.\sigma\upsilon\nu\theta_0} \quad (1.80),$$

$$\varepsilon\phi\varphi_0 = \frac{x_{02}.\eta\mu\theta_0}{x_{01} + x_{02}.\sigma\upsilon\nu\theta_0} \quad (1.81).$$

Ειδικές περιπτώσεις:

- $\theta_0 = 0 \Rightarrow \quad x_0 = x_{01} + x_{01}$ και $\varphi_0 = 0$ (1.82).
- $\theta_0 = \pi \Rightarrow \quad x_0 = |\,x_{01} - x_{01}|$ και $\varphi_0 = 0$ ή $\varphi_0 = \pi$ (1.84).

2. Σύνθεση δυο Γ. Α. Τ. με το ίδιο πλάτος και διεύθυνση αλλά με διαφορετικές συχνότητες γύρω από το ίδιο σημείο.

$$x_1 = x_0.\eta\mu(\omega_1.t) \quad (1.86),$$

$$x_2 = x_0.\eta\mu(\omega_2.t) \quad (1.87),$$

$$x = x_1 + x_2 \text{ (Αρχή της Επαλληλίας)} \quad (1.88).$$

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2.\ \eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad (1.89)$$

$$(1.86),(1.87),(1.88),(1.89) \Rightarrow x = 2.x_0.\sigma\upsilon\nu\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right).t\right].\eta\mu\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right).t\right] \quad (1.90).$$

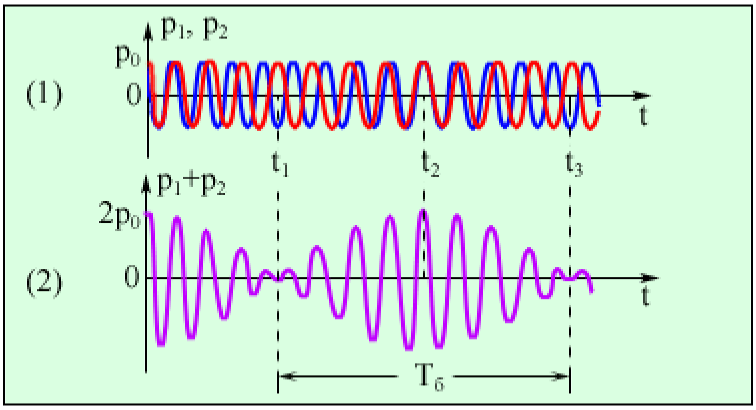
Αν $$\omega_1 \approx \omega_2 \left(\approx \overline{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) \quad (1.91),$$

τότε $$x_0' = 2.\ x_0.\sigma\upsilon\nu\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right).t\right] \approx \text{σταθ.} \quad (1.92),$$

και $$x = x_0'.\eta\mu(\overline{\omega}.t) \quad (1.93).$$

Στην περίπτωση αυτή η κίνηση του σώματος θα λέμε ότι παρουσιάζει διακροτήματα (το πλάτος μεταβάλλεται πολύ αργά από το 0 ως το 2. x_0). Ο χρόνος ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς μηδενισμούς ή μεγιστοποιήσεις του πλάτους θα λέγεται περίοδος (T_δ) του διακροτήματος. Ακολουθεί ο υπολογισμός της περιόδου του διακροτήματος:

$$x_0' = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right).t\right] = 0 \Rightarrow T_\delta = \frac{1}{|f_2 - f_1|} \Rightarrow f_\delta = |f_2 - f_1|.$$



Εικ.1.16. Διακροτήματα από την υπέρθεση δύο ηχητικών κυμάτων με κοντινές συχνότητες.

Τυπολόγιο 1ου Κεφαλαίου

Γραμμική Αρμονική Ταλάντωση

$x = x_0.ημ(ω_0.t + φ_0)$ (απομάκρυνση)

$υ_x = υ_0.συν(ω_0.t + φ_0)$ (ταχύτητα)

$υ_0 = ω_0. x_0$ (πλάτος ταχύτητας)

$a_x = –a_0.ημ(ω_0.t + φ_0)$ (επιτάχυνση)

$a_0 = ω_0^2. x_0$ (πλάτος επιτάχυνσης)

$\sum F_x = – D.x$ (δύναμη επαναφοράς)

$$E_{K(\tau\alpha\lambda)} = \frac{m\upsilon_x^2}{2}$$ (κινητική ενέργεια)

$$E_{\Delta(\tau\alpha\lambda)} = \frac{D.x^2}{2}$$ (δυναμική ενέργεια)

Φθίνουσα Ταλάντωση

$\sum F_x = – D.x – b.υ_x$ (D: σταθερά επαναφοράς)

και $\gamma = \dfrac{b}{2m}$ (διαφορική εξίσωση της φθίνουσας ταλάντωσης)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{b^2}{4.m^2}} \approx \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$x = x_0.\exp(–γ.t).ημ(ω_0.t + φ_0)$ (απομάκρυνση)

$A = x_0.\exp(–γ.t)$ (πλάτος φθίνουσας ταλάντωσης)

$F = F_0.συν(ω.t)$ (εξωτερική δύναμη)

$x = A.ημ(ω.t + φ)$ (απομάκρυνση)

$\upsilon_x = \omega.A.\sigma\upsilon\nu(\omega.t + \varphi)$ (ταχύτητα)

όπου

$$A = \frac{F_0}{m.\sqrt{(\omega - \omega_{00})^2 + 4.\gamma^2.\omega^2}}$$

$$\varepsilon\varphi\phi = \frac{\omega_{00}^2 - \omega^2}{2.\gamma.\omega}$$

1. Σύνθεση δυο Γ. Α. Τ. με την ίδια συχνότητα και διεύθυνση γύρω από το ίδιο σημείο.

$$x_0 = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2.x_{01}.x_{02}.\sigma\upsilon\nu\theta_0}$$

$$\varepsilon\phi\varphi_0 = \frac{x_{02}.\eta\mu\theta_0}{x_{01} + x_{02}.\sigma\upsilon\nu\theta_0}$$

Ειδικές περιπτώσεις:

- $\theta_0 = 0 \Rightarrow \quad x_0 = x_{01} + x_{01}$ και $\varphi_0 = 0$
- $\theta_0 = \pi \Rightarrow \quad x_0 = |\, x_{01} - x_{01}|$ και $\varphi_0 = 0$ ή $\varphi_0 = \pi$

2. Σύνθεση δυο Γ. Α. Τ. με το ίδιο πλάτος και διεύθυνση αλλά με διαφορετικές συχνότητες γύρω από το ίδιο σημείο.

$x_1 = x_0.\eta\mu(\omega_1.t)$
$x_2 = x_0.\eta\mu(\omega_2.t)$

$x = x_1 + x_2$ (Αρχή της Επαλληλίας)

$$x = 2.x_0.\sigma\upsilon\nu\left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right).t\right].\eta\mu\left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right).t\right]$$

Αν $\quad \omega_1 \approx \omega_2 \left(\approx \overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$

τότε $\quad x_0' = 2.\, x_0.\sigma\upsilon\nu\left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right).t\right] \approx$ σταθ.

και $\quad x = x_0'.\eta\mu(\overline{\omega}.t)$

$$\mathrm{T}_{\delta} = \frac{1}{|f_2 - f_1|} \Rightarrow f_{\delta} = |f_2 - f_1|.$$

Ασκήσεις

Κινηματική Γ.Α.Τ.

1. Ένα υλικό σημείο κινείται σε περιφέρεια κύκλου με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Αποδείξτε ότι η προβολή του σε μια οποιαδήποτε διάμετρο του κύκλου εκτελεί Γ. Α. Τ. με κυκλική συχνότητα ίση κατά μέτρο με τη γωνιακή ταχύτητα της κυκλικής κίνησης.

2. Ένα υλικό σημείο κάνει ευθύγραμμη κίνηση και η απομάκρυνση από ένα σημείο της τροχιάς του είναι $x = ημ(ω.t)+ 3^{1/2}.συν(ω.t)$. Να αποδειχτεί ότι η κίνηση είναι Γ. Α. Τ. και να βρεθούν το πλάτος x_0 και η αρχική φάση $φ_0$.

3. Ένα σώμα εκτελεί Γ. Α. Τ. και η ταχύτητά του έχει τιμές $υ_1 = 6\ m.s^{-1}$ και $υ_2 = 8\ m.s^{-1}$ όταν αντίστοιχα η απομάκρυνσή του είναι $x_1 = 4$ m και $x_2 = 3$ m. Βρείτε το πλάτος x_0 και την περίοδο Τ.

4. Ένα σώμα εκτελεί Γ. Α. Τ με πλάτος x_0. Τη χρονική στιγμή t = 0 έχει

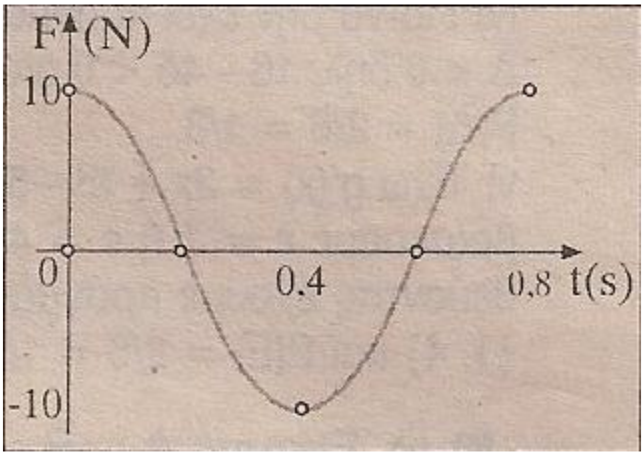
   - απομάκρυνση $(0,5\sqrt{3}).x_0$ και αρνητική ταχύτητα
   - απομάκρυνση $(-0,5\sqrt{2}).x_0$ και θετική ταχύτητα.

   Βρείτε την αρχική του φάση σε κάθε περίπτωση.

5. Ένας ταλαντωτής με μάζα m = 1 kg εκτελεί Γ. Α. Τ. με ω = 2 rad/sec και πλάτος x_0. Όταν ο ταλαντωτής απορροφήσει από το περιβάλλον ενέργεια $ΔΕ = 4.10^{-2}$ joule, το πλάτος του αυξάνεται κατά 10 cm. Να βρείτε το αρχικό πλάτος x_0.

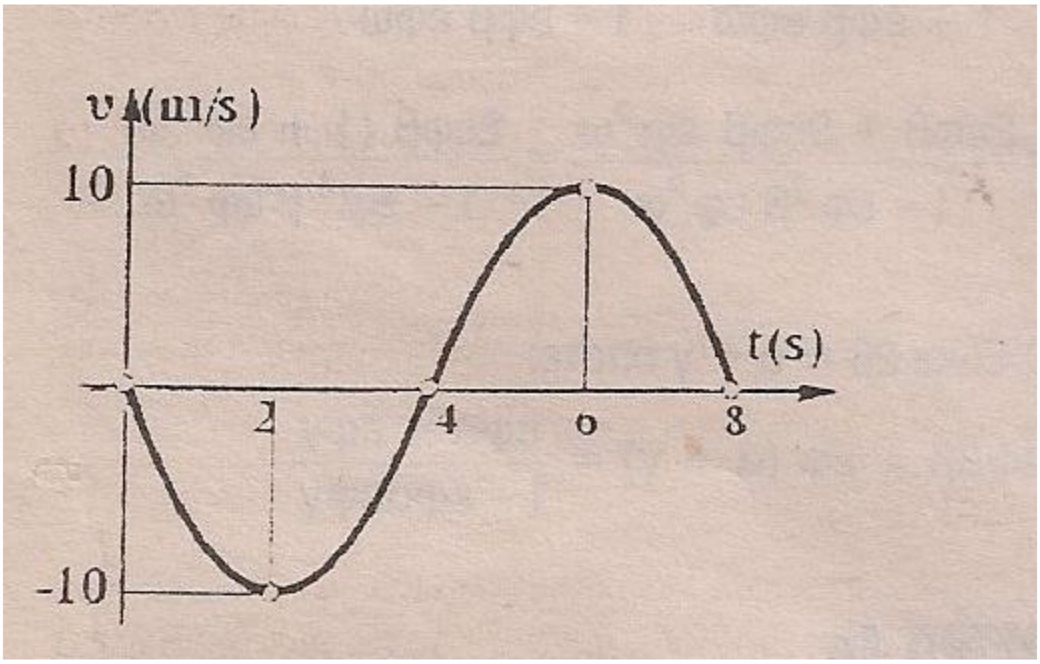
6. Το διάγραμμα F = f(t) για ένα σώμα μάζας m = 16 kg που εκτελεί Γ. Α. Τ. φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές, ποιες λαθεμένες και γιατί ($π^2 = 10$).

   - Η σταθερά επαναφοράς είναι $D = 100\ N.m^{-1}$.
   - Τις χρονικές στιγμές 0 s, 0,4 s, 0,8 s ο ταλαντωτής είναι στη θέση x = 0.
   - Τις χρονικές στιγμές 0,2 s,0,6 s το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο.
   - Τη στιγμή 0,3 s το σώμα κινείται προς θέση πλάτους.
   - Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι $x = 0,01.ημ(2,5.π.t + π)$ (S.I.).



7. Το διάγραμμα υ = f(t) για ένα σώμα μάζας m = 0,8 kg που εκτελεί Γ. Α. Τ. φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές, ποιες λαθεμένες και γιατί ($\pi^2 = 10$).

- Η σταθερά επαναφοράς είναι D = 5 $N.m^{-1}$.
- Τις χρονικές στιγμές 0 s, 4 s, 8 s ο ταλαντωτής είναι στη θέση x = 0.
- Τις χρονικές στιγμές 2 s,6 s το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο.
- Τη στιγμή 3 s το σώμα κινείται προς τη θέση ισορροπίας.
- Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι x = Α.ημ(0,25.π.t + 0,5.π) (S.I.).



Δυναμική Γ.Α.Τ - ελατήρια

1. Σώμα με μάζα m = 2 kg ισορροπεί δεμένο στα άκρα δύο κατακόρυφων ελατηρίων με ακλόνητα τα άλλα της άκρα (το K_1 πάνω και το K_2 κάτω) με k_1 = 150 $N.m^{-1}$ και k_2 = 50 $N.m^{-1}$. Στη θέση ισορροπίας και τα δύο ελατήρια

είναι παραμορφωμένα (επιμηκυμένα). Απομακρύνουμε το σώμα από τη Θ. Ι. κατά 10^{-2} m και το αφήνουμε ελεύθερο.

- Αποδείξτε ότι εκτελεί Γ.Α.Τ.
- Βρείτε τη χρονοσυνάρτηση της κίνησης από τη στιγμή που το αφήνουμε ελεύθερο.

2. Στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k ισορροπεί βάθρο μάζας m_1 που πάνω του φέρει σώμα μάζας m_2.

α) Αν απομακρύνουμε το σύστημα m_1-m_2 από τη θέση ισορροπίας του θα εκτελέσει Γ. Α. Τ. Βρείτε τη σταθερά επαναφοράς για το σύστημα m_1–m_2 και για κάθε σώμα χωριστά .
β) Αν $m_1 = 600$ g, $m_2 = 400$ g και $k = 100$ N.m^{-1} βρείτε:

- την περίοδο Τ της ταλάντωσης που μπορεί να κάνει το σύστημα
- το μέγιστο πλάτος x_{0max} της ταλάντωσης ώστε να μην χάνεται η επαφή του m_1 με το m_2.
- αν το πλάτος είναι $x_0 = 20$ cm να βρείτε σε ποια απομάκρυνση θα αποσπαστεί το m_1 από το m_2 και ποια ταχύτητα θα έχει εκείνη τη στιγμή.

3. Σώμα M = 9 kg κρέμεται από την ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ελατηρίου με K = 100 N.m^{-1}. Από ύψος h = 5 m πάνω από το σώμα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα κάτω m = 1 kg με $υ_0 = 10$ m/sec. Το m κολλά στο M. Αποδείξτε ότι το συσσωμάτωμα (M + m) εκτελεί Γ. Α. Τ. και βρείτε το πλάτος x_0 της ταλάντωσης του (g =10 m.s^{-2}).

4. Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί σώμα μάζας m = 4 kg στερεωμένο στη μια άκρη ιδανικού ελατηρίου που η άλλη του άκρη είναι ακλόνητη. Με εξωτερική δύναμη F = 6,4 N απομακρύνουμε το σώμα κατά $x_1 = 0{,}1$ m από την αρχική του θέση και το αφήνουμε ελεύθερο.

- Βρείτε την σταθερή k του ελατηρίου
- Αποδείξτε ότι το σώμα εκτελεί Γ. Α. Τ.
- Βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης
- Βρείτε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας μετά από χρόνο $t = \frac{\pi}{6}$ s από τη στιγμή που το αφήσαμε ελεύθερο, καθώς και την ταχύτητά του τότε.

5. Ένα ελατήριο (ιδανικό) είναι κρεμασμένο από ακλόνητη οροφή και στο κάτω του άκρο έχει δίσκο άγνωστης μάζας. Εκτρέπουμε το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του και αυτό εκτελεί Γ. Α. Τ. με περίοδο T_0. Βάζοντας πάνω στο δίσκο μάζα m_1, η περίοδος γίνεται T_1, ενώ αντικαθιστώντας την με άλλη μάζα m_2 η περίοδος γίνεται T_2. Αποδείξτε ότι:

$$m_2 = m_1 . \frac{T_2^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} .$$

6. Κόβουμε ένα ελατήριο που έχει μήκος l σε δέκα πανομοιότυπα κομμάτια μήκους $\frac{l}{10}$ το καθένα. Συνδέουμε όλα τα νέα ελατήρια παράλληλα και από το σύστημα κρεμάμε μάζα M. Να βρείτε πόση μάζα m πρέπει να έχει ένα σώμα κρεμασμένο σε ένα ελατήριο ίδιο με το αρχικό, ώστε να έχει την ίδια περίοδο με την περίοδο της μάζας M που κρέμεται από το σύστημα των 10 ελατηρίων.

7. Σε οριζόντιο τραπέζι είναι στερεωμένο κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k που στην άλλη του άκρη φέρει στερεωμένο σώμα μάζας m_1. Πάνω στο υπάρχει δεύτερο σώμα μάζας m_2 και η διάταξη ισορροπεί. Πιέζουμε λίγο προς τα κάτω το σύστημα και το αφήνουμε ελεύθερο. Υπολογίστε τη σταθερά ταλάντωσης για το σύστημα και για κάθε σώμα χωριστά. Τα δύο σώματα είναι συνεχώς σε επαφή.

8. Μια οριζόντια επιφάνεια εκτελεί κατακόρυφη Γ. Α. Τ. με περίοδο T. Πάνω στην επιφάνεια και μαζί με αυτήν ταλαντώνεται και ένα σώμα. Να βρείτε το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης ώστε να μην χάνεται η επαφή σώματος-επιφάνειας (το g γνωστό).

9. Μια μάζα m = 1 kg τοποθετείται πάνω σε οριζόντια βάση που ταλαντώνεται κατακόρυφα με συχνότητα f = 4 Hz και πλάτος x_0 = 0,005 m.

   - Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη κινητική ενέργεια της μάζας
   - Σε ποια σημεία της τροχιάς η βάση έχει τη μέγιστη κατά μέτρο επιτάχυνση και ποια είναι αυτή;
   - Ποιο πρέπει να είναι το πιο μικρό πλάτος της ταλάντωσης της βάσης ώστε σε κάποιο σημείο της τροχιάς να χάνεται η επαφή βάσης και μάζας;

Δίνεται g =10 $m.s^{-2}$.

10. Ένα σώμα μάζας m_1 = 1 kg είναι συνδεδεμένο στη μια άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 100 $N.m^{-1}$ που η άλλη του άκρη είναι ακλόνητη. Το σώμα εκτελεί Γ. Α. Τ. με πλάτος x_0 = 0,001 m. Ένα βλήμα μάζας m_2 = 0,001 kg κινείται οριζόντια και σφηνώνεται στο σώμα με ταχύτητα υ_2 = 1 m/sec τη στιγμή που το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο ομόρροπα με το βλήμα. Μετά πόσο χρόνο από τη στιγμή της κρούσης και με ποια ταχύτητα περνάει το σύστημα για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του; Πόσο % μεταβάλλεται το πλάτος της ταλάντωσης;

11. Το σώμα M ισορροπεί πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο μεταξύ δυο όμοιων ελατηρίων (σταθεράς k). Τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος (l_0) και τα άλλα άκρα τους είναι ακλόνητα στερεωμένα .

    α) Απομακρύνουμε το σώμα προς τα δεξιά κατά x_0 και το αφήνουμε ελεύθερο. Δείξτε ότι εκτελεί Γ. Α. Τ. και βρείτε την αντίστοιχη περίοδο.

β) Τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται σε θέση μέγιστης απομάκρυνσης αφήνουμε ελεύθερο ένα κομμάτι πλαστελίνης μάζας m.

- Ποιο το ύψος h ώστε η πλαστελίνη να συναντήσει το σώμα στον ελάχιστο δυνατό χρόνο;
- Ποιο το νέο πλάτος της ταλάντωσης;
- Για ποια σχέση των μαζών M και m η νέα περίοδος T΄ είναι διπλάσια της αρχικής;
- Για ποια σχέση των M και m παρατηρείται μείωση της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης κατά 87,5%;

12. Σε οριζόντιο τραπέζι έχουμε στερεώσει κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k = 100 $N.m^{-1}$ και πάνω του ισορροπεί δεμένο σώμα μάζας m_1 = 1 kg. Πάνω στο m_1 ακουμπάμε σώμα μάζας m_2 = 3 kg. Αποδείξτε ότι το σύστημα εκτελεί Γ. Α. Τ και υπολογίστε το πλάτος της. Διερευνείστε αν το m_2 εγκαταλείπει το m_1. Δίνεται g =10 $m.s^{-2}$.

13. Σώμα m_2 = 2 kg ισορροπεί στερεωμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου με k = 100 $N.m^{-1}$ και ακλόνητο το άλλο του άκρο. Από ύψος h = 0,6 m αφήνουμε ελεύθερο δεύτερο σώμα m_1 = 2 kg που κατερχόμενο συγκρούεται πλαστικά με το m_2.

- Αποδείξτε ότι το σύστημα εκτελεί Γ. Α. Τ.
- Βρείτε τη χρονοεξίσωση της κίνησης του συστήματος.
- Βρείτε το χρόνο t_1 από τη στιγμή της κρούσης μέχρι τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας.
- Βρείτε το έργο της ελαστικής δύναμης για το ανωτέρω χρονικό διάστημα .
- Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ορμής τη χρονική στιγμή t_2 = π/30 sec μετά την κρούση.
- Βρείτε την χρονοεξίσωση του χρονικού ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Δίνεται g =10 $m.s^{-2}$.

14. Ένα σώμα εκτελεί Γ. Α. Τ. πλάτους x_0 και περιόδου T πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στην άκρη ελατηρίου. Σε απόσταση $x = (0,5.\sqrt{2}).x_0$ από τη θέση ισορροπίας συναντάει δεύτερο ακίνητο σώμα με το οποίο συγκρούεται πλαστικά .Αν $m_2 = m_1 = m$ βρείτε τη νέα περίοδο T΄ και το νέο πλάτος x_0΄ της ταλάντωσης.

15. Ένας δίσκος μάζας M στηρίζεται (δεμένος) στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k. Πάνω στο δίσκο στέκεται πουλί με μάζα m. Κάποια στιγμή το πουλί πετάει προς τα πάνω με ταχύτητα υ. Αποδείξτε ότι ο δίσκος εκτελεί Γ. Α. Τ. και υπολογίστε το πλάτος της. Δίνεται το g.

16. Στην κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου με $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ στερεώνουμε τη μια άκρη ιδανικού ελατηρίου. Στην άλλη του άκρη ισορροπεί δεμένο σώμα μάζας m_1 =

2 kg . Από σημείο του άξονα του ελατηρίου (προέκταση) και από απόσταση α = 0,9 m από το m_1 εκτοξεύουμε δεύτερο σώμα με m_2 = 3 kg εναντίον του με το οποίο συγκρούεται πλαστικά .

- Αποδείξτε ότι το συσσωμάτωμα εκτελεί Γ. Α. Τ.
- Αν μετά την κρούση η μέγιστη μετατόπιση (συμπίεση) του συσσωματώματος είναι b_{max} = 0,2 m , βρείτε τη σταθερά k του ελατηρίου.

Δίνεται g =10 m.s^{-2}.

17. Ένα αεροπλάνο με μάζα m = 2000 kg προσγειώνεται σε ένα ακίνητο αεροπλανοφόρο με ταχύτητα $υ_0$ = 216 km.h^{-1}.Τη στιγμή της προσγείωσης ένας γάντζος που βρίσκεται στην ουρά του πιάνεται στη μια άκρη ελατηρίου, η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη ακλόνητα στο διάδρομο προσγείωσης. Έτσι το αεροπλάνο σταματά αφού διανύσει διάστημα x_1 = 100 m. Αργότερα ένα πανομοιότυπο αεροπλάνο προσγειώνεται με την ίδια ταχύτητα και με τον ίδιο τρόπο. Όταν όμως έχει διανύσει διάστημα x_2 = 50 m ο γάντζος σπάει. Ποια είναι η ταχύτητα $υ_2$ του αεροπλάνου εκείνη τη στιγμή; Δίνονται: ελατήρια ιδανικά, τριβές ασήμαντες (θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων 1984).

18. Ένα ελατήριο σταθεράς k = 100 N.m^{-1} είναι στερεωμένο κατακόρυφα στο οριζόντιο έδαφος. Από σημείο Α του άξονα του ελατηρίου που απέχει από την ελεύθερη άκρη του h = 4 m αφήνουμε ελεύθερο σώμα μάζας m = 1 kg. Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα καθώς και η συσπείρωση του ελατηρίου τη στιγμή που το σώμα έχει τη μέγιστη ταχύτητα. Δίνεται g = 10 m.s^{-2}.

19. Δυο πανομοιότυπα ελατήρια με σταθερά k = 160 N.m^{-1} στερεώνονται σε οριζόντιο δάπεδο σε κατακόρυφη θέση. Στο πάνω μέρος του ενός αφήνουμε σώμα μάζας m = 1 kg ενώ στο δεύτερο αφήνουμε να πέσει από ύψος h = 0,25 m το ίδιο σώμα. Ζητείται η μέγιστη συσπείρωση καθενός από τα δυο ελατήρια. Δίνεται g = 10 m.s^{-2}.

20. Δυο σώματα με μάζες m_1 = 5 kg και m_2 = 10 kg στερεώνονται στις δυο άκρες ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k. Τοποθετούμε τη διάταξη πάνω σε οριζόντιο επίπεδο σε κατακόρυφη θέση τέτοια ώστε το m_2 να βρίσκεται σε επαφή με το οριζόντιο δάπεδο. Να βρεθεί με ποια κατακόρυφη δύναμη F πρέπει να πιεστεί το m_1 ώστε το m_2 μόλις να ανασηκωθεί. Δίνεται g = 10 m.s^{-2} (θέμα σε Ολυμπιάδα Φυσικής).

21. Σώμα μάζας m_1 = 4 kg ηρεμεί πάνω σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k = 120 N.m^{-1} που η άλλη άκρη του είναι στερεωμένη σε οριζόντιο δάπεδο. Ένα δεύτερο σώμα μάζας m_2 = 2 kg τοποθετείται πάνω στο πρώτο σώμα

- Ποια είναι η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου;
- Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα των σωμάτων;
- Ποια είναι η μέγιστη δύναμη του ελατηρίου;

Δίνεται $g = 10\ m.s^{-2}$.

22. Σώμα μάζας ισορροπεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 300\ N.m^{-1}$ η άλλη άκρη του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένη σε οριζόντιο δάπεδο. Μεταξύ του πάνω άκρου του σώματος και ενός υποστηρίγματος συνδέουμε δεύτερο ελατήριο σταθεράς 2.k έτσι ώστε να βρίσκεται στο φυσικό του μήκος.

- Να βρεθεί το μέτρο της κατακόρυφης προς τα πάνω ταχύτητας που πρέπει να δώσουμε στο σώμα για να φτάσει σε απόσταση $l = 6$ cm από την αρχική του θέση.
- Ποια η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από τη θέση φυσικού μήκους του κάτω ελατηρίου.

Δίνεται $g = 10\ m.s^{-2}$.

23. Στη βάση και στην κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου με γωνία κλίσης $\theta = \frac{\pi}{6}$ στερεώνουμε τα δυο άκρα όμοιων ιδανικών ομοαξονικών ελατηρίων Α και Β αντίστοιχα με $k_A = k_B = k = 100\ N.m^{-1}$. Τα άλλα άκρα τους έχουν προσδεθεί σε σώμα μάζας $m = 4$ kg που ισορροπεί. Κόβουμε το ελατήριο Β.

- Ποια η μέγιστη πρόσθετη συμπίεση του ελατηρίου Α;
- Ποια η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα;

Δίνεται $g = 10\ m.s^{-2}$.

24. Στην κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου είναι στερεωμένο το ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k. Στην άλλη άκρη του είναι στερεωμένο σώμα μάζας m. Η διάταξη ισορροπεί. Δίνουμε στο σώμα με χτύπημα ή με ελαστική κρούση ταχύτητα υ_0 προς τα πάνω. Για ποιες τιμές της ταχύτητας υ_0 το σώμα διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου; Δίνονται επιπλέον η γωνία κλίσης θ και το g.

25. Δίσκος μάζας $M = 2$ kg είναι εξαρτημένος από ελατήριο σταθεράς $k= 5\ N.m^{-1}$ του οποίου το άλλο άκρο στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο. Μια σφαίρα μάζας $m = 1$ kg αφήνεται ελεύθερη από ύψος $h = 1{,}8$ m και ενσωματώνεται στο δίσκο. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος. Δίνεται $g = 10\ m.s^{-2}$.

26. Σώμα $m_1 = 2$ kg είναι δεμένο στη μια άκρη ιδανικού ελατηρίου με $k = 100\ N.m^{-1}$ που η άλλη του άκρη είναι στερεωμένη στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου με $\theta = \frac{\pi}{6}$ και ισορροπεί. Από απόσταση $S = 1{,}3$ m εκτοξεύουμε εναντίον της δεύτερη μάζα $m_2 = 2$ kg με $\upsilon_0 = 4\ m.s^{-1}$ ομοαξονικά στη διεύθυνση του ελατηρίου προς τα πάνω. Αν επιτελεσθεί κεντρική μετωπική πλαστική κρούση ανάμεσα στα m_1 και m_2 βρείτε:

- τη χρονοεξίσωση της κίνησης του συσσωματώματος.
- το χρόνο από τη στιγμή της κρούσης μέχρι τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας.
- το χρονικό ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας τη στιγμή της κρούσης.

Δίνεται g =10 $m.s^{-2}$.

Δυναμική Γ.Α.Τ.- άνωση, εκκρεμές, υδροστατική

1. Σωλήνας σχήματος U με σταθερή διατομή, περιέχει υγρό με μήκος στήλης l = 0,8 m. Βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης που θα εκτελέσει η στήλη του υγρού όταν την μετατοπίσουμε λίγο στο ένα σκέλος (g =10 m/sec^2).

2. Κύλινδρος έχει ύψος h = 0,2 m και ισορροπεί εν μέρει βυθισμένος σε νερό με τον άξονά του κατακόρυφο. Πιέζουμε λίγο τον κύλινδρο προς τα κάτω και τον αφήνουμε ελεύθερο. Αποδείξτε ότι εκτελεί Γ. Α. Τ. και βρείτε την περίοδό του. Δίνεται ότι $d_κ$ = 0,8 $g.cm^{-3}$, $d_υ$ = 1 $g.cm^{-3}$ και g =10 m/sec^2.

3. Ένα κυλινδρικό δοχείο έχει εμβαδόν βάσης S και ύψος h = $2.l_0$, είναι δε τοποθετημένο οριζόντια .Ένα έμβολο μάζας m χωρίζει το δοχείο σε δύο ίσα μέρη, καθένα από τα οποία περιέχει n moles ιδανικού αερίου. Το κυλινδρικό δοχείο βρίσκεται μέσα σε λουτρό μεγάλης θερμοχωρητικότητας ώστε οι μεταβολές του αερίου να θεωρούνται ισόθερμες. Μετατοπίζουμε αργά το έμβολο κατά x, με $x \ll l_0$, και το αφήνουμε ελεύθερο. Να αποδειχτεί ότι το έμβολο εκτελεί Γ. Α. Τ. και να υπολογιστεί η περίοδος Τ. Δίνονται: m, S, l_0, P_0, όπου P_0 η πίεση σε κάθε τμήμα του δοχείου όταν το έμβολο βρίσκεται στο μέσον.

4. Το εκκρεμές ενός ρολογιού θεωρείται απλό εκκρεμές που έχει περίοδο Τ = 2 sec όταν το εκκρεμές βρίσκεται σε ένα τόπο Α όπου g_A = 9,8 m/sec^2. Πόσο θα καθυστερεί το ρολόι σε ένα 24ωρο αν μεταφερθεί σε ένα τόπο Β όπου είναι g_A = 9,74 m/sec^2; Δίνεται $(980/974)^{1/2}$ = 1,003.

5. Ένα απλό εκκρεμές κάνει 100 πλήρεις αιωρήσεις σε 2 min ενώ ένα άλλο κάνει 200 πλήρεις αιωρήσεις στον ίδιο χρόνο και στον ίδιο τόπο. Ποιος είναι ο λόγος των μηκών τους;

6. Για τη Σελήνη ξέρουμε ότι $M_Σ$ = $M_Γ$ /100 και $R_Σ$ = $R_Γ$ /4, όπου $M_Γ$ η μάζα της Γης και $R_Γ$ η ακτίνα της Γης. Να βρείτε την περίοδο μαθηματικού εκκρεμούς με μήκος l = 1 m στη Σελήνη. Δίνεται $g_Γ$ = $π^2$ m/sec^2.

7. Απλό εκκρεμές όταν αιωρείται στον αέρα έχει περίοδο Τ ενώ όταν αιωρείται μέσα σε υγρό ειδικού βάρους $ε_1$ έχει περίοδο T_1. Να αποδείξετε ότι το ειδικό βάρος ε του υλικού του σφαιριδίου του εκκρεμούς είναι:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cdot \frac{T_1^2}{T_1^2 - T^2}.$$

Κρούσεις και ταλαντώσεις

1. Σώμα m_1 = 2 kg ισορροπεί στερεωμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 100 N/m που η άλλη του άκρη είναι ακλόνητη σε οριζόντιο τραπέζι. Από ύψος h = 1,8 m αφήνουμε ελεύθερη δεύτερη μάζα m_2 = 1 kg που συγκρούεται κεντρικά μετωπικά και ελαστικά με την m_1.

   - Αποδείξτε ότι η m_1 μετά την κρούση εκτελεί Γ. Α. Τ.
   - Βρείτε τη χρονοεξίσωση της κίνησης της m_1.
   - Βρείτε το χρόνο t_1 για να πάθει το ελατήριο πρόσθετη συμπίεση ίση με το διπλάσιο της αρχικής.

   Δίνεται g =10 m/sec^2.

2. Δυο σώματα βρίσκονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και απέχουν μεταξύ τους απόσταση α .Κάθε σώμα συνδέεται στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Απομακρύνουμε προς τα αριστερά την m_1 κατά x_1 και την αφήνουμε ελεύθερη. Αν $m_2 = m_1 = m$ και τα σώματα τέλεια ελαστικά

   - σε πόσο χρόνο, μετά την πρώτη κρούση, θα συγκρουστούν ξανά τα δύο σώματα;
   - σε πόση απόσταση από την αρχική θέση της m_1 θα πραγματοποιηθεί η δεύτερη κρούση;

3. Στη βάση κεκλιμένου επιπέδου στερεώνεται ακλόνητα ιδανικό ελατήριο και στο άλλο άκρο του ισορροπεί σώμα μάζας m_1. Από απόσταση α πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο αφήνεται ελεύθερο σώμα μάζας m_2, το οποίο συγκρούεται με το m_1. Βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης:

   - για κεντρική μετωπική ελαστική κρούση.
   - για κεντρική μετωπική πλαστική κρούση.

   Δίνονται: m_1 = 3 kg, m_2 = 1 kg, α = 10 m, θ = π/6 και k = 100 Nm^{-1}.

4. Δυο σώματα με μάζες m_1 και m_2 είναι δεμένα με σχοινί και ανάμεσά τους υπάρχει ιδανικό ελατήριο σταθεράς k συσπειρωμένο κατά x_o. Τα σώματα ισορροπούν πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή κόβουμε το σχοινί. Να βρείτε τις ταχύτητες των σωμάτων τη στιγμή που χάνουν την επαφή τους με το ελατήριο. Θεωρήστε τις βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ των δυο σωμάτων αμελητέες. Να γίνει εφαρμογή στην περίπτωση που m_1 = 1 kg, m_2 = 4 kg, k = 10^4 N.m^{-1} και x_o = 0,1 m.

5. Δυο σώματα με μάζες m_1 και m_2 είναι δεμένα με σχοινί και ανάμεσά τους υπάρχει ιδανικό ελατήριο σταθεράς k συσπειρωμένο κατά x_o. Τα σώματα

ισορροπούν πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή κόβουμε το σχοινί. Να βρείτε τις ταχύτητες των σωμάτων τη στιγμή που χάνουν την επαφή τους με το ελατήριο. Θεωρήστε τις βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ των δυο σωμάτων αμελητέες. Να γίνει εφαρμογή στην περίπτωση που $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 4$ kg, $k = 10^4$ N.m^{-1} και $x_o = 0,1$ m.

6. Ένα μηχανικό σύστημα αποτελείται από δύο σώματα με μάζες $m_1 = 2$ kgr και $m_2 = 3$ kgr ακουμπισμένα στα άκρα συσπειρωμένου κατά $x = 0,2$ m ιδανικού ελατήριου. Το ελατήριο συγκρατείται στην παραπάνω θέση δεμένο με νήμα. Όταν κόψουμε το νήμα το πρώτο σώμα αποκτά ταχύτητα $υ_1$=3 m.s^{-1} όταν το ελατήριο ανακτήσει το φυσικό του μήκος. Ποια ήταν η τάση του νήματος πριν το κόψουμε;

7. Ένα σώμα με $m_1 = 10$ kgr ολισθαίνει πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με $υ_1 = 8$ m.s^{-1}. Μπροστά από αυτό κινείται στην ίδια διεύθυνση και φορά δεύτερο σώμα με μάζα $m_2 = 5$ kgr και $υ_2 = 2$ m.s^{-1}. Ένα αβαρές ελατήριο με $k = 12.000$ N.m^{-1} είναι στερεωμένο οριζόντια στο εμπρός μέρος του m_1. Τα σώματα συγκρούονται. Βρείτε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου. Τριβές δεν υπάρχουν.

8. Από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου με $θ = 30^o$ στερεώνεται ιδανικό ελατήριο και στην άλλη άκρη δένεται σώμα μάζας m_1= 2 kgr. Το σύστημα ισορροπεί. Από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου εκτοξεύεται δεύτερο σώμα $m_2 = 3$ kgr με αρχική ταχύτητα $υ_o = 5$ m.s^{-1} που έχει τη διεύθυνση του ελατηρίου. Ακολουθεί κεντρική πλαστική κρούση των δύο σωμάτων. Αν η αρχική απόσταση των δύο σωμάτων είναι $S = 0,9$ m και η μέγιστη συσπείρωση που παθαίνει το ελατήριο από τη στιγμή της κρούσης είναι $x_{max} = 0,2$ m να βρείτε τη σταθερή k του ελατηρίου. Δίνεται ότι τριβές θεωρούνται ασήμαντες και ότι $g = 10$ m.s^{-2}.

9. Σώμα μάζας m έχει στερεωθεί στη μια άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθερής k που η άλλη του άκρη είναι ακλόνητη. Συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά α και το αφήνουμε ελεύθερο. Όταν το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά 0,5.α προσκολλάται σε αυτό πηλός μάζας m_2 = 0,5.m. Το συσσωμάτωμα σταματάει στιγμιαία σε απόσταση b = 0,25.α πέραν του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Ποιος είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης σώματος-επιπέδου; Δίνεται η g.

10. Σώμα μάζας Μ ισορροπεί δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου που η άλλη του άκρη είναι ακλόνητη στο έδαφος. Δεύτερο σώμα μάζας m με $m < M$ αφήνεται ελεύθερο από ύψος h πάνω από το Μ . Ποιος πρέπει να είναι ο λόγος $\frac{m}{M}$ ώστε το ελατήριο να υποστεί τη ίδια μέγιστη πρόσθετη συμπίεση είτε η κρούση είναι ελαστική είτε είναι πλαστική.

11. Στη βάση κεκλιμένου επιπέδου με $\theta = \pi/6$ στερεώνουμε τη μια άκρη ιδανικού ελατηρίου. Στην άλλη του άκρη ισορροπεί δεμένο σώμα μάζας $m_1 = 2$kgr. Από σημείο του άξονα του ελατηρίου πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, εκτοξεύουμε προς τα κάτω δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = 3$ kgr με $\upsilon_o = 5$ m.s^{-1} και από απόσταση S = 0,9 m. Το m_2 συγκρούεται πλαστικά με το m_1 και το συσσωμάτωμα μετατοπίζεται κατά Lmax = 0,2 m μέχρι να μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά του. Ποια η σταθερά k του ελατηρίου. Δίνεται ότι τριβές θεωρούνται ασήμαντες και ότι g = 10 m.s^{-2}.

12. Σώμα μάζας $m_2 = 0,4$ kg κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με $\upsilon_2 = 6$ m.s^{-1}. Πίσω του φέρει στερεωμένο ιδανικό ελατήριο με k = 30 N.m^{-1}. Στη διεύθυνση κίνησης του m_2 κινείται δεύτερο σώμα $m_1 = 0,2$ kgr με $\upsilon_1 = 12$ m.s^{-1} κατά την ίδια φορά.

- Βρείτε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου και τις ταχύτητες των σωμάτων εκείνη τη στιγμή.
- Ποιες οι ταχύτητες των σωμάτων τη στιγμή που το m_1 αποσπάται από το άκρο του ελατηρίου;

13. Ανελκυστήρας μάζας $m_1 = 200$ kg (μαζί με τους επιβάτες), κατέρχεται με ταχύτητα $\upsilon_o = 2$ m.s^{-1}. Όταν αυτός βρίσκεται σε ύψος h = 7 m πάνω από μολύβδινη πλάκα ασφαλείας, μάζας $m_2 = 3$m ,κόβεται το συρματόσχοινο. Ο ανελκυστήρας συγκρούεται πλαστικά με τη μολύβδινη πλάκα και σταματά χαμηλότερα κατά x = 1 m από το σημείο κρούσης.

- Αν η πλάκα στηριζότανε σε κατακόρυφο ελατήριο, να βρεθεί η σταθερά k του ελατηρίου.
- Αν ο χρόνος από τη στιγμή της κρούσης μέχρι το σταμάτημα είναι Δt = 1 sec, να βρεθεί πόση μέση δύναμη F δέχεται ένας επιβάτης μάζας m = 60 kgr από το δάπεδο του ανελκυστήρα.

Δίνεται ότι g = 10 m.s^{-2}.

14. Κυλινδρικό ομογενές σώμα ύψους H = 0,3 m επιπλέει σε υγρό κατακόρυφα. Οι πυκνότητες σώματος και υγρού είναι αντίστοιχα $d_e = 0.6$ gr.cm^{-3} και $d_u = 2$ gr.cm^{-3}. Πηλός μάζας m = 0,6 kgr πέφτει ελεύθερα και προσκολλάται στην πάνω επιφάνεια του επιπλέοντος σώματος. Από ποιο ύψος α πρέπει να πέσει ο πηλός ώστε η πάνω επιφάνεια τού σώματος να ταυτιστεί στιγμιαία με την επιφάνεια του υγρού. Δίνεται η μάζα του σώματος M = 3 kgr.

Φθίνουσες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

1. Ένα σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με εξίσωση x = ημ(10.t) (στο S. I.). Η αποσβεστική δύναμη του αντιστέκεται στην κίνηση του ταλαντωτή είναι της μορφής F_A = – b.υ (στο S. I.), η δε εξωτερική δύναμη, που αναπληρώνει την απώλεια ενέργειας, προσφέρει σε μια περίοδο στον ταλαντωτή ενέργεια E_0 = 20. π J. Ποια είναι η τιμή της σταθεράς απόσβεσης b;

2. Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με χρονοεξίσωση x = 10. ημ(20.t) (στο S. I.). Η αντιστεκόμενη στην ταλάντωση δύναμη είναι F_A = – 2.υ (στο S. I.). Ποιο το έργο της F για t = π s;

3. Σώμα μάζας m = 2 kg στερεώνεται στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k= 200 $N.m^{-1}$ και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση πλάτους A = 0,2 m με ω = 2.π $rad.s^{-1}$.

   - Να γράψετε την εξίσωση x = f(t) για την ταλάντωση αυτή($φ_0$ = 0).
   - Αν αυξήσουμε λίγο την ω το πλάτος της ταλάντωσης θα μεταβληθεί;
   - Αν η δύναμη απόσβεσης είναι της μορφής F = b.υ και προκαλεί ελάττωση του πλάτους κατά 20% σε μια περίοδο, πόση είναι η ενέργεια που αναπληρώνει ο διεγέρτης; Πόση ενέργεια αναπληρώνεται σε 10s ;

Σύνθεση ταλαντώσεων

1. Οι εξισώσεις των απομακρύνσεων για δύο ταλαντώσεις είναι: x_1 = 10. ημ[3. π.t + (π/3)] και x_2 = 10. ημ[3. π.t – (π/6)]. Να βρεθεί χρονοεξίσωση της ταλάντωσης που προκύπτει από την σύνθεση των παραπάνω ταλαντώσεων.

2. Να γίνει η σύνθεση των ταλαντώσεων x_1 = α .ημ(ω.t), x_2 = b. ημ[ω.t + (π/2)] και x_3 = b. ημ[ω.t + (3.π/2)]

3. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις με εξισώσεις: x_1 = α ημ($ω_1$.t), και x_2 = α ημ($ω_2$.t). Να βρείτε το είδος της σύνθετης κίνησης αν:

   - $ω_2 = ω_1$ = 50 rad/sec.
   - $ω_1$ = 3.$ω_2$, με $ω_2$ = 50 rad/sec.
   - $ω_1$ = 1000 rad/sec, $ω_2$ = 1001 rad/sec.
   - $ω_1$ = 600 rad/sec, $ω_2$ = 200 rad/sec.

4. Ένα σώμα Σ μετέχει σε δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης και πλάτους που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο. Οι συχνότητες των δυο ταλαντώσεων διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους. Οι εξισώσεις που περιγράφουν τις δυο ταλαντώσεις είναι x_1 = 10.ημ(2.π.f_1.t),x_2 = 10.ημ(2.π.f_2.t) με x_1,x_2 σε cm, f_1,f_2 σε Hz και t σε s. Δίνεται f_1 = 302 Hz. Από τη σύνθεση των δυο ταλαντώσεων προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t_1 = 1,25 s το πλάτος

μηδενίζεται για τρίτη φορά .Αν μειώσουμε τη συχνότητα f_2 κατά 0,8 Hz και αυξήσουμε τη συχνότητα f_1 κατά 0,8 Hz τότε παρατηρούμε ότι αυξάνεται ο αριθμός των μηδενισμών του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης ως τη χρονική στιγμή t_1.

- Να υπολογιστούν πριν από τη μεταβολή των συχνοτήτων ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης, η περίοδος της συνισταμένης ταλάντωσης και η άγνωστη συχνότητα f_2.
- Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο. Να γίνει επίσης ποιοτική γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
- Πόσες φορές έχει μηδενιστεί η απομάκρυνση της συνισταμένης ταλάντωσης ως το τέλος του πρώτου δευτερολέπτου;

Κεφάλαιο 2: κύματα.

Ορισμοί

1. ***<u>Κύμα:</u>*** ονομάζουμε κύμα κάθε χωροχρονική διαταραχή, δηλαδή κάθε χωρική και χρονική μεταβολή ενός φυσικού μεγέθους. Τα κύματα περιγράφονται μαθηματικά από κυματικές συναρτήσεις (πολλών μεταβλητών) της γενικής μορφής

$$y = f(\vec{r}, t) \qquad (2.1).$$

2. ***<u>Οδεύον κύμα:</u>*** οδεύον κύμα είναι η διάδοση μίας διαταραχής μέσα σε ένα μέσο ή στο κενό με ορισμένη ταχύτητα (ταχύτητα διάδοσης). Η συχνότητα με την οποία διαδίδεται το κύμα και η περίοδος αυτού είναι αντίστοιχα τα ίδια με εκείνα της πηγής που δημιουργεί το κύμα.

3. ***<u>Περιοδικό κύμα</u>***: περιοδικό κύμα ονομάζουμε ένα κύμα (λ.χ. οδεύον κύμα) που η πηγή του εκτελεί περιοδική (παλμική) κίνηση.

4. ***<u>Αρμονικό κύμα:</u>*** ονομάζουμε αρμονικό ένα κύμα (λ.χ. οδεύον κύμα) που η πηγή του εκτελεί Γ. Α. Τ.

5. ***<u>Ελαστικό σώμα:</u>*** ένα σώμα λέγεται τέλεια ελαστικό όταν αποκτάει ξανά τον αρχικό του όγκο και το αρχικό του σχήμα μετά από την αφαίρεση του αιτίου εκείνου που προκάλεσε την παραμόρφωση του. Στην πράξη δεν υπάρχουν τέλεια ελαστικά σώματα και τα διάφορα υλικά παρουσιάζουν ελαστικές ιδιότητες σε ορισμένες περιοχές αλληλεπιδράσεων.

6. ***<u>Μηχανικό κύμα:</u>*** ονομάζουμε μηχανικά τα κύματα εκείνα που μεταφέρουν μηχανική ενέργεια και διαδίδονται σε υλικά-ελαστικά μέσα. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι τα μηχανικά κύματα είναι τα σεισμικά κύματα, τα ηχητικά, τα κύματα που διαδίδονται στο νερό κ.τ.λ. Για την παραγωγή τους είναι απαραίτητο να υπάρχει μία πηγή διαταραχής που να κινείται σε κάποιο σημείο ενός μέσου διάδοσης-ελαστικού μέσου. Από το σημείο αυτό προέρχεται η μηχανική ενέργεια, η οποία μεταφέρεται σταδιακά σε όλους τους δομικούς λίθους (άτομα, μόρια, ιόντα) του ελαστικού μέσου. Έτσι, αυτοί αρχίζουν να κινούνται γύρω από μία ορισμένη θέση ισορροπίας και η ενέργεια μεταφέρεται από τον καθέναν από αυτούς στο γειτονικό, με αποτέλεσμα τη διάδοση της διαταραχής. Για τη μελέτη των μηχανικών κυμάτων κάνουμε τις ακόλουθες προσεγγίσεις:

- η διαταραχή που προκαλεί η πηγή του κύματος στο μέσον είναι ήπια (οι ασκούμενες από αυτήν δυνάμεις βρίσκονται στην ελαστική περιοχή του μέσου).
- κατά τη διάδοση ενός κύματος έχουμε μεταφορά ενέργειας και ορμής από τον ένα δομικό λίθο του μέσου διάδοσης στον άλλο, χωρίς όμως να γίνεται μεταφορά της ύλης του μέσου αυτού.
- το βάρος των μορίων του μέσου θεωρείται αμελητέο σε σχέση με τις δυνάμεις από την πηγή του κύματος στο μέσο διάδοσης και τις δυνάμεις μεταξύ των δομικών λίθων του μέσου αυτού.

7. ***Εγκάρσιο κύμα:*** εγκάρσιο ονομάζεται το κύμα εκείνο στο οποίο η διαταραχή (π.χ. η ταλάντωση των δομικών λίθων του μέσου διάδοσης) πραγματοποιείται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Οι ιδιότητες των εγκαρσίων κυμάτων είναι οι εξής:

- κατά τη διάδοσή τους σχηματίζονται «όρη» και «κοιλάδες».
- διαδίδονται στα στερεά και στην επιφάνεια των υγρών (αν είναι μηχανικά κύματα).

8. ***Διάμηκες κύμα:*** διάμηκες ονομάζεται το κύμα εκείνο στο οποίο η διαταραχή (π.χ. η ταλάντωση των δομικών λίθων του μέσου διάδοσης) πραγματοποιείται παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Οι ιδιότητες των διαμηκών κυμάτων είναι οι εξής:

- κατά τη διάδοσή τους σχηματίζονται «πυκνώματα» και «αραιώματα»,
- διαδίδονται σε στερεά, υγρά και αέρια (αν είναι μηχανικά κύματα).

9. ***Επιφανειακό κύμα:*** επιφανειακό ονομάζεται το κύμα που διαδίδεται στην επιφάνεια ενός υγρού και είναι αποτέλεσμα εγκάρσιων και διαμηκών κυμάτων. Εξαιτίας των επιφανειακών κυμάτων οι τροχιές των σωματιδίων του υγρού στην επιφάνειά του είναι κυκλικές. Προσοχή, τα επιφανειακά κύματα δε διαδίδονται στο βάθος του υγρού, όπως τα διαμήκη.

10. ***Ταχύτητα διάδοσης (οδεύοντος) κύματος*** (c): ονομάζουμε ταχύτητα διάδοσης ενός (οδεύοντος) κύματος σε ένα μέσο διάδοσης το μονόμετρο εκείνο φυσικό μέγεθος που ορίζεται ίσο με το πηλίκο της απόστασης Δx που διατρέχει αυτό το (οδεύον) κύμα στο συγκεκριμένο μέσο διάδοσης σε χρόνο Δt προς το χρόνο αυτό, δηλαδή

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2).$$

Η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται από το μέσο διάδοσης και σε ορισμένες περιπτώσεις (διασκεδασμός) από τη συχνότητα του οδεύοντος κύματος.

11. ***Περίοδος (χρονική περίοδος) κύματος*** (T): περίοδο ενός (περιοδικού)

κύματος ονομάζουμε την περίοδο της παλμικής κίνησης της πηγής του κύματος και επομένως και όλων των σημείων του μέσου διάδοσης.

12. ***Συχνότητα (χρονική συχνότητα) κύματος*** (f)**:** συχνότητα ενός (περιοδικού) κύματος ονομάζουμε τη συχνότητα της περιοδικής κίνησης της πηγής του κύματος και επομένως όλων των σημείων του μέσου διάδοσης.

13. ***Μήκος (ή χωρική περίοδος) κύματος*** (λ)**:** μήκος ενός (περιοδικού) κύματος ονομάζουμε την απόσταση ανάμεσα σε δυο διαδοχικά όρη ή κοιλάδες (αν το κύμα είναι εγκάρσιο) ή την απόσταση ανάμεσα σε δυο διαδοχικά πυκνώματα ή αραιώματα (αν το κύμα είναι διάμηκες), η οποία συμπίπτει με την απόσταση που διατρέχει το αντίστοιχο οδεύον κύμα σε χρόνο μιας περιόδου. Η μαθηματική σχέση που συνδέει το μήκος κύματος (λ) με την συχνότητα (f) είναι η εξής:

$$c = \lambda .\, f \qquad (2.3),$$

όπου c είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Η εξίσωση αυτή αποτελεί το Θεμελιώδη Νόμο της Κυματικής.

Απόδειξη του Θεμελιώδους Νόμου της Κυματικής: από τον ορισμό της ταχύτητας διάδοσης (c) ενός κύματος έχουμε ότι $\Delta x = c.\, \Delta t$ και από τον ορισμό του μήκους κύματος (λ) προκύπτει ότι $\lambda = c.\, T$, όπου T η περίοδος του κύματος. Γνωρίζουμε ότι $T = f^{-1}$, άρα με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση προκύπτει $\lambda = c.f^{-1}$ και λύνοντας αυτή την σχέση ως προς c έχουμε $c = \lambda.\, f$.

Παρατήρηση: όταν αλλάζει το υλικό μέσο στο οποίο διαδίδεται το κύμα μεταβάλλονται η ταχύτητα διάδοσης του κύματος (c) και το μήκος του κύματος (λ- από το Θεμελιώδη Νόμο της Κυματικής c = λ. f). Η συχνότητα όμως του κύματος (f) παραμένει σταθερή, αφού καθορίζεται μόνο από την πηγή του κύματος.

14. ***Γωνιακός κυματαριθμός*** ($\vec{k}$)**:** είναι ένα διανυσματικό φυσικό μέγεθος που έχει κατεύθυνση την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος και μέτρο

$$k = \frac{2.\pi}{\lambda} \qquad (2.4).$$

15. ***Πλάτος κύματος:*** πλάτος κύματος ονομάζουμε το πλάτος της ταλάντωσης των σωματιδίων του υλικού μέσου μέσα στο οποίο διαδίδεται το κύμα .

16. ***Στιγμιότυπο κύματος:*** στιγμιότυπο ενός κύματος ονομάζεται η γραφική παράσταση που έχει η εξίσωση του κύματος για σταθερό χρόνο t («πάγωμα» χρόνου- φωτογραφία του κύματος).

17. ***Συμβολή κυμάτων:*** η ταυτόχρονη διάδοση δυο ή περισσοτέρων κυμάτων στην ίδια περιοχή (ενός ελαστικού μέσου) λέγεται συμβολή.

18. ***Στάσιμο κύμα:*** στάσιμο κύμα ονομάζουμε το αποτέλεσμα της συμβολής δυο οδεύοντων κυμάτων της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους που διαδίδονται στο ίδιο μέσο με αντίθετες κατευθύνσεις. Κάθε σημείο του μέσου στην περίπτωση αυτή εκτελεί Γ. Α. Τ. με πλάτος που δεν είναι ίδιο για όλα τα σημεία αλλά εξαρτάται από τη θέση.

19. ***Σύγχρονες πηγές:*** δυο πηγές (κυμάτων) ονομάζονται σύγχρονες όταν βρίσκονται σε φάση (δημιουργούν ταυτόχρονα μέγιστα και ελάχιστα).

20. ***Φαινόμενο Doppler:*** είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δεν είναι ίδια με αυτήν που εκπέμπει η πηγή επειδή η πηγή και ο παρατηρητής βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους. Το φαινόμενο Doppler χρησιμοποιείται ευρέως στην τεχνολογία για τη μέτρηση των ταχυτήτων κινούμενων αντικειμένων (*«θέση Doppler»* στην ακουστική, στην οπτική και το ραδιόφωνο).

Μαθηματική περιγραφή του οδεύοντος κύματος

Για τα οδεύοντα κύματα ισχύει:

$y' = y'(x')$ (για παρατηρητή που κινείται προς την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος με ταχύτητα μέτρου ίσου με την ταχύτητα διάδοσής του) (2.5)

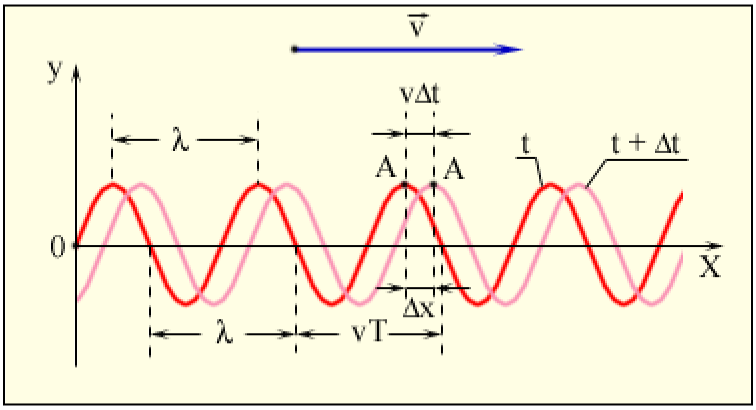
$y = y(x,t)$ (για ακίνητο παρατηρητή) (2.6)

$x' = x \pm c.t$, με $t' = t$, $y' = y$ (από τους μετασχηματισμούς Galileo) (2.7)

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η γενική εξίσωση ενός οδεύοντος κύματος θα έχει τη μορφή:

$y = y(x + c.t)$ (όταν το κύμα οδεύει προς τα αριστερά)(2.8)

$y = y(x - c.t)$ (όταν το κύμα οδεύει προς τα δεξιά) (2.9)



Εικ.2.1. «Στιγμιότυπα» ενός οδεύοντος ημιτονοειδούς κύματος τις χρονικές στιγμές t και t + Δt.

Στην περίπτωση που η πηγή του κύματος εκτελεί Γ. Α. Τ. θα έχουμε

$$y = y_0.\eta\mu(\omega_0.t) \quad \text{(απομάκρυνση για την πηγή)} \qquad (2.10).$$

Οι σχέσεις (2.7),(2.8) γίνονται:

$$y = y_0.\eta\mu(\omega_0.t \pm k.x) \text{(εξίσωση αρμονικού κύματος)} \quad (2.11),$$

όπου ω_0 η κυκλική συχνότητα (δίνεται από τη σχέση (1.3)),y_0 το πλάτος του αρμονικού κύματος (καθορίζονται από την πηγή) και k το μέτρο του γωνιακού κυματαριθμού (καθορίζεται από την πηγή και το μέσο διάδοσης).

Μεθοδολογία για το σχεδιασμό του στιγμιοτύπου του κύματος

Ο σχεδιασμός του στιγμιοτύπου ενός γνήσιου περιοδικού κύματος (αρχή την $t = -\infty$, τέλος την $t = +\infty$) είναι μια τετριμμένη διαδικασία. Συνήθως όμως στις εφαρμογές ζητείται ο σχεδιασμός στιγμιοτύπων μη περιοδικών κυμάτων με αρχή τις περισσότερες φορές την t = 0. Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο ενός κύματος σε μια χρονική στιγμή t_1 με αρχή την t = 0 βρίσκουμε:

1. την εξίσωση του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 (από την εξίσωση του αρμονικού κύματος (2.11) αν το κύμα είναι αρμονικό).
2. τη θέση x_1 στην οποία φτάνει το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 (από τη σχέση (2.2)).
3. τον αριθμό των μηκών κύματος λ που αντιστοιχεί στην απόσταση x_1 μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης του κύματος, δηλαδή το λόγο $\frac{x_1}{\lambda}$.
4. την απομάκρυνση y_1 και την κατεύθυνση της ταχύτητας ταλάντωσης υ_{y1} της αρχής Ο (x = 0) τη χρονική στιγμή t_1 (δηλαδή από ποιο σημείο του άξονα ξεκινά η ημιτονοειδής καμπύλη). Ας σημειωθεί ότι το σημείο στο οποίο τελειώνει το στιγμιότυπο του κύματος θα έχει πάντοτε y = 0, αφού είναι το σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα τη στιγμή t_1, το οποίο τότε αρχίζει την ταλάντωσής του.

Παρατήρηση: ανάλογη προσοχή χρειάζεται κατά το σχεδιασμό γραφικών παραστάσεων κινήσεων σημείων στα οποία δηλώνεται ότι φτάνει κύμα που ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = t_1$ από τη θέση $x = x_1$ (συνήθως τη χρονική στιγμή $t = 0$ από τη θέση $x = 0$).

Συμβολή μηχανικών κυμάτων

Όταν σε ένα (ελαστικό) μέσο διαδίδονται ταυτόχρονα δυο ή περισσότερα κύματα η απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου ισούται με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλονται στα επιμέρους κύματα (από την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων). Δυο χαρακτηριστικές περιπτώσεις συμβολής αρμονικών κυμάτων είναι οι εξής:

1. συμβολή δυο αρμονικών επιφανειακών κυμάτων από σύγχρονες πηγές

$$y_1 = A.\eta\mu\left[2.\pi.\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)\right] \quad (2.12)$$

$$y_2 = A.\eta\mu\left[2.\pi.\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right)\right] \quad (2.13)$$

$$y = y_1 + y_2 \text{ (Αρχή της Επαλληλίας)} \quad (2.14)$$

(2.12),(2.13),(2.14),(1.55)$\Rightarrow$ $x = 2.A.\sigma\upsilon\nu\left[2.\pi.\left(\frac{r_1-r_2}{2.\lambda}\right)\right].\eta\mu\left[2.\pi.\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2.\lambda}\right)\right]$ (2.15).

Η τελευταία σχέση αντιστοιχεί σε διάδοση ταλάντωσης με πλάτος

$$A' = \left|2.A.\sigma\upsilon\nu\left[2.\pi.\left(\frac{r_1-r_2}{2.\lambda}\right)\right]\right| \quad (2.16)$$

Από αυτήν προκύπτει ότι

- $A' = 2.A$ (ενισχυτική συμβολή-ενίσχυση) $\Leftrightarrow r_1 - r_2 = N.\lambda, N \in Z$ (2.17).
- $A' = 0$ (καταστροφική συμβολή-απόσβεση)

$$\Leftrightarrow r_1 - r_2 = \frac{(2.N+1).\lambda}{2}, N \in Z \quad (2.18).$$

2. στάσιμα κύματα σε τέλεια ελαστική χορδή άπειρου μήκους

$$y_1 = \text{A.ημ}\left[2.\pi.\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right] \tag{2.19}$$

$$y_2 = \text{A.ημ}\left[2.\pi.\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)\right] \tag{2.20}$$

$$(2.19),(2.20),(2.14),(1.55) \Rightarrow \ x = 2.\text{A.συν}\left(\frac{2.\pi.x}{\lambda}\right).\text{ημ}\left(\frac{2.\pi.t}{T}\right) \quad (2.21).$$

Η τελευταία σχέση αντιστοιχεί σε Γ. Α. Τ. με πλάτος

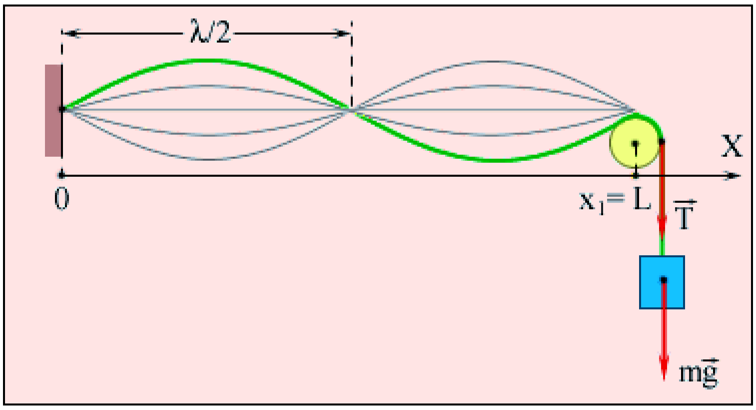
$$A' = \left|2.A.\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2.\pi.x}{\lambda}\right)\right| \quad (2.22).$$

Από αυτήν προκύπτει ότι

- Α΄ = 2.Α (κοιλίες στάσιμου κύματος) $\Leftrightarrow x_N = \frac{N.\lambda}{2}, N \in Z_0^+$ (2.23).
- Α΄ = 0 (δεσμοί στάσιμου κύματος)

$$\Leftrightarrow x_N = \frac{(2.N+1).\lambda}{4}, N \in Z_0^+ \quad (2.24).$$

- η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών ή κοιλιών ενός στάσιμου κύματος είναι ίση με το μισό του μήκους κύματος λ των κυμάτων από τη συμβολή των οποίων προήλθε.



Εικ.2.2. Εμφάνιση ενός στάσιμου κύματος σε ένα σχοινί του οποίου τα άκρα είναι σταθερά.

Μελέτη του (μη σχετικιστικού) φαινομένου Doppler

Ας συζητήσουμε μια απλή περίπτωση όταν η ταχύτητα της πηγής υ_L και η ταχύτητα του παρατηρητή υ_S σε σχέση με το μέσο κατευθύνονται κατά μήκος της ευθείας η οποία τους συνδέει. Θα θεωρήσουμε την κατεύθυνση από τον παρατηρητή στην πηγή ως θετική για υ_S και υ_L . Η ταχύτητα του ήχου υ θεωρείται πάντοτε θετική.

1. **Ακίνητη πηγή- ακίνητος παρατηρητής**

Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε φαινόμενο Doppler και ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος τη Κυματικής

$$f_S = \upsilon.\lambda^{-1} \tag{2.25}$$,

2. **Ακίνητη πηγή- κινούμενος παρατηρητής**

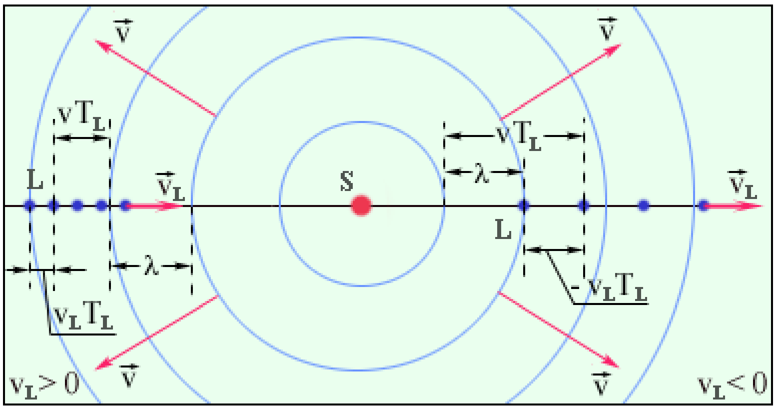
Η εικόνα 2.3 δείχνει το φαινόμενο Doppler στην περίπτωση του κινούμενου παρατηρητή και μιας ακίνητης πηγής. Η περίοδος των ηχητικών ταλαντώσεων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, ορίζεται με T_o. Από την εικόνα αυτήν προκύπτει ότι:

$$f_L = (\upsilon \pm \upsilon_L).\lambda^{-1} \tag{2.26}$$.

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.25) παίρνουμε:

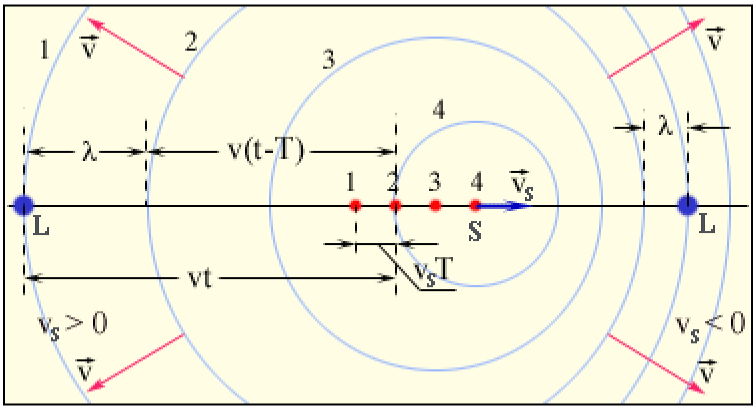
$$f_L = \left(\frac{\upsilon \pm \upsilon_L}{\upsilon}\right).f_S \tag{2.27}$$.

Αν ο παρατηρητής κινείται προς την κατεύθυνση της πηγής (πρόσημο «+»), τότε $f_L > f_S$. Αν ο παρατηρητής κινείται μακριά από την πηγή (πρόσημο «–»), τότε $f_L < f_S$.



Εικ.2.3. Φαινόμενο Doppler. Η περίπτωση του κινούμενου παρατηρητή. Συνεχόμενες θέσεις του παρατηρητή φαίνονται για την περίοδο T_O του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

3. **Κινούμενη πηγή- ακίνητος παρατηρητής**



Εικ.2.4. Φαινόμενο Doppler. Η περίπτωση της κινούμενης πηγής. Φαίνονται συνεχόμενες θέσεις της πηγής στην περίοδο T του ήχου που εκπέμπεται από την πηγή.

Στην εικόνα 2.4 ο παρατηρητής είναι ακίνητος και η πηγή κινείται με μια ταχύτητα υ_S. Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν τα παρακάτω:

$$\lambda_L = \lambda \mp \upsilon_s . T \quad (2.28),$$

$$f_s = \frac{\upsilon}{\lambda} \quad (2.29),$$

$$f_L = \frac{\upsilon}{\lambda_L} \quad (2.30),$$

$$T = \frac{1}{f_s} \quad (2.31).$$

Από αυτές τις εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$f_L = \left(\frac{\upsilon}{\upsilon \mp \upsilon_S}\right).f_S \quad (2.32).$$

Αν η πηγή κινείται μακριά από τον παρατηρητή (πρόσημο «+»), τότε $f_L < f_S$. Αν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή (πρόσημο «–»), τότε $f_L > f_S$.

4. **Κινούμενη πηγή- κινούμενος παρατηρητής**

Γενικά, όταν και η πηγή και ο παρατηρητής κινούνται με ταχύτητες v_S και v_L, η εξίσωση για το φαινόμενο Doppler παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$f_L = \left(\frac{\upsilon \pm \upsilon_L}{\upsilon \mp \upsilon_S}\right).f_S \quad (2.33).$$

Αυτή η σχέση εκφράζει τη σύνδεση ανάμεσα στην f_L και στην f_S. Οι ταχύτητες υ_S και υ_L μετριούνται πάντοτε σε σχέση με τον αέρα ή οποιοδήποτε άλλο μέσο, στο οποίο διαδίδονται τα ηχητικά κύματα. Αυτό είναι το λεγόμενο μη-σχετικιστικό φαινόμενο Doppler, το οποίο συνοψίζεται στον επόμενο πίνακα:

Πηγή ακίνητη.	Παρατηρητής ακίνητος.	$f_S = f_L$
Πηγή ακίνητη.	Ο παρατηρητής πλησιάζει την πηγή με ταχύτητα μέτρου υ_L.	$f_L = \left(\frac{\upsilon + \upsilon_L}{\upsilon}\right).f_S$
Πηγή ακίνητη.	Ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή με ταχύτητα μέτρου υ_L.	$f_L = \left(\frac{\upsilon - \upsilon_L}{\upsilon}\right).f_S$
Η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή με ταχύτητα μέτρου υ_S.	Παρατηρητής ακίνητος.	$f_L = \left(\frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_S}\right).f_S$

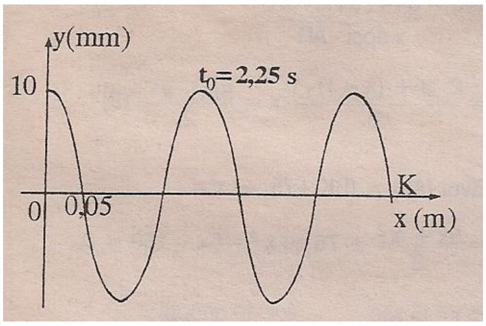
Η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή με ταχύτητα μέτρου υ_S.	Παρατηρητής ακίνητος.	$f_L = \left(\frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_S}\right) . f_S$
Πηγή και παρατηρητής πλησιάζουν μεταξύ τους με ταχύτητες μέτρων υ_S και υ_L αντίστοιχα.		$f_L = \left(\frac{\upsilon + \upsilon_L}{\upsilon - \upsilon_S}\right) . f_S$
Ο παρατηρητής «κυνηγά» την πηγή.		$f_L = \left(\frac{\upsilon + \upsilon_L}{\upsilon + \upsilon_S}\right) . f_S$
Η πηγή «κυνηγά» τον παρατηρητή.		$f_L = \left(\frac{\upsilon - \upsilon_L}{\upsilon - \upsilon_S}\right) . f_S$
Πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται μεταξύ τους.		$f_L = \left(\frac{\upsilon - \upsilon_L}{\upsilon + \upsilon_S}\right) . f_S$

Ασκήσεις

Οδεύοντα Κύματα

1. Ποιες από τις προτάσεις που αναφέρονται στο αρμονικό κύμα του σχήματος είναι σωστές και ποιες λάθος;

   - Η περίοδος του κύματος είναι T = 0,1 s και το μήκος κύματος είναι λ = 0,2 m.
   - Το σημείο Μ που είναι στη θέση x = 0,2 m είναι σε φάση με το σημείο Ο που είναι στη θέση x = 0.
   - Το σημείο Ν (x = 0,4 m) έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια τη χρονική στιγμή t_0.
   - Τη χρονική στιγμή 2,75 s το σημείο Ο θα περάσει από τη θέση ισορροπίας του.



2. Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος μπορεί να γραφεί με τη μορφή $y = y_0.ημ(ω.t + k.x)$.

   - Βρείτε τη σχέση που συνδέει το k με το μήκος κύματος λ.
   - Αν $y_0 = 10^{-7}$ m, $ω = 6,6.10^3$ s^{-1} και $k = 20$ m^{-1} υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος και τη μέγιστη ταχύτητα ενός σωματιδίου του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα .

3. Ένα μικρό κομμάτι φελλού σε μια δεξαμενή με νερό ταλαντώνεται πάνω-κάτω με την επίδραση επιφανειακού κύματος το οποίο δεχόμαστε ότι είναι εγκάρσιο με εξίσωση $y = 10.ημ[π(2.t – 0,01.x)]$, όπου τα x και y εκφράζονται σε cm και το t σε s.

   - Υπολογίστε το πλάτος, την περίοδο, το μήκος κύματος και την ταχύτητα του κύματος.
   - Υπολογίστε τη μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα την οποία αποκτά ο φελλός.

4. Η ταλάντωση ενός υλικού σημείου Α ελαστικού μέσου περιγράφεται με την εξίσωση $y = 0,03.ημ(5.π.t)$ (S.I.). Υποθέτουμε ότι η παλμική αυτή κίνηση διαδίδεται στο ελαστικό μέσο με ταχύτητα 5 m/s. Υπολογίστε την απομάκρυνση που έχει κατά τη χρονική στιγμή t = 0,3 s ένα υλικό σημείο Μ που απέχει από το Α 50 cm.

5. Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος είναι 360 $m.s^{-1}$ και η συχνότητά του 500 Hz. Η φάση ενός σημείου Σ του μέσου σε κάποια χρονική στιγμή t_0 είναι π/8.

   - Πόσο απέχει το σημείο Σ από το γειτονικότερο σημείο Σ΄ (της ίδιας κυματικής ακτίνας) το οποίο κατά τη χρονική στιγμή t_0 παρουσιάζει διαφορά φάσης $\frac{\pi}{6}$;
   - Ποιες θα είναι οι τιμές των φάσεων των Σ και Σ΄ κατά τη χρονική στιγμή $t_0 + Δt$, όπου $Δt = 10^{-3}$ s;

6. Κατά μήκος ενός γραμμικού και ομογενούς ελαστικού μέσου διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x΄x εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους A = 30 cm. Ως αρχή μέτρησης του χρόνου t = 0 παίρνουμε τη χρονική εκείνη στιγμή που το κύμα φτάνει σε ένα σημείο Ο, για το οποίο ισχύει x = 0, y = 0 και υ. Τη χρονική στιγμή $t = t_1$ το κύμα φτάνει σε ένα σημείο Γ το οποίο

βρίσκεται σε απόσταση από το θετικό ημιάξονα .Τη χρονική στιγμή η απομάκρυνση του σημείου Ο παίρνει την τιμή 15.√3 για πρώτη φορά .

- Να γραφεί η εξίσωση ταλάντωσης του Ο καθώς και η εξίσωση του τρέχοντος κύματος.
- Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης για το σημείο Γ και να γίνουν τα διαγράμματα απομάκρυνσης-χρόνου, ταχύτητας ταλάντωσης-χρόνου του υλικού αυτού σημείου.
- Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 = (13/3) s για τα σημεία του θετικού ημιάξονα Ox. Να γίνει επίσης η γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης των υλικών σημείων σε συνάρτηση με το x τη χρονική στιγμή t_2 για τα σημεία του Ox.
- Να γίνει η γραφική παράσταση φάσης των σημείων του θετικού ημιάξονα Ox σε συνάρτηση με το x τη χρονική στιγμή t_2.Τι παρατηρείτε για τις φάσεις των σημείων αυτών; Να γίνει γραφική παράσταση της φάσης του σημείου Γ σε συνάρτηση με το χρόνο.
- Δίνονται δυο σημεία Μ, Ν στο θετικό ημιάξονα με το Μ πιο κοντά στο Ο. Η απόσταση μεταξύ των Μ, Ν είναι (ΜΝ) = 150 cm. Βρείτε τη διαφορά φάσης των σημείων αυτών, καθώς και τη σχέση μεταξύ των απομακρύνσεών τους και των ταχυτήτων ταλάντωσής τους τη χρονική στιγμή t (όπου $t>t_N$ και t_N ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το κύμα στο σημείο Ν).

7. Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος, το οποίο διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, που έχει τη διεύθυνση του άξονα x'x, είναι: y = 0,04ημπ(200t - 8x) (τα x και y είναι σε m και το t σε s).

Να υπολογίσετε:

- Τη συχνότητα και το μήκος κύματος του κύματος.
- Την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- Τη διαφορά φάσης μεταξύ δυο σημείων του ελαστικού μέσου, τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση Δx=0,5m.
- Τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου.

[Απ.: α) f=100 Hz, λ=0,25 m β) υ=25 m/s γ) Δφ=4π rad δ) υmax=8π m/s]

8. Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος, το οποίο διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο κατά μήκος του άξονα x'x, είναι: y = 0,1ημ2π(2t -0,25x) (τα x και y είναι σε m και το ίσε s)
   - Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
   - Πόσο απέχουν δύο σημεία Α και Β του ελαστικού μέσου που βρίσκονται πάνω στον άξονα και την ίδια χρονική στιγμή οι ταλαντώσεις τους παρουσιάζουν διαφορά φάσης Δφ= $\frac{7\pi}{2}$ rad.
   - Πόση είναι η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Α σε χρονικό διάστημα Δt=2,5 s;

- Αν το σημείο Α βρίσκεται στη θέση xA=5 m, ποια σημεία του άξονα ανάμεσα στα σημεία Α και Β βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους τη χρονική στιγμή t =2 s;

Να θεωρήσετε ότι το σημείο Α βρίσκεται πλησιέστερα προς την πηγή Ο του κύματος από το σημείο Β.
[Απ.: α) υ=8 m/s, β) Δx=7 m γ) Δφ=10π rad δ) x1=6 m, x2=8 m, x3=10 m]

9. Σε ένα σημείο Π ελαστικού μέσου βρίσκεται πηγή, η οποία τη χρονική στιγμή t=0 αρχίζει να παράγει αρμονικά εγκάρσια κύματα συχνότητας f=10 Hz. Σε ένα στιγμιότυπο του κύματος, η απόσταση ενός "όρους" από τη μεθεπόμενη "κοιλάδα" είναι L=90 cm. Να υπολογιστούν:
   - Το μήκος κύματος και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
   - Η απόσταση από την πηγή Π, στην οποία θα έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή t=10 s, καθώς και ο αριθμός των κυματικών εικόνων που θα έχουν δημιουργηθεί.
   - Η συχνότητα και το μήκος κύματος του κύματος, αν κατά τη διάδοση του συναντήσει ένα δεύτερο διαφορετικό ελαστικό μέσο όπου η ταχύτητα διάδοσης του είναι υ'=5 m/s.

   [Απ.: α) λ=0,6m, υ=6 m/s, β) x=60 m, k=100, γ) f=10 Hz, λ’=0,5 m]

10. Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου με ταχύτητα υ=40 m/s, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x'x, ο οποίος ταυτίζεται με το γραμμικό μέσο. Κάποια χρονική στιγμή t οι φάσεις των ταλαντώσεων δύο σημείων Α και Β του μέσου είναι φA=15π rad και φB=45π rad, αντίστοιχα. Το σημείο Β βρίσκεται σε απόσταση d=5 m από τη θέση x=0 όπου βρίσκεται η πηγή Ο του κύματος και είναι το τρίτο κατά σειρά σημείο του ελαστικού μέσου που έχει μόνιμα αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα από την πηγή Ο.

   - Να εξετάσετε, αν το κύμα διαδίδεται από το σημείο Α προς το σημείο Β ή αντίστροφα.
   - Να υπολογίσετε τη συχνότητα του κύματος.
   - Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων Α και Β.
   - Όταν το σημείο Β διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο κατά τη θετική φορά, ποια είναι η απομάκρυνση και η φορά κίνησης του σημείου Α;

[Απ.: α) Από το Β προς το Α, β) f=20 Hz, γ)Δx=30 m,δ) Στη θέση ισορροπίας, κινούμενο κατά τη θετική φορά]

11. Ένα ημιτονοειδές κύμα συχνότητας f=50 Hz και πλάτους A=0,2 m διαδίδεται με ταχύτητα υ=36 m/s κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο έχει τη διεύθυνση του άξονα x'x, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής, η οποία βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα είναι $y=A\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$. Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β του μέσου.

- Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα σημεία, Α και Β, αν την ίδια χρονική στιγμή οι φάσεις της ταλάντωσης των σημείων αυτών διαφέρουν κατά Δφ=60°;
- Πόση είναι η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Α μέσα σε χρόνο Δt=10-2 s.
- Πόση είναι η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης μιας στοιχειώδους μάζας Δm=2▪10-3 kg του μέσου, η οποία βρίσκεται στο σημείο Α;
- Δίνεται: $\pi^2=10$.

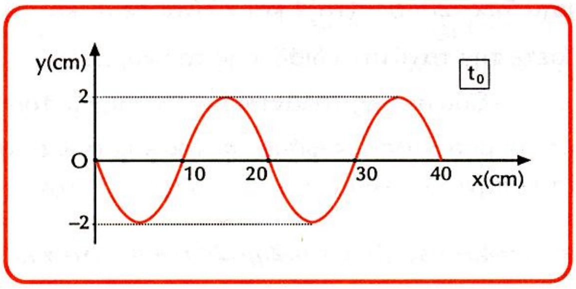
[Απ.: α)Δx=12 cm, β) ΔφΑ=180°, γ) U(max)=4 J]

12. Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο έχει τη διεύθυνση του άξονα x'x. Μια πηγή παραγωγής ημιτονοειδών κυμάτων, η οποία βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα x'x, αρχίζει τη χρονική στιγμή t=0 να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση y=10ημωt (το y είναι σε cm και το t σε s). Το παραγόμενο κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Πάνω στον άξονα βρίσκονται δύο σημεία Α και Β του ελαστικού μέσου, τα οποία απέχουν από την αρχή Ο αποστάσεις xA=20 cm και xB=30 cm, αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή t=0,2 s το κύμα φτάνει στο σημείο Α και η φάση της ταλάντωσης της πηγής είναι φ=8π rad.

- Να υπολογίσετε τη συχνότητα ταλάντωσης της πηγής.
- Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του κύματος.
- Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
- Να προσδιορίσετε τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τα οποία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης με την πηγή του κύματος.

[Απ.: α) f=20 Hz, β) λ=5 cm, γ) y=10ημ2π(20t - $\frac{x}{5}$) (τα x και y είναι σε cm και το t σε s), γ)x=20 cm, x=25 cm, x=30 cm]

13. Κατά μήκος ενός σχοινιού, το οποίο έχει τη διεύθυνση του άξονα x'x, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Η αρχή Ο του άξονα ταυτίζεται με το αριστερό άκρο του σχοινιού, το οποίο αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση τη χρονική στιγμή t=0 με εξίσωση y=Αημ5πt (το y είναι σε cm και το t σε s). Στο διάγραμμα του σχήματος δίνεται ένα στιγμιότυπο του κύματος που διαδίδεται κατά μήκος του σχοινιού, κατά τη χρονική στιγμή t0 .

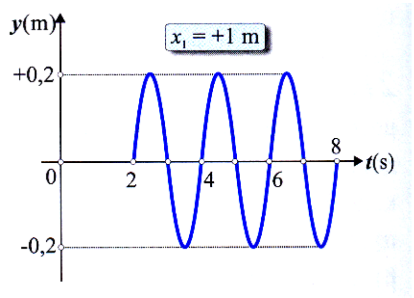


14. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή t_0.
- Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

- Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων δύο σημείων του σχοινιού, στα οποία το κύμα φτάνει με διαφορά χρόνου Δt=1 s.

[Απ.: a) t0=0,8 s, β) υ=0,5 m/s, γ) $y=2ημπ(5t - \frac{x}{10})$, (τα x και y είναι σε cm και το t σε s), δ)Δφ=5π]

15. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που βρίσκεται στη διεύθυνση του άξονα x΄Ox διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Η πηγή του κύματος βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα και τη χρονική στιγμή t=0 ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας της με θετική ταχύτητα. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου Κ (x=+1 m) μάζας m=0,02 kg σε συνάρτηση με το χρόνο.



- Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
- Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t1=5 s.
- Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t2=4,25 s. Θεωρήστε για τις πράξεις: π2=10.

[Απ.: a) υ=0,5 m/s β) y=0,2ημ2π(0,5t - x) (S.I.) γ) … δ) $U=2 \cdot 10^{-3}$ J]

16. Μία πηγή αρμονικών κυμάτων βρίσκεται στην αρχή Ο του θετικού ημιάξονα Οx και τη χρονική στιγμή t=0 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση y=0,04ημ4πt (S.I.). Το αρμονικό κύμα που δημιουργείται διαδίδεται σε ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα Οx. Δύο υλικά σημεία Κ και Λ του ελαστικού μέσου που βρίσκονται στις θέσεις x1=+1,2 m και x2=+2 m αντίστοιχα, φτάνουν το καθένα για πρώτη φορά σε θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας με χρονική διαφορά Δt=2 s.Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

- Να υπολογίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες τα σημεία Κ και Λ φτάνουν στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης τους για πρώτη φορά.
- Να υπολογίσετε πόσα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου έχουν μέγιστη κινητική ενέργεια τη χρονική στιγμή t=3 s.
- Να υπολογίσετε πόσα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου έχουν δυναμική ενέργεια ίση με $\frac{U_{max}}{4}$,τη χρονική στιγμή που το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση d=1 m από το σημείο Ο.

[Απ.: a) y=0,04ημ2π(2t - 5x) (S.I.) β) tΚ=3,125 s, tΛ=5,125 s γ) 13 σημεία (μαζί με την πηγή) δ) 20 σημεία]

17. Πηγή αρμονικών κυμάτων συχνότητας f=4 Hz βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα x'Ox και δημιουργεί εγκάρσιο κύμα με μήκος κύματος λ=0,5 m, που

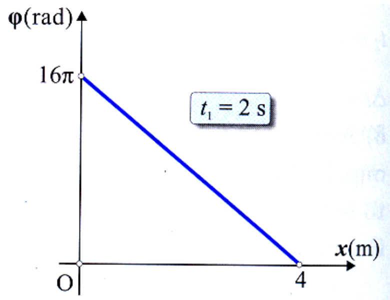
διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο, στη διεύθυνση του άξονα x'Ox. Η εξίσωση του κύματος είναι της μορφής y=Αημ2π$\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ (S.I.).

- Να υπολογίσετε τη φάση της ταλάντωσης:
  i. του υλικού σημείου Κ (x1=+0,5 m) τη χρονική στιγμή t1=2 s,
  ii. του υλικού σημείου Μ (x2=+ 6 m) τη χρονική στιγμή t2=2,5 s.
- Να ερμηνεύσετε το πρόσημο της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Μ.
- Να υπολογίσετε τη μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Κ στη χρονική διάρκεια Δt=t2-t1=0,5 s.

- Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ (x3=+0,75 m) την ίδια χρονική στιγμή.
- Μετά από πόσο χρόνο από τη στιγμή που διέρχεται το ένα από τα υλικά σημεία Κ ή Λ από τη θέση ισορροπίας του θα διέλθει και το άλλο από τη δική του θέση ισορροπίας;
- Αν κάποια χρονική στιγμή το υλικό σημείο Κ βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης, σε ποια θέση βρίσκεται το υλικό σημείο Λ την ίδια χρονική στιγμή;

[Απ.: a) φΚ=14π rad, φΜ=-4π rad β) Δφ=4π rad γ) Δφ=π rad δ) Δt=0,125 s ε) yΛ=-Α]

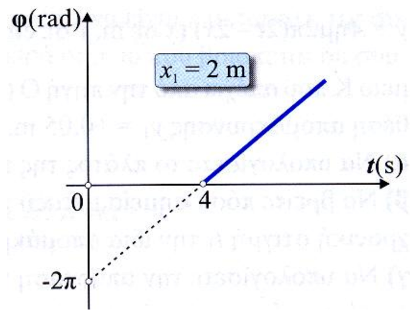
18. Μία πηγή αρμονικών κυμάτων βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα x'Ox και δημιουργεί εγκάρσια κύματα σε ελαστικό μέσο το οποίο συμπίπτει με τη διεύθυνση του άξονα x'Ox. Το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα με ταχύτητα υ. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή t_1= 2 s. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ενός υλικού σημείου του ελαστικού μέσου μάζας m = 2·10^{-3} kg, ισούται με 256·10^{-4} J.



- Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης της πηγής καθώς και την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.
- Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση x των σημείων του ελαστικού μέσου (φ=f(x)), τη χρονική στιγμή t2=3 s.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ (.x1=+4 m) σε συνάρτηση με το χρόνο (φ=f(t)).

[Απ.: a) ω=8π rad/s, υ=2 m/s β) y=0,2ημ2π(4t - 2x) (S.I.) γ) … δ) …]

19. Σε χορδή μεγάλου μήκους διαδίδεται αρμονικό κύμα με ταχύτητα υ. Η πηγή του κύματος βρίσκεται στο αριστερό άκρο Ο (x=0) της χορδής και εκτελεί ταλάντωση με



εξίσωση της μορφής y=0,1ημωt (S.I.). Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της φάσης της ταλάντωσης ενός υλικού σημείου Μ της χορδής που βρίσκεται στη θέση x1=2 m σε συνάρτηση με το χρόνο.

- Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
- Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t1=4 s.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης της ταλάντωσης ενός υλικού σημείου Κ της χορδής σε συνάρτηση με το χρόνο, αν το σημείο αυτό απέχει από το άκρο Ο της χορδής απόσταση x2=4m.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με την απόσταση x από το σημείο Ο, τη χρονική στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο Κ της χορδής.

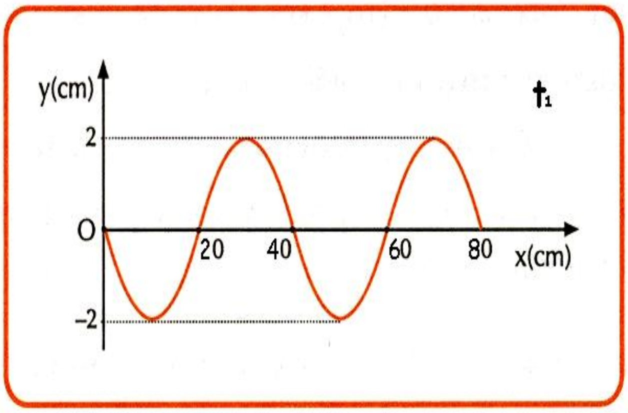
[Απ.: a) y=0,1ημ2π(0,25t – 0,5x) (S.I.) β) … γ) … δ) …]

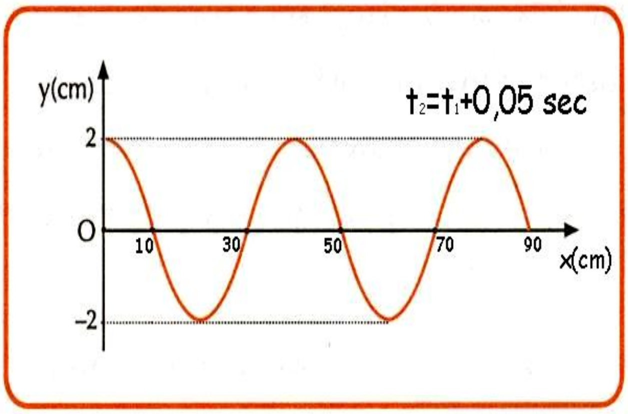
20. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους Α=0,2 m και μήκους κύματος λ=0,1 m διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου με ταχύτητα υ=0,25 m/s. Υλικό σημείο Κ του ελαστικού μέσου βρίσκεται σε απόσταση x1=0,55 m από την πηγή του κύματος και τη χρονική στιγμή t1=2,85 s, πέντε σημεία του μέσου μεταξύ της πηγής Ο και του σημείου Κ βρίσκονται σε συμφωνία φάσης με την πηγή. Τη χρονική στιγμή t = O η πηγή διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της με θετική ταχύτητα.

    - Να εξετάσετε αν το σημείο Κ βρίσκεται σε συμφωνία ή σε αντίθεση φάσης με την πηγή.
    - Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας του, τη χρονική στιγμή t_1.
    - Αν μεταβάλλουμε τη συχνότητα της πηγής, πόση πρέπει να είναι η μεταβολή της συχνότητας, ώστε το σημείο Κ να είναι το 22ο κατά σειρά σημείο που βρίσκεται σε συμφωνία φάσης με την πηγή;

[Απ.: a) αντίθεση φάσης β) yK=-0,1$\sqrt{2}$ m γ) Δf=+7,5 Hz]

21. 14. Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνονται δύο στιγμιότυπα ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά μήκος τεντωμένου νήματος Σ1 μήκους L=4 m. Η πηγή του κύματος βρίσκεται στο αριστερό άκρο Ο του νήματος, το οποίο κατά τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και κινείται κατά τη θετική φορά.





- Υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος $υ_1$ στο νήμα $Σ_1$.
- Γράψτε την εξίσωση του κύματος στο νήμα $Σ_1$.
- Το δεξιό άκρο του νήματος Σ1 είναι ενωμένο με το αριστερό άκρο δεύτερου νήματος Σ2 από διαφορετικό υλικό, ώστε τα δύο νήματα να βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Όταν το κύμα φθάνει στο κοινό σημείο Κ των δύο νημάτων συνεχίζει να διαδίδεται στο νήμα $Σ_2$ με ταχύτητα υ2=4 m/s χωρίς απώλεια ενέργειας. Ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Κ με το χρόνο.
- Να γραφεί η εξίσωση του κύματος στο νήμα $Σ_2$.

Συμβολή κυμάτων

1. Ένα μεγάφωνο, το οποίο μπορούμε να παρομοιάσουμε με σημειακή πηγή S, τροφοδοτείται από γεννήτρια χαμηλών συχνοτήτων. Η συχνότητα των ηλεκτρομαγνητικών ταλαντώσεων στην είσοδο του μεγάφωνου είναι ελεγχόμενη. Τα παραγόμενα ηχητικά κύματα μπορούν να θεωρηθούν σφαιρικά .Η ταχύτητα διάδοσής τους είναι 340 $m.s^{-1}$.

   - Σε ένα σημείο M που απέχει 2 cm από την πηγή S τοποθετούμε ένα μικρόφωνο, το οποίο επίσης θεωρούμε σημειακό. Για ποιες τιμές της συχνότητας οι ταλαντώσεις του μεγάφωνου και του μικρόφωνου βρίσκονται σε συμφωνία φάσης;
   - Σταθεροποιούμε τη συχνότητα σε 510 Hz. Προσδιορίστε τις θέσεις των σημείων που πάλλονται σε συμφωνία φάσης με το M Περιοριστείτε στο τμήμα SM.
   - Ποιες είναι οι γειτονικές θέσεις (στο τμήμα SM) στις οποίες πρέπει να μεταφέρουμε το μικρόφωνο για να ανιχνεύσουμε ταλάντωση σε συμφωνία φάσης με την πηγή;

2. Σε δυο σημεία A και B μιας ήρεμης επιφάνειας νερού δημιουργούνται δυο αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας συχνότητας (5 Hz) και του ίδιου πλάτους (0,5 cm). Σε ένα σημείο M της επιφάνειας του νερού τοποθετείται ένα μικρό κομμάτι φελλού. Το σημείο M απέχει από τα A και B αποστάσεις r_1 = 28 cm και r_1 = 28 cm αντίστοιχα r_2 = 44 cm. Η ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων είναι 0,4 $m.s^{-1}$. θεωρούμε ως αρχή των χρόνων μια χρονική στιγμή κατά την οποία τα ταλαντευόμενα σημεία A και B βρίσκονται στη θέση ισορροπίας κινούμενα προς το θετικό ημιάξονα. Ζητείται η εξίσωση που να παρέχει τις απομακρύνσεις του M σε συνάρτηση με το χρόνο.

3. Για να υπολογίσουμε το βάθος ενός θαλάσσιου βυθού εκπέμπουμε μια δέσμη υπερήχων 100.000 Hz, η οποία, αφού ανακλάται στο βυθό, επιστρέφει μετά από χρόνο 1,4 s από τη στιγμή της εκπομπής. Αν θεωρηθεί γνωστό ότι όλα τα «ηχητικά» κύματα διαδίδονται στο νερό με ταχύτητα 1.440 $m.s^{-1}$ υπολογίστε το μήκος κύματος των υπερήχων και το βάθος του βυθού.

4. Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων Πι και Π2, μηδενικής αρχικής φάσης, βρίσκονται στα σημεία A και B αντίστοιχα. Οι δύο πηγές παράγουν σε ελαστικό μέσο εγκάρσια επιφανειακά κύματα συχνότητας f=10 Hz, ίδιου πλάτους A=0,2 m και ίδιου μήκους κύματος λ=0,6 m.

   - Να αποδείξετε ότι εξαιτίας της συμβολής των δύο κυμάτων όλα τα σημεία που βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος AB ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, το οποίο και να υπολογίσετε.
   - Ένα υλικό σημείο K απέχει από το σημείο A απόσταση x1=1,2 m και από το σημείο B απόσταση x_2 = 1 m.

- Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή ξεκινά η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Κ.
- Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Κ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό.
- Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας του αφού συμβάλλουν τα δύο κύματα στο σημείο αυτό.

Θεωρήστε ότι το πλάτος των επιφανειακών κυμάτων παραμένει σταθερό κατά τη διάδοσή τους στο ελαστικό μέσο.

[Απ. : α) Amax=0,4 m β) t=0,2 s γ) Α΄=0,2 m δ) $y=0,2\eta\mu 2\pi(10t-\frac{11}{6})$ (S.I.) για $t\geq 0,2$ s]

5. Δύο σύγχρονες πηγές δημιουργούν αρμονικά επιφανειακά κύματα σε ελαστικό μέσο. Τα δύο κύματα είναι εγκάρσια, έχουν ίδιο πλάτος Α=0,1 m, ίδιο μήκος κύματος λ=0,5 m και διαδίδονται στο ελαστικό μέσο με ταχύτητα υ=1 m/s. Να υπολογίσετε:
    - το πλάτος τους ταλάντωσης τους σημείου Κ του μέσου που απέχει από τη μια πηγή απόσταση x1=1,25 m και από την άλλη πηγή απόσταση x2=3 m. Να χαρακτηρίσετε το είδος τους συμβολής (ενισχυτική ή ακυρωτική) που συμβαίνει στο σημείο αυτό.
    - το πλάτος τους ταλάντωσης τους υλικού σημείου Λ του μέσου που απέχει από τη μια πηγή απόσταση x1΄=1 m και από την άλλη πηγή απόσταση x2΄=2 m. Να χαρακτηρίσετε το είδος τους συμβολής (ενισχυτική ή ακυρωτική) που συμβαίνει στο σημείο αυτό.
    - την απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ του μέσου από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t1=2,5 s, αν οι δύο πηγές έχουν εξίσωση ταλάντωσης τους μορφής y=Αημωt.

Θεωρήστε ότι το πλάτος των επιφανειακών κυμάτων παραμένει σταθερό κατά τη διάδοσή τους στο ελαστικό μέσο.
[Απ. : α) Α΄Κ=0 m ακυρωτική β) Α΄Λ=0,2 m ενισχυτική γ) μηδέν]

6. Αρμονικά κύματα δημιουργούνται στην επιφάνεια ενός υγρού από δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2. Οι πηγές εκτελούν κατακόρυφες αρμονικές ταλαντώσεις και η εξίσωση ταλάντωσης κάθε πηγής είναι y=0,08ημ4πt (S.I.). Σημείο Κ που βρίσκεται στην επιφάνεια του υγρού απέχει από την πηγή Πι απόσταση x_1=90 cm και από την πηγή Π_2 απόσταση x_2=150 cm. Το σημείο Κ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_1=1,5 s εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_1.
    - Να διερευνήσετε αν στο σημείο Κ συμβαίνει ενισχυτική ή ακυρωτική συμβολή των δύο κυμάτων.
    - Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Κ από τη στιγμή που έχουν φτάσει και τα δύο κύματα στο σημείο αυτό.
    - Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Κ σε συνάρτηση με το χρόνο μετά την έναρξη της συμβολής στο σημείο αυτό.

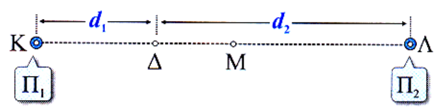
Θεωρήστε ότι το πλάτος των επιφανειακών κυμάτων κατά τη διάδοση τους στο υγρό παραμένει σταθερό.

[Απ. : α) ενισχυτική συμβολή β) Α΄Κ=0,16 m γ) υ=0,64πσυν2π(2t-4) (S.I.) για t≥2,5 s]

7. Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων Π1 και Π2, μηδενικής αρχικής φάσης, βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα της επιφάνειας ενός υγρού. Οι δύο πηγές ταλαντώνονται κατακόρυφα και δημιουργούν στο υγρό επιφανειακά κύματα πλάτους Α που διαδίδονται με ταχύτητα υ=2 m/s. Υλικό σημείο Ζ της επιφάνειας του υγρού απέχει από την πηγή Π1 απόσταση x1 και από την πηγή Π2 απόσταση x2=2 m. Εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π1, το σημείο Ζ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση y1=0,02ημ(4πt - 3,5π) (S.I.).
   - Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Ζ εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π2.
   - Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Ζ μετά από τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό.
   - Μεταβάλλοντας τη συχνότητα των δύο πηγών, ώστε να παραμένουν σύγχρονες και μηδενικής αρχικής φάσης, πετυχαίνουμε ενισχυτική συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Ζ. Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα που πρέπει να έχουν οι δύο πηγές.

[Απ. : α) y2=0,02ημ(4πt-4π) (S.I.) β) yZ=0,02$\sqrt{2}$ημ(4πt-3,75π) (S.I.) για t≥1 s γ)fmin=8 Hz]

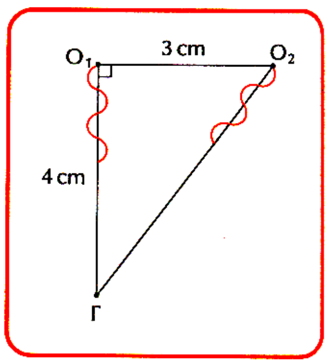
8. Εγκάρσια αρμονικά κύματα πλάτους Α=0,2 m δημιουργούνται από δύο σύγχρονες πηγές Π1 και Π2 σε δύο σημεία Κ και Λ αντίστοιχα της επιφάνειας ενός ελαστικού μέσου. Τα κύματα αυτά διαδίδονται στην επιφάνεια του ελαστικού μέσου με ταχύτητα υ=1 m/s. Σημείο Δ του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ, απέχει από την πηγή Π1 απόσταση d1=0,4 m, από την πηγή Π2 απόσταση d2= 0,6 m και είναι το πλησιέστερο σημείο στο μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.



   - Να υπολογίσετε τη συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών.
   - Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ, αν δίνεται ότι η εξίσωση ταλάντωσης των δύο πηγών είναι της μορφής y=Aημωt.
   - Να βρείτε τις θέσεις των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ στα οποία συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

Θεωρήστε ότι το πλάτος των επιφανειακών κυμάτων παραμένει σταθερό κατά τη διάδοσή τους στο ελαστικό μέσο.
[Απ. : α)f=5 Hz β)y=0,4ημ (10πt-5π) (S.I.) για t≥0,5 s γ)x1=N·0,1 (m) με N=1, 2, ,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

9. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Ο1, και Ο2 είναι δύο ταλαντωτές που αρχίζουν ταυτόχρονα να εκτελούν κατακόρυφες ταλαντώσεις στην επιφάνεια του νερού με εξισώσεις y1 = y2 =0,2ημ20πt, (τα y1 και y2 είναι σε cm και το t σε



s). Η ταχύτητα διάδοσης των παραγόμενων κυμάτων στην επιφάνεια του νερού είναι υ=5 cm/s .

- Να υπολογίσετε την περίοδο και το μήκος κύματος των δύο κυμάτων.
- Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κυμάτων.
- Ποια είναι η διαφορά φάσης των κυμάτων στο σημείο Γ;
- Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Γ;

[Απ.: α) T=0,1s, λ=0,5cm, β) y1=0,2ημ2π(10t + 2x1) και y2=0,2ημ2π(10t - 2x2), (τα x1, x2 και y είναι σε cm και το t σε s), γ) Δφ = 4π rad, δ) A'=0,4cm]

10. Δύο πηγές κυμάτων Ο1 και Ο2 δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα με πλάτος Α=2 cm, συχνότητα f=1 Hz και ίδια φάση. Τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα υ=10 cm/s. Ένα σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού απέχει από την πηγή Ο1 απόσταση r1=20 cm και από την πηγή Ο2 απόσταση r2, τέτοια ώστε 22 cm < r2 <26 cm .
    - Ποια είναι η ακριβής τιμή της απόστασης r2, αν το σημείο Σ παραμένει διαρκώς ακίνητο;
    - Να βρείτε τις επιμέρους εξισώσεις της κίνησης του σημείου Σ που οφείλονται στα κύματα που φθάνουν από τις πηγές Ο1 και Ο2, αντίστοιχα.
    - Με τη βοήθεια των εξισώσεων του ερωτήματος β) να δικαιολογήσετε γιατί το σημείο Σ παραμένει διαρκώς ακίνητο.

[Απ.: a) r2=25 cm, β) y1=2ημ(2πt - 4π), y2=2ημ(2πt - 5π), (τα y1, y2 και x είναι σε cm και το t σε s), γ) Δφ=π]

11. Δύο πηγές κυμάτων Π1 και Π2 δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα του ίδιου πλάτους Α=0,5 cm, της ίδιας περιόδου Τ=0,2 s και της ίδιας φάσης. Ένα μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται σε κάποιο σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού, το οποίο απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις r1=28 cm και r2=44 cm , αντίστοιχα. Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων είναι υ=0,4 m/s.
    - Ποια είναι η διαφορά φάσης των δύο κυμάτων στο σημείο Μ, την ίδια χρονική στιγμή;
    - Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης του φελλού;
    - Ποια είναι η απομάκρυνση του φελλού από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t=2,25 s;
    - Κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος Π1Π2 βρίσκεται ένα δεύτερο μικρό κομμάτι φελλού. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του φελλού από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος Π1Π2 , ώστε να παραμένει διαρκώς ακίνητο;

[Απ.: α)Δφ=4π, β) A'=1 cm, γ) yM=-1 cm, δ) x=2 cm]

12. Δυο σύγχρονες πηγές Π1, και Π2 , που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d=6 m, δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα με το ίδιο πλάτος Α=2 cm και την ίδια συχνότητα f. Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων είναι υ=16 m/s . Έχει προσδιοριστεί πειραματικά ότι το μήκος κύματος των κυμάτων που παράγουν οι δύο πηγές βρίσκεται στην περιοχή μεταξύ λ1=65 cm και λ2=100 cm. Ένα μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται στο σημείο Σ της επιφάνειας του

υγρού, σε απόσταση r2=8 m από την πηγή Π2 και πάνω στην κάθετο προς το ευθύγραμμο τμήμα Π1Π2 που διέρχεται από το σημείο Π2. Αν το κομμάτι του φελλού παραμένει διαρκώς ακίνητο, να υπολογίσετε:

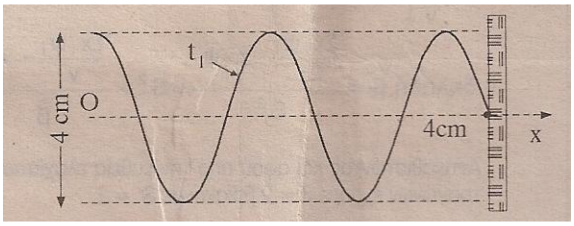
- Την τιμή της συχνότητας f.
- Το πλάτος της ταλάντωσης ενός άλλου μικρού κομματιού φελλού, το οποίο βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$, σε απόσταση x_1 = 3,1 m από την πηγή $Π_1$.

[Απ.: a) f=20 Hz, β) A'=2 $\sqrt{2}$ cm]

Στάσιμα κύματα

1. Στο σχήμα φαίνεται στιγμιότυπο στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_1, στην οποία τα σημεία του μέσου είναι σε ακραία θέση (T = 2sec).

   - Να γράψετε τις εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων που συμβάλλουν καθώς και την εξίσωση του στάσιμου κύματος.
   - Να κάνετε τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές $t_2 = t_1 + 0{,}5$ sec και $t_3 = t_1 + 1$sec.
   - Να γράψετε την εξίσωση κίνησης για τα σημεία Μ και Ν που βρίσκονται στις θέσεις x_M =1 cm και x_N = 5 cm αντίστοιχα .Τη χρονική στιγμή t = 0 το σημείο Ο είναι στη θέση y = 0 με θετική ταχύτητα.



2. Κατά μήκος της χορδής αναπτύσσεται στάσιμο κύμα με εξίσωση $y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \eta\mu 2\pi \frac{t}{T}$. Να υπολογίσετε:

   - Τη θέση της 4ης κοιλίας τη στιγμή που η πρώτη βρίσκεται στη θέση $y_{\kappa 1} = -2A$, Το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου της χορδής που απέχει απο τον προηγούμενο δεσμό απόσταση $\frac{\lambda}{6}$.
   - Την απόσταση από μια κοιλία ενός σημείου που εκτελεί ταλαντώσεις με πλάτος $A' = A\sqrt{2}$
   - Τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων που απέχουν από την αρχή αποστάσεις $x_1 = \frac{15{,}5\lambda}{4}$ και $x_2 = \frac{19{,}5\lambda}{4}$ αντίστοιχα.
   - Να κάνετε τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{T}{6}$ και $t_2 = \frac{2T}{3}$ αντίστοιχα.

3. Κατά μήκος ενός σχοινιού διαδίδονται ταυτόχρονα δυο κύματα, τα οποία περιγράφονται από τις εξισώσεις: $y_1 = 5\eta\mu 2\pi(10t - \frac{x}{20})$ και $y_2 = 5\eta\mu 2\pi(10t + \frac{x}{20})$, (τα x και y σε cm και το t σε s)
   - Να γράψετε την εξίσωση του στασίμου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή των δύο κυμάτων.

- Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου Α του σχοινιού που βρίσκεται στη θέση x= $\frac{40}{3}$ cm;
- Σε πόση απόσταση από το σημείο Α βρίσκεται η πλησιέστερη κοιλία και σε πόση ο πλησιέστερος δεσμός του στασίμου κύματος;

4. Κατά μήκος μιας χορδής διαδίδονται ταυτόχρονα δύο κύματα με εξισώσεις: $y_1 = 4ημπ(20t - \frac{x}{10})$ και $y2=4ημπ(20t + \frac{x}{10})$, και (τα x και y σε cm και το t σε s)
    - Να γράψετε την εξίσωση του στασίμου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή των δύο κυμάτων.
    - Να βρείτε τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων δύο σημείων Β και Γ της χορδής που βρίσκονται στις θέσεις x_B = 2,5 cm και $x_Γ$ =7,5 cm , αντίστοιχα.
    - Να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης του σημείου της χορδής που βρίσκεται στη θέση της πρώτης κοιλίας του στασίμου κύματος, στον θετικό ημιάξονα.

Να θεωρηθεί ότι η αρχή του άξονα (x=0) είναι μια κοιλία του στασίμου κύματος και ότι τη χρονική στιγμή t=0 η φάση της ταλάντωσης του σημείου του σχοινιού που βρίσκεται στη θέση x=0 είναι φ0 =0 .

[Απ.: a) $y=8συν\frac{πx}{10}ημ20πt$, (τα x και y είναι σε cm και το t σε s), β) Δφ=π, γ) y=8ημ(20πt+π), (το y είναι σε cm και το t σε s)]

5. Ένα οριζόντιο σχοινί έχει στο ένα άκρο του στερεωμένο δακτύλιο, ο οποίος περιβάλλει κατακόρυφο σωλήνα μικρότερης διαμέτρου. Αν αρχίσουμε να κινούμε το ελεύθερο άκρο του σχοινιού πάνω-κάτω με σταθερή συχνότητα, τότε διαδίδεται προς τα δεξιά ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση: $y_1=4ημ(20πt - \frac{πx}{30})$, (τα x και y_1, είναι σε cm και το t σε s)
    - Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
    - Να γράψετε την εξίσωση του στασίμου κύματος που δημιουργείται από το προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα.
    - Για ένα τμήμα του σχοινιού από τη θέση x=0 που ταυτίζεται με μια κοιλία του στασίμου κύματος μέχρι τη θέση x=105 cm, όπου βρίσκεται ο δακτύλιος, να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του στασίμου κύματος κατά τις χρονικές στιγμές: (i) t=0 και (ii) t=0,025 s.
    - Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου του σχοινιού που βρίσκεται σε απόσταση d = 15 cm από το δακτύλιο.

Δίνεται ότι, επειδή ο δακτύλιος είναι ελεύθερος να κινηθεί πάνω-κάτω, το προσπίπτον κύμα ανακλάται χωρίς μεταβολή φάσης.

[Απ.: a) υ=6 m/s, β) $y=8συν\frac{πx}{30}ημ20πt$, (τα x και y είναι σε cm και το t σε s), δ) A=8 cm]

6. Κατά μήκος μιας χορδής δημιουργείται στάσιμο κύμα, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση: $y = 4συν\frac{4ππ}{30}ημ20πt$, (τα x και y είναι σε cm και το t σε s)
    - Να βρείτε το πλάτος, το μήκος κύματος και τη συχνότητα των δύο κυμάτων που η συμβολή τους δημιουργεί το στάσιμο κύμα.

- Να βρείτε την ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων,
- Να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του στασίμου κύματος από τη θέση x = 0 έως τη θέση x = 120 cm:

(i) κατά τη χρονική στιγμή t_1 που το σημείο της χορδής που βρίσκεται στη θέση x = 0 βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση του και

(ii) κατά τη χρονική στιγμή $t2=t1+\frac{T}{4}$ όπου T η περίοδος των δύο κυμάτων.

[Απ.: a) A=2 cm, λ=30 cm, f=10 Hz, β) υ=3 m/s]

7. Κατά μήκος μιας χορδής δημιουργείται στάσιμο κύμα, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση: $y = 4συν\frac{πx}{10}ημ25πt$, (τα x και y είναι σε cm και το t σε s). Υποθέτουμε ότι η αρχή μέτρησης των αποστάσεων (x=0) είναι μια κοιλία Ο του στασίμου κύματος και η αρχή των χρόνων (t=0) είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία η φάση στο σημείο Ο είναι μηδέν.
   - Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων που συμβάλλουν και δημιουργούν το στάσιμο κύμα.
   - Να βρείτε τον αριθμό κ των κοιλιών του στασίμου κύματος, οι οποίες περιλαμβάνονται μεταξύ δύο σημείων Σ και Σ' της χορδής που είναι δεσμοί του στασίμου κύματος και απέχουν μεταξύ τους απόσταση L=50 cm.
   - Με κατάλληλη μεταβολή της συχνότητας των δύο κυμάτων, δημιουργείται κατά μήκος της χορδής ένα νέο στάσιμο κύμα. Αν τα σημεία Σ και Σ' της χορδής είναι δεσμοί και του νέου στασίμου κύματος και ο αριθμός των κοιλιών, οι οποίες περιλαμβάνονται μεταξύ τους, είναι κ-1, να γράψετε την εξίσωση του νέου στασίμου κύματος.

[Απ.: α) υ=2,5 m/s, β) κ=5 κοιλίες, γ) $y=4συν\frac{2πx}{25}ημ20πt$, (τα x και y είναι σε cm και το t σε s)]

Κεφάλαιο 4: μηχανική του στερεού σώματος.

Ορισμοί

1. ***Υλικό σημείο ή σημειακό σώμα:*** ονομάζεται ένα σώμα του οποίου οι γραμμικές διαστάσεις κάτω από δοσμένες συνθήκες μπορούν να αγνοηθούν, όχι όμως η μάζα του. Μπορεί να εκτελεί μόνο εταφορικές κινήσεις.Η έννοια του υλικού σημείου παίζει σημαντικό ρόλο στη μηχανική. Αυτό γιατί μπορεί κάθε σώμα έχει τις καθορισμένες γραμμικές του διαστάσεις και διαφορετικά μέρη του να βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χώρου αλλά σε πολλά προβλήματα μηχανικής δεν είναι απαραίτητο να καθορίσουμε τις θέσεις των διαφορετικών κομματιών του σώματος. Αν οι γραμμικές διαστάσεις του είναι αμελητέες σε σχέση με τις αποστάσεις από τα άλλα σώματα, τότε αυτό το μπορεί να θεωρηθεί *υλικό σημείο*. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε για παράδειγμα όταν μελετάμε την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο.

2. ***Μηχανικό στερεό:*** είναι ένα (υποθετικό) σώμα με διαστάσεις και μάζα που δεν παραμορφώνεται όταν του ασκούνται δυνάμεις. Έχει δυνατότητα να εκτελεί μεταφορική, περιστροφική και σύνθετη κίνηση.

3. ***Κέντρο μάζας*** ($\vec{r}_c$): το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_c$ του κέντρου μάζας στην περίπτωση ενός συστήματος σημειακών μαζών m_i που βρίσκονται στο χώρο xyz, στα σημεία με συντεταγμένες x_i, y_i,z_i, δίνεται από τις εκφράσεις:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i.\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad \text{(διανυσματική μορφή)} \qquad (4.1),$$

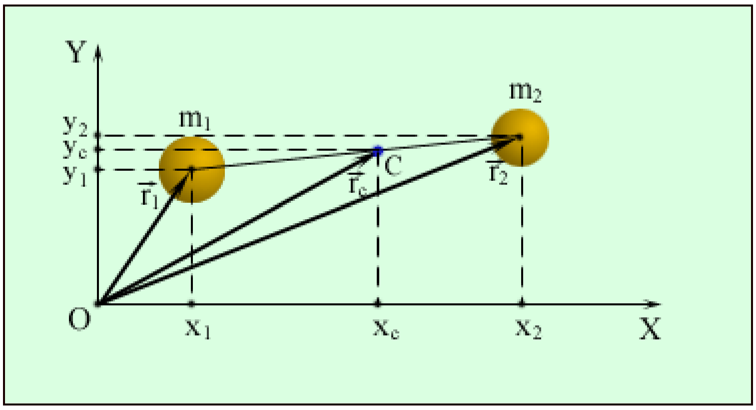
ή, ισοδύναμα,

$$x_C = \frac{\sum_i m_i.x_i}{\sum_i m_i} \quad \text{(αλγεβρική μορφή)} \qquad (4.2),$$

$$y_C = \frac{\sum_i m_i.y_i}{\sum_i m_i} \quad \text{(αλγεβρική μορφή)} \qquad (4.3),$$

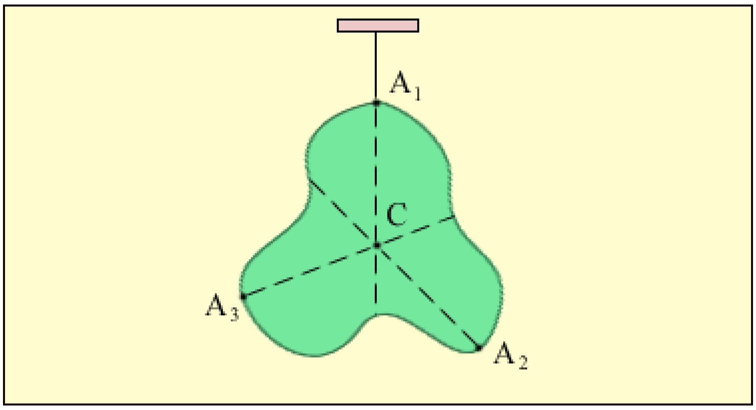
$$z_C = \frac{\sum_i m_i . z_i}{\sum_i m_i} \text{ (αλγεβρική μορφή)} \qquad (4.4).$$

Για ένα συνεχές σώμα, τα παραπάνω αθροίσματα αντικαθίστανται από τα αντίστοιχα ολοκληρώματα.



Εικ.4.1. Το κέντρο μάζας C ενός συστήματος με δύο σημειακές μάζες.

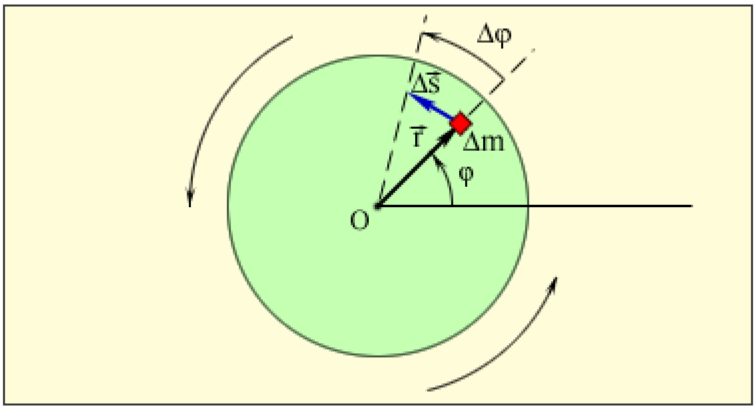
Είναι εύκολο να δούμε ότι σε ένα σταθερό βαρυτικό πεδίο το κέντρο μάζας συμπίπτει με το κέντρο βάρους. Η συνισταμένη των βαρυτικών δυνάμεων σε ένα ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας του σώματος. Έτσι η θέση του κέντρου μάζας ενός σώματος περίπλοκου σχήματος μπορεί να καθοριστεί πρακτικά κρεμώντας το συνεχόμενα από διάφορα σημεία και σημειώνοντας τις κάθετες ευθείες με τη βοήθεια ενός νήματος στάθμης (βλέπε εικόνα 4.2).Αν το σώμα κρέμεται από το κέντρο μάζας του, τότε βρίσκεται σε κατάσταση αδιάφορης ισορροπίας.



Εικ.4.2. Καθορίζοντας τη θέση του κέντρου μάζας C ενός περίπλοκου σε σχήμα σώματος. A_1, A_2, A_3 είναι το σημείο ανάρτησης.

4. ***<u>Μεταφορική κίνηση:</u>*** είναι η κίνηση κατά την οποία σε κάθε χρονική στιγμή όλα τα σημεία ενός σώματος έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα και γραμμική επιτάχυνση. Στην κίνηση αυτήν ισχύουν όλοι οι νόμοι που διέπουν την κίνηση ενός υλικού σημείου.

5. ***<u>Στροφική ή περιστροφική κίνηση:</u>*** είναι η κίνηση κατά την οποία σε κάθε χρονική στιγμή το σώμα αλλάζει προσανατολισμό. Στην κίνηση αυτή υπάρχει μια ευθεία (άξονας περιστροφής) που όλα τα σημεία της παραμένουν ακίνητα ενώ όλα τα υπόλοιπα σημεία του σώματος εκτελούν κυκλική κίνηση γύρω από την αυτήν με την ίδια γωνιακή ταχύτητα και την ίδια γωνιακή επιτάχυνση. Η αριστερόστροφη κατεύθυνση θεωρείται ως θετική.



Εικ.4.3. Περιστροφή ενός δίσκου γύρω από τον άξονα που περνάει από το κέντρο του Ο.

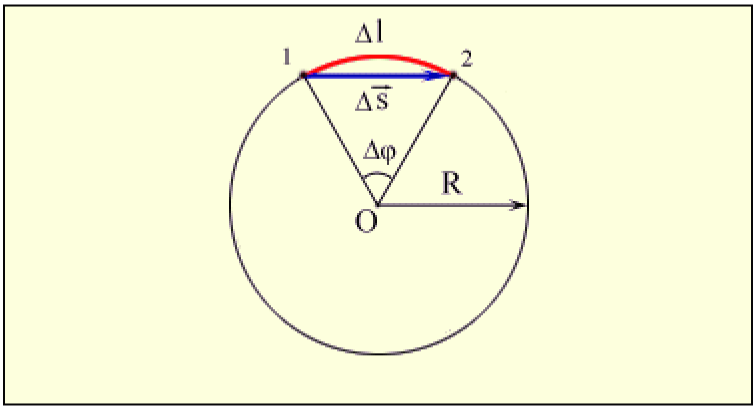
6. ***<u>Σύνθετη κίνηση:</u>*** είναι η κίνηση κατά την οποία ένα σώμα μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του. Μπορεί να μελετηθεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής και μιας περιστροφικής κίνησης.

7. ***<u>Γωνιακή θέση</u>*** (φ)**:** είναι η προσανατολισμένη γωνία που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη θέση ενός σώματος που εκτελεί καμπυλόγραμμη ή στροφική κίνηση. Κατά μήκος του διανύσματος της μετατόπισης $\Delta\vec{r}$ είναι βολικό να θεωρήσουμε τη *<u>γωνιακή μετατόπιση</u>* Δφ μετρημένη σε *<u>ακτίνια</u>* (εικ.4.4). Το ακτινικό μήκος σχετίζεται με την γωνιακή μετατόπιση με την παρακάτω σχέση

$$\Delta l = r.\ \Delta\varphi \qquad (4.5).$$

Όταν οι γωνιακές μετατοπίσεις είναι μικρές

$$dr = r.\ d\varphi \qquad (4.6).$$



Εικ.4.4. Γραμμικές $\Delta\vec{s}$ και γωνιακές Δφ μετατοπίσεις στην κυκλική κίνηση ενός σώματος.

8. ***Μέση γωνιακή ταχύτητα*** ($\vec{\omega}_\mu$)**:** ονομάζουμε μέση γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος το διανυσματικό εκείνο φυσικό μέγεθος που εκφράζει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η γωνιακή θέση του σώματος σε μια ορισμένη χρονική διάρκεια Δt. Έχει

- Διεύθυνση παράλληλη στον άξονα περιστροφής
- Φορά που καθορίζεται με τη βοήθεια του κανόνα του δεξιού χεριού.
- Αλγεβρική τιμή (μέτρο + πρόσημο) ίση με το πηλίκο της μεταβολής της γωνιακής θέσης του σώματος (οι γωνίες μετρούνται σε ακτίνια) προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια. Μονάδα της στο Διεθνές Σύστημα (S.I.) είναι το 1 sec^{-1}. Ισχύει

$$\vec{\omega}_\mu = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.\hat{n} \qquad (4.7),$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης.

9. ***Στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα*** ($\vec{\omega}$)**:** ονομάζουμε στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος το διανυσματικό εκείνο φυσικό μέγεθος που εκφράζει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η γωνιακή θέση του σώματος σε μια ορισμένη χρονική στιγμή. Έχει

- Διεύθυνση παράλληλη στον άξονα περιστροφής
- Φορά που καθορίζεται με τη βοήθεια του κανόνα του δεξιού χεριού.
- Αλγεβρική τιμή (μέτρο + πρόσημο) ίση με το στιγμιαίο χρονικό ρυθμό μεταβολής της γωνιακής θέσης του σώματος (οι γωνίες μετρούνται σε ακτίνια). Μονάδα της στο Διεθνές Σύστημα (S.I.) είναι το 1 s^{-1}. Ισχύει

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}.\hat{n} \qquad (4.8),$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης.

10. ***Μέση γωνιακή επιτάχυνση*** ($\vec{a}_\mu$)**:** ονομάζουμε μέση γωνιακή επιτάχυνση ενός σώματος το διανυσματικό εκείνο φυσικό μέγεθος που εκφράζει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα του σώματος σε μια ορισμένη χρονική διάρκεια Δt. Έχει

- Διεύθυνση παράλληλη στον άξονα περιστροφής
- Φορά ίδια με αυτήν της αντίστοιχης μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας $\Delta\vec{\omega}$.
- Αλγεβρική τιμή (μέτρο + πρόσημο) ίση με το πηλίκο της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του σώματος (οι γωνίες μετρούνται σε ακτίνια) προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια. Μονάδα της στο Διεθνές Σύστημα (S.I.) είναι το 1 $\sec^{-2}$.

$$\vec{a}_\mu = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \qquad (4.9),$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης.

11. ***Στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση*** ($\vec{a}$)**:** ονομάζουμε στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση ενός σώματος το διανυσματικό εκείνο φυσικό μέγεθος που εκφράζει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα του σώματος σε μια ορισμένη χρονική στιγμή. Έχει

- Διεύθυνση παράλληλη στον άξονα περιστροφής
- Φορά ίδια με της γωνιακής ταχύτητας αν $\alpha \geq 0$ και αντίθετη από αυτήν αν $\alpha < 0$.
- Αλγεβρική τιμή (μέτρο + πρόσημο) ίση με το στιγμιαίο χρονικό ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του σώματος (οι γωνίες μετρούνται σε ακτίνια). Μονάδα της στο Διεθνές Σύστημα (S.I.) είναι το 1 $\sec^{-2}$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.\hat{n} \qquad (4.10),$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης.

12. ***Ροπή δύναμης ως προς σημείο Ο*** ($\vec{\tau}_o$)**:** ονομάζουμε ροπή δύναμης $\vec{F}$ ως προς σημείο Ο το διανυσματικό εκείνο φυσικό μέγεθος που έχει

- Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη $\vec{F}$ και το σημείο Ο.

- Φορά που καθορίζεται με τη βοήθεια του κανόνα των τριών δαχτύλων του δεξιού χεριού.
- Μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ επί την απόστασή της από το σημείο Ο. Μονάδα της στο Διεθνές Σύστημα (S.I.) είναι το 1 N.m.

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau_O = F.r.\eta\mu\theta \qquad (4.11),$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{r}, \vec{F}$.

13. ***<u>Ροπή δύναμης ως προς άξονα περιστροφής z΄z</u>*** ($\vec{\tau}_z$)**:** ονομάζουμε ροπή δύναμης $\vec{F}$ ως προς άξονα περιστροφής z΄z το διανυσματικό εκείνο φυσικό μέγεθος που έχει

- Διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής z΄z.
- Φορά που καθορίζεται με τη βοήθεια του κανόνα του δεξιού χεριού.
- Μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της συνιστώσας $\vec{F}_\kappa$ της δύναμης $\vec{F}$ που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής z΄z επί την κάθετη απόστασή της r_κ από τον άξονα περιστροφής z΄z. Μονάδα της στο Διεθνές Σύστημα (S.I.) είναι το 1 N.m.

$$\vec{\tau}_z = \vec{r} \times \vec{F}_\kappa \Rightarrow \tau_z = r_\kappa.F_\kappa = r.F_\kappa.\eta\mu\theta \qquad (4.12),$$

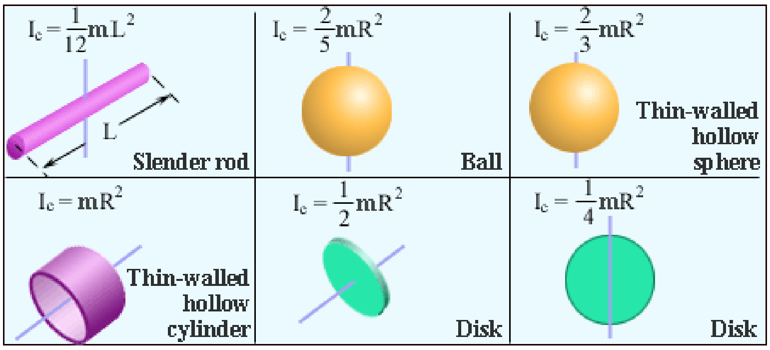
όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{r}, \vec{F}_\kappa$.

14. ***<u>Ροπή αδράνειας</u>*** (Ι)**:** ονομάζεται ροπή αδράνειας Ι ενός σώματος (ή συστήματος σωμάτων) σε σχέση με κάποιο δοσμένο άξονα περιστροφής ένα μονόμετρο φυσικό μέγεθος που εξαρτάται από την κατανομή της μάζας του περιστρεφόμενου σώματος (ή συστήματος σωμάτων) σε σχέση με αυτόν τον άξονα.

$$I = \sum_i m_i.r_i^2 \qquad (4.13).$$

Οριακά αυτό το άθροισμα μετασχηματίζεται σε ολοκλήρωμα. Η μονάδα της ροπής αδράνειας στο S.I. είναι το ένα χιλιόγραμμο επί μέτρο στο τετράγωνο ($kg \cdot m^2$). Η ροπή αδράνειας στη δυναμική μιας περιστροφικής κίνησης παίζει τον ίδιο ρόλο όπως η μάζα στη δυναμική μιας μεταφορικής κίνησης. Αλλά υπάρχει μια ουσιώδης διαφορά. Ενώ η μάζα είναι η εσωτερική ιδιότητα του δοσμένου σώματος, το οποίο δεν εξαρτάται από την κίνηση του, η ροπή αδράνειας του σώματος εξαρτάται από τον άξονα από τον οποίο περιστρέφεται. Η ροπή αδράνειας του ίδιου σώματος είναι διαφορετική σε σχέση με τους διαφορετικούς άξονες περιστροφής.

Σε πολλά προβλήματα θεωρούμε την περίπτωση όταν ο άξονας περιστροφής ενός στερεού σώματος περνάει από το κέντρο μάζας του. Στην εικόνα 4.5 φαίνονται οι ροπές αδράνειας ομογενών στερεών σωμάτων διαφορετικών σχημάτων ως προς τον άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας αυτών.



Εικ.4.5. Ροπές αδράνειας I_C ορισμένων στερεών σωμάτων.

15. ***Ζεύγος δυνάμεων:*** δυο δυνάμεις $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$ θα λέμε ότι αποτελούν ζεύγος δυνάμεων αν και μόνο αν

- Έχουν διαφορετικά σημεία εφαρμογής.
- Είναι αντίθετες, δηλαδή

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (4.14).$$

16. ***Στροφορμή υλικού σημείου*** ($\vec{L}$): ονομάζουμε στροφορμή υλικού σημείου $\vec{L}$ ως προς έναν άξονα z΄z που διέρχεται από ένα κέντρο καμπυλότητας της (καμπυλόγραμμης) τροχιάς του σημείου και είναι κάθετος στο επίπεδό της το διανυσματικό εκείνο φυσικό μέγεθος που έχει

- Διεύθυνση αυτή του άξονα z΄z.
- Φορά που καθορίζεται με τη βοήθεια του κανόνα των τριών δαχτύλων του δεξιού χεριού.
- Μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της γραμμικής ορμής $\vec{p}$ επί την απόστασή της από τον άξονα z΄z. Μονάδα της στο Διεθνές Σύστημα (S.I.) είναι το 1 kg.m^2 .s^{-1}.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m.\vec{r} \times \vec{\upsilon} \Rightarrow L = r.p.\eta\mu\theta = m.r.\upsilon.\eta\mu\theta \qquad (4.15),$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{r}, \vec{p}$.

17. ***Στροφορμή στερεού σώματος λόγω περιστροφής ή spin*** ($\vec{L}$): ονομάζουμε (στην Κλασσική Φυσική) spin ή στροφορμή στερεού σώματος $\vec{L}$ που περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα z΄z το διανυσματικό εκείνο φυσικό μέγεθος που έχει

- Διεύθυνση αυτή του άξονα z΄z.

- Φορά που καθορίζεται με τη βοήθεια του κανόνα του δεξιού χεριού.
- Μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ του συγκεκριμένου στερεού επί τη ροπή αδράνειάς του I ως προς τον άξονα z΄z. Μονάδα της στο Διεθνές Σύστημα (S.I.) είναι το 1 kg.m^2 .sec^{-1}.

$$\vec{L} = I.\vec{\omega} \qquad (4.16).$$

Απόδειξη:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i.\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i = \left(\sum_i m_i.r_i.\upsilon_i\right).\widehat{u}_z = \left(\sum_i m_i.r_i^2.\right).\omega.\widehat{u}_z = I.\vec{\omega} \qquad (4.17).$$

Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων (Θεώρημα του Steiner)

Θεώρημα των παράλληλων αξόνων (Θεώρημα του Steiner): αν ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από ένα καθορισμένο άξονα, τότε η ροπή αδράνειας του I μπορεί να εκφραστεί σαν την ροπή αδράνειας I_C αυτού του σώματος γύρω από τον άξονα ο οποίος περνάει από το κέντρο μάζας του σώματος και παράλληλα στο τελευταίο με τον τύπο

$$I_P = I_C + m.d^2 \qquad (4.18),$$

όπου m είναι η συνολική μάζα του σώματος.

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε τον τομέα ενός στερεού σώματος αυθαίρετης μορφής που φαίνεται στην εικόνα 4.6. Ας επιλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων xOy με αρχή O στο κέντρο μάζας C του σώματος. Υποθέστε ότι ένας άξονας περιστροφής περνάει από το κέντρο μάζας C, και άλλος ένας από ένα αυθαίρετο σημείο P, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση d από την αρχή των αξόνων. Και οι δύο άξονες είναι κάθετοι στο επίπεδο του σχεδίου. Έστω m_i μια στοιχειώδης μάζα του σώματος. Από τον ορισμό της ροπής αδράνειας έχουμε:

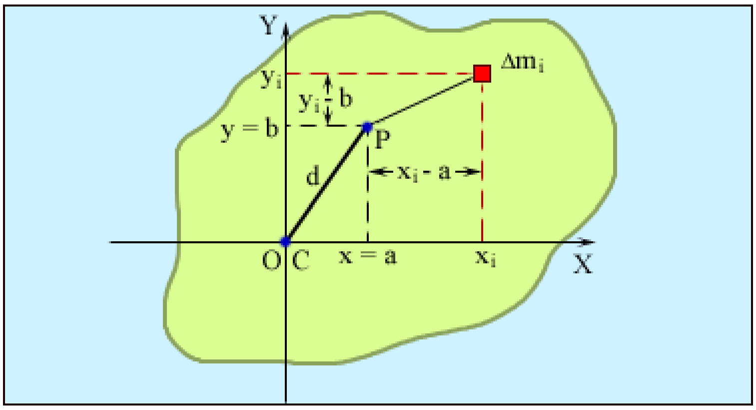
$$I_C = \sum_i m_i.(x_i^2 + y_i^2) \qquad (4.19),$$

$$I_P = \sum_i m_i.[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2] \qquad (4.20).$$

Η έκφραση για το I_P μπορεί να ξαναγραφτεί με τη μορφή:

$$I_C = \sum_i m_i.(x_i^2 + y_i^2) + \sum_i m_i.(a^2 + b^2) - 2.\sum_i m_i.x_i.a - 2.\sum_i m_i.y_i.b \qquad (4.21).$$

Αφού η αρχή των αξόνων συμπίπτει με το κέντρο μάζας C, οι δυο τελευταίοι όροι μηδενίζονται, σύμφωνα με τον ορισμό του κέντρου μάζας, οπότε προκύπτει η εξίσωση (4.18).



Εικ.4.6. Για την απόδειξη του θεωρήματος των παράλληλων αξόνων.

Εφαρμογή- η κύλιση του τροχού σε οριζόντιο επίπεδο

Όταν η γωνιακή μετατόπιση dφ είναι μικρή, η απόλυτη τιμή του διανύσματος $d\vec{s}$ της γραμμικής μετατόπισης μιας συγκεκριμένης μάζας dm του περιστρεφόμενου στερεού σώματος εκφράζεται από τη σχέση:

$$ds = r.\, d\varphi \qquad (4.22),$$

όπου r είναι η απόλυτη τιμή της διανυσματικής ακτίνας $\vec{r}$ (βλέπε εικόνα 4.7). Από αυτό τον ισχυρισμό προκύπτει η σχέση ανάμεσα στις απόλυτες τιμές της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας:

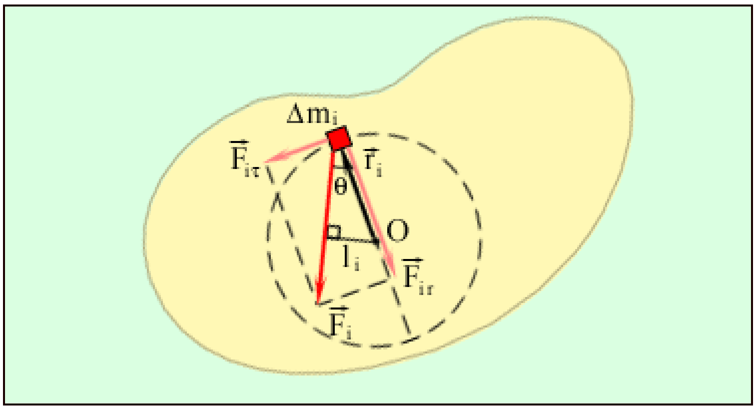
$$\upsilon = \omega.r \qquad (4.23)$$

και ανάμεσα στις απόλυτες τιμές της γραμμικής και της γωνιακής επιτάχυνσης:

$$a_\varepsilon = r.\alpha \qquad (4.24).$$

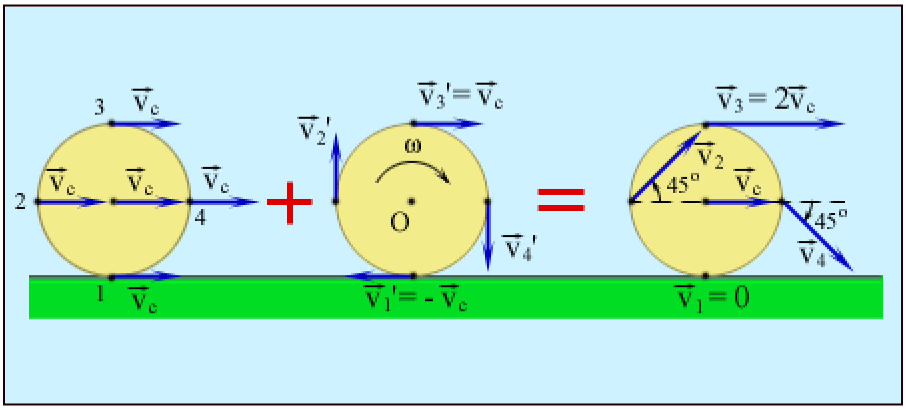
Τα διανύσματα $\vec{\upsilon}$ και $\vec{a}_\varepsilon$ κατευθύνονται κατά μήκος της εφαπτομένης στον κύκλο ακτίνας r. Θα πρέπει να θυμηθούμε ότι σε μια κυκλική κίνηση ενός σώματος υπάρχει και η κεντρομόλος επιτάχυνση, της οποίας η απόλυτη τιμή είναι

$$a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2.r \qquad (4.25).$$



Εικ.4.7. Η εφαπτόμενη $\vec{F}_{i\tau}$ και η ακτινική $\vec{F}_{ir}$ συνιστώσα της δύναμης $\vec{F}_i$, που ασκείται στη στοιχειώδη μάζα m_i ενός στερεού σώματος.

Οποιαδήποτε κίνηση ενός στερεού σώματος μπορεί να αναπαρασταθεί σαν το άθροισμα δύο κινήσεων: μιας μεταφορικής με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του σώματος και μια περιστροφική γύρω από ένα άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας. Ένα παράδειγμα μπορεί να είναι ένας τροχός ο οποίος κυλάει χωρίς να γλιστράει σε μια οριζόντια επιφάνεια (βλέπε εικόνα 4.8). Όταν ο τροχός κυλάει, όλα τα σημεία του κινούνται στα επίπεδα παράλληλα με το επίπεδο της φιγούρας. Μια τέτοια κίνηση ονομάζεται παράλληλη στο επίπεδο.



Εικ. 4.8. Η κύλιση ενός τροχού (3) σαν το άθροισμα μιας μεταφορικής κίνησης (1) με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_C$ και μιας περιστροφικής (2) με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \upsilon_C.R^{-1}$ σε σχέση με τον άξονα O, που περνάει από το κέντρο μάζας.

Οι νόμοι της στροφικής κίνησης

Ισορροπία στερεού σώματος: για να ισορροπεί ένα στερεό σώμα πρέπει και αρκεί

- Η συνισταμένη των ασκούμενων σε αυτό δυνάμεων είναι μηδέν, δηλαδή

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \qquad (4.26).$$

- Η συνισταμένη των ροπών των ασκούμενων δυνάμεων ως προς οποιοδήποτε σημείο Ο είναι μηδέν, δηλαδή

$$\sum_i \vec{\tau}_{Oi} = \vec{0} \qquad (4.27).$$

Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης: η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα ισούται με το στιγμιαίο χρονικό ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος.

$$\sum_i \vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (4.28).$$

Απόδειξη:

2^o μέλος

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i.\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i\right) = \sum_i \left(m_i.\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{\upsilon}_i + m_i.\vec{r}_i \times \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt}\right) = \sum_i \vec{\tau}_i \qquad (4.29).$$

Παρατήρηση: όταν σε ένα στερεό ορισμένης ροπής αδράνειας Ι, επιδρούν οι ροπές των ασκούμενων σε αυτό δυνάμεων το σώμα αποκτά γωνιακή επιτάχυνση ανάλογη της συνισταμένης των ροπών και αντιστρόφως ανάλογη της ροπής αδράνειας Ι.

$$\sum_i \vec{\tau}_i = I.\vec{a} \qquad (4.30).$$

Απόδειξη:

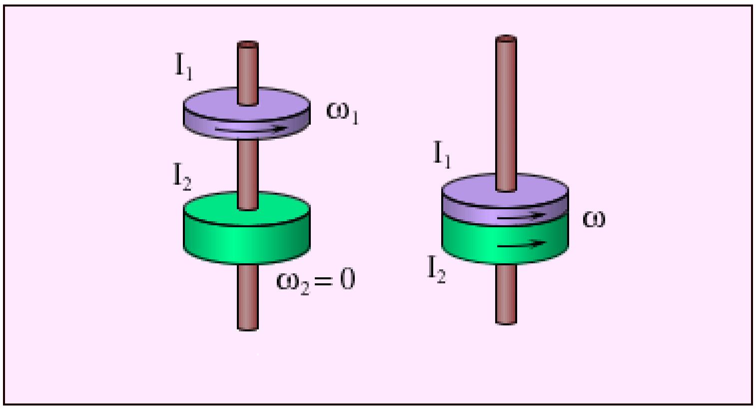
$$(4.16) \Rightarrow d\vec{L} = I.d\vec{\omega} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = I.\frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (4.31).$$

$$(4.10),(4.28),(4.31) \Rightarrow \sum_i \vec{\tau}_i = I.\vec{a} \qquad (4.32).$$

Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής: όταν η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών των ασκούμενων σε ένα σώμα (ή σε ένα σύστημα σωμάτων) δυνάμεων είναι ίση με το μηδέν τότε η ολική στροφορμή του σώματος (ή αντίστοιχα του συστήματος των σωμάτων) διατηρείται σταθερή. Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής ισχύει σε κάθε απομονωμένο σύστημα σωμάτων, όπως για παράδειγμα στην κίνηση των πλανητών σε ελλειπτικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο ($2^{ος}$ Νόμος του Kepler). Μια άλλη χαρακτηριστική εφαρμογή της είναι στην ανελαστική περιστροφική κρούση δύο δίσκων σε κοινό άξονα (βλέπε εικόνα 4.9).

$$\sum_i \vec{\tau}_{\varepsilon\xi i} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L}_{o\lambda} = \text{σταθερή} \qquad (4.33).$$

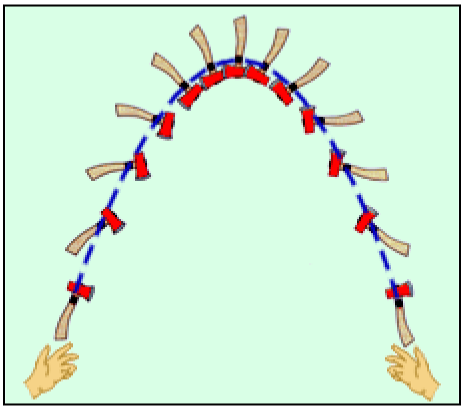
Απόδειξη: η απόδειξη αυτή γίνεται εύκολα ξεκινώντας από το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης (4.28).



Εικ.4.9. Ανελαστική περιστροφική κρούση δύο δίσκων. Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής γράφεται $I_1.\omega_1 = (I_1 + I_2).\omega$.

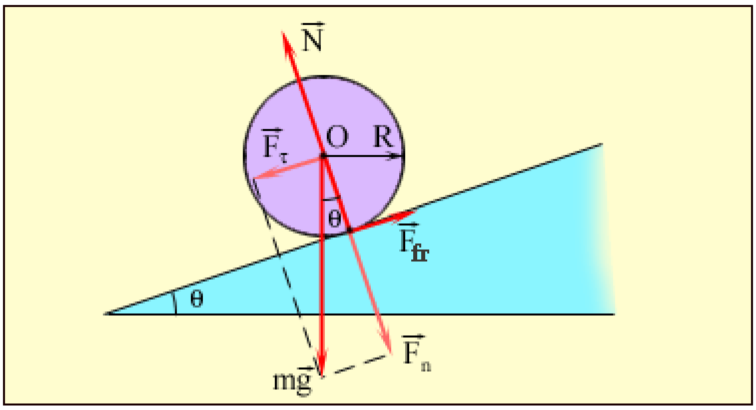
Εφαρμογή- η κύλιση σε κεκλιμένο επίπεδο

Στη μηχανική αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα σχετικά με την κίνηση του κέντρου μάζας στη μηχανική: κάτω από την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων το κέντρο μάζας οποιουδήποτε σώματος ή οποιουδήποτε συστήματος αλληλεπιδρώντων σωμάτων κινείται σαν ένα υλικό σώμα στο οποίο όλη η μάζα του συστήματος είναι συγκεντρωμένη .Μια αναπαράσταση αυτού του ισχυρισμού είναι η εικόνα 4.10, στην οποία φαίνεται η κίνηση του σώματος κάτω από την επίδραση της βαρύτητας. Το κέντρο μάζας κινείται σε μια παραβολική τροχιά σαν υλικό σημείο, ενώ όλα τα άλλα σημεία κινούνται σε πιο περίπλοκες τροχιές.



Εικ.4.10. Η κίνηση ενός στερεού σώματος κάτω από την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας

Η εξίσωση της κίνησης ενός σώματος μπορεί να γραφεί όχι μόνο σε σχέση με ένα σταθερό άξονα ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα, αλλά επίσης σε σχέση με ένα άξονα ο οποίος κινείται με επιτάχυνση. Η βασική εξίσωση της δυναμικής της περιστροφής ενός σώματος δεν αλλάζει μορφή και στην περίπτωση των επιταχυνόμενων αξόνων αν ο άξονας περιστροφής περνάει από το κέντρο μάζας του σώματος και η κατεύθυνση το στο χώρο παραμένει σταθερή. Ένα τέτοιο παράδειγμα μπορεί να είναι η περιστροφή ενός σώματος (ένας δακτύλιος, ένας κύλινδρος, μια μπάλα) σε ένα κεκλιμένο επίπεδο με τριβή (βλέπε εικόνα 4.11).



Εικ.4.11. Κύλιση ενός συμμετρικού σώματος σε ένα κεκλιμένο επίπεδο.

Ο άξονας περιστροφής Ο περνάει από το κέντρο μάζας του σώματος. Η στροφορμή της βαρυτικής δύναμης $m.\vec{g}$ και η δύναμη της αντίδρασης $\vec{N}$ σε σχέση με τον άξονα Ο είναι ίσες με μηδέν. Η στροφορμή $\vec{L}$ παράγεται μόνο από τη δύναμη της τριβής $\vec{F}_{fr}$:

$$L = F_{fr}.R \qquad (4.34).$$

Η εξίσωση της περιστροφικής κίνησης θα είναι:

$$I_C.\ \alpha = I_C.a.R^{-1} = L = F_{fr}.R \qquad (4.35).$$

όπου α είναι η γωνιακή επιτάχυνση του περιστρεφόμενου σώματος, a είναι η γραμμική επιτάχυνση του κέντρου μάζας του και I_C είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Ο, που περνάει από το κέντρο μάζας.

Ο 2ος Νόμος του Newton για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας γράφεται με την παρακάτω μορφή:

$$m.a = m.g.\eta\mu\theta - F_{fr} \qquad (4.36).$$

Απαλείφοντας την F_{fr} από αυτές τις εξισώσεις, παίρνουμε τελικά:

$$a = \frac{m.g.\eta\mu\theta}{\left(\frac{I_c}{R^2} + m\right)} \qquad (4.37).$$

Από αυτή την έκφραση είναι φανερό ότι το σώμα το οποίο έχει μικρότερη ροπή αδράνειας θα κυλήσει γρηγορότερα στο κεκλιμένο. Για παράδειγμα, για μια μπάλα $I_C = 0{,}4.m.R^2$ και για έναν ομοιόμορφο στερεό κύλινδρο $I_C = 0{,}5.m.R^2$. Σαν αποτέλεσμα, μια μπάλα θα κυλήσει γρηγορότερα από τον κύλινδρο.

Έργο και ενέργεια στη στροφική κίνηση

1. ***Έργο δύναμης περιστροφής:***

$$dW_F = \tau.d\theta \qquad (4.38)$$

Απόδειξη:

$$dW_F = \vec{F}.d\vec{r} = F.Rd\theta = \tau.d\theta \qquad (4.39)$$

2. ***<u>Μέση Ισχύς:</u>*** ορίζεται ως το πηλίκο του έργου (ΔW) που παράγεται ή της ενέργειας (ΔΕ) που μετασχηματίζεται προς το αντίστοιχη χρονική διάρκεια (Δt).

$$P_{\mu} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathrm{E}}{\Delta t} \qquad (4.40).$$

Δηλαδή η ισχύς είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο το έργο ή η ενέργεια μεγαλώνουν και όσο μικρότερο είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να παραχθεί έργο ή να μετασχηματιστεί η ενέργεια.

3. ***<u>Στιγμιαία Ισχύς:</u>*** ορίζεται ως ο στιγμιαίος χρονικός ρυθμός μεταβολής του έργου (W) που παράγεται ή της αντίστοιχης ενέργειας (Ε) που μετασχηματίζεται.

$$P = \frac{dW_{\vec{F}}}{dt} = \frac{d\mathrm{E}}{dt} \qquad (4.41).$$

<u>Μονάδα ισχύος στο S.I.:</u> η μονάδες ισχύος είναι το Watt (W). Μία μηχανή έχει ισχύ 1W όταν παράγει έργο 1J σε 1s, δηλαδή ισχύει 1W = 1 J.s^{-1}.

Για τη στιγμιαία ισχύ- στιγμιαίο χρονικό ρυθμό μεταβολής της ενέργειας αποδεικνύεται ότι

$$P = \frac{dW_{\vec{F}}}{dt} = F.\sigma\upsilon\nu\theta.\frac{dr}{dt} = F_x.\upsilon_x + F_y.\upsilon_y + F_z.\upsilon_z \qquad (4.42).$$

4. ***<u>Ισχύς δύναμης περιστροφής</u>*** (P_τ)**:** η ισχύς ορίζεται ως ο χρονικός ρυθμός μεταβολής του έργου της δύναμης περιστροφής. Αν αναφερόμαστε σε στιγμιαίο χρονικό ρυθμό η ισχύς θα λέγεται στιγμιαία ενώ αν αναφερόμαστε σε μέσο χρονικό ρυθμό η ισχύς θα λέγεται μέση. Ισχύει

$$P_\tau = \tau.\ \omega \qquad (4.43)$$

Απόδειξη:

$$dW_F = \tau.d\theta \Rightarrow \frac{dW_F}{dt} = \frac{\tau.d\theta}{dt} \Rightarrow P = \tau.\ \omega \qquad (4.44)$$

5. **Κινητική Ενέργεια λόγω περιστροφής** ($Є_{K(\pi)}$)**:** ένα σώμα έχει κινητική ενέργεια όταν κινείται, δηλαδή όταν έχει ταχύτητα. Η κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος το οποίο περιστρέφεται (γύρω από ένα σταθερό άξονα)

είναι ανάλογη της ροπής αδράνειας (I) του σώματος και ανάλογη του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας του (ω), έχει δε τη μορφή

$$E_{K(\pi)} = \frac{1}{2}.I.\omega^2 \qquad (4.45).$$

Αυτή η εξίσωση μοιάζει με την έκφραση για την κινητική ενέργεια στη μεταφορική κίνηση:

$$E_{K(\mu)} = \frac{1}{2}.m.\upsilon^2 \qquad (4.46),$$

αλλά εδώ εισάγεται στην εξίσωση η ροπή αδράνειας I αντί για τη μάζα m, και η γωνιακή ταχύτητα ω αντί για τη γραμμική ταχύτητα υ.

Απόδειξη:

Ας χωρίσουμε το περιστρεφόμενο σώμα σε στοιχειώδεις μάζες m_i. Οι αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής δηλώνονται με r_i, οι απόλυτες τιμές των γραμμικών ταχυτήτων με υ_i. Τότε η κινητική ενέργεια του περιστρεφόμενου σώματος μπορεί να γραφεί

$$E_{K(\pi)} = \sum_i \left(\frac{1}{2}.m_i.\upsilon_i{}^2 \right) = \frac{1}{2}.\sum_i \left(m_i.r_i{}^2.\omega^2 \right) = \frac{1}{2}.I.\omega^2 \qquad (4.47).$$

Παρατήρηση: σε μια κίνηση παράλληλη στο επίπεδο η κινητική ενέργεια του κινούμενου στερεού σώματος είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας της μεταφορικής κίνησης και της κινητικής ενέργειας της περιστροφής γύρω από τον άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του σώματος, κάθετο στα επίπεδα στα οποία κινούνται όλα τα σημεία του σώματος:

$$E_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}.m.\upsilon^2 + \frac{1}{2}.I.\omega^2 \qquad (4.48).$$

όπου m είναι η συνολική μάζα του σώματος, I η ροπή αδράνειας του σώματος σε σχέση με τον άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του.

6. **Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας στη Στροφική Κίνηση:** το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος λόγω περιστροφής, δηλαδή

$$\sum_i W_{\tau i} = \frac{1}{2}.I.\omega^2 - \frac{1}{2}.I.\omega_0^2 \qquad (4.49).$$

Σύγκριση μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης

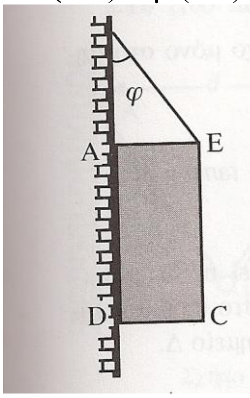
Απομάκρυνση ($\vec{r}$)	Γωνιακή θέση ($\vec{\varphi}$)
Γραμμική ταχύτητα: $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα: $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Γραμμική επιτάχυνση: $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	Γωνιακή επιτάχυνση: $\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$
Μάζα (m)	Ροπή αδράνειας: $I = \sum_i m_i.r_i^2$
Γραμμική ορμή: $\vec{p} = m.\vec{\upsilon}$	Στροφορμή: $\vec{L} = I.\vec{\omega}$
Δύναμη ($\vec{F}$)	Ροπή: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
Κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης: $E_{K(\mu)} = \frac{m.\upsilon^2}{2}$	Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης: $E_{K(\pi)} = \frac{I.\omega^2}{2}$
Θεμελιώδης Νόμος της Δυναμικής ($2^{ος}$ Νόμος του Newton): $\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = m.\vec{a}$	Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης: $\sum_i \vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \sum_i \vec{\tau}_i = I.\vec{a}$
Αρχή Διατήρησης της Γραμμικής Ορμής ($3^{ος}$ Νόμος του Newton): $\sum_i \vec{F}_{\varepsilon\xi i} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{o\lambda} =$ σταθερή	Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής: $\sum_i \vec{\tau}_{\varepsilon\xi i} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L}_{o\lambda} =$ σταθερή

Ασκήσεις

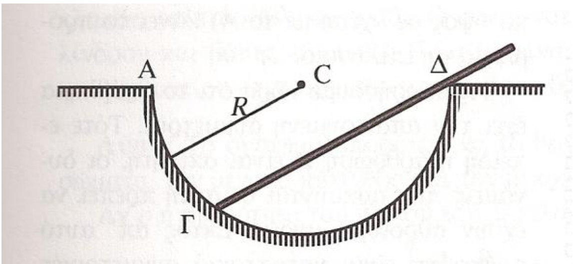
Ισορροπία στερεών σωμάτων

1. Λεπτός ομογενής δίσκος ακτίνας R έχει κυκλική οπή ακτίνας r της οποίας το κέντρο απέχει L από το κέντρο του δίσκου. Υπολογίστε τη θέση του κέντρου μάζας του σώματος αυτού.

2. Ένα τούβλο είναι δεμένο με σχοινί, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και ισορροπεί. Αν ξέρετε το συντελεστή τριβής μεταξύ τούβλου και τοίχου και ότι (AD) > μ.(AE) υπολογίστε τη γωνία φ μεταξύ τοίχου και σχοινιού.



3. Ομογενής ράβδος μήκους L και βάρους B ισορροπεί σε λείο ημισφαιρικό δοχείο ακτίνας R (R <L.2^{-1} < 2.R) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Υπολογίστε τη δύναμη που ασκεί το δοχείο στη ράβδο στο σημείο Δ.



4. Δυο πανομοιότυπες ράβδοι μήκους L και μάζας είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους και με τα τοιχώματα δυο παράλληλων κατακόρυφων τοίχων με αρθρώσεις. Προσδιορίστε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε ράβδο.

5. Αυτοκίνητο μάζας m = 1 tn κινείται με σταθερή ταχύτητα ανεβαίνοντας κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης φ = 12^0. Να βρεθούν οι δυνάμεις που ασκεί το επίπεδο στους εμπρός και στους πίσω τροχούς, αν είναι γνωστό πως η απόσταση μεταξύ των τροχών είναι L = 2,5 m και το κέντρο μάζας βρίσκεται σε ίσες αποστάσεις από τους άξονες των τροχών και σε ύψος h = 0,75 m.Θεωρείστε ότι έχουμε κίνηση στους πίσω τροχούς και επομένως σε αυτούς ασκείται δύναμη τριβής (ολίσθησης).

6. Έχουμε το άτομο του υδρογόνου που αποτελείται από ένα πρωτόνιο μάζας M και από ένα ηλεκτρόνιο μάζας m. Αν θεωρήσουμε ότι η απόσταση πρωτονίου-ηλεκτρονίου είναι σταθερή και ίση με r και ότι το ηλεκτρόνιο περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος με γωνιακή ταχύτητα ω, να υπολογιστεί η ολική στροφορμή του ατόμου στο C-σύστημα (σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας).Διερευνήστε την περίπτωση $\frac{M}{m} \to +\infty$.

Περιστροφικές και μεταφορικές κινήσεις στερεών σωμάτων

1. Ράβδος μάζας M και μήκους L βρίσκεται σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Μάζα m με ταχύτητα υ_0 χτυπά κάθετα τη ράβδο και καρφώνεται σε αυτήν σε απόσταση d από το κέντρο μάζας της C.

   - Ποιες ποσότητες διατηρούνται κατά την κρούση;
   - Υπολογίστε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος μετά την κρούση.
   - Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος αμέσως μετά την κρούση.
   - Πόση πρέπει να είναι η απόσταση d ώστε αμέσως μετά την κρούση το σημείο A της ράβδου να μην κινηθεί;

Δίνεται η ροπή αδρανείας της ράβδου μήκους L ως προς άξονα περιστροφής κάθετο σε αυτήν που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $(I = m.L^2/12)$ και ότι η σφαίρα έχει αμελητέες διαστάσεις.

2. Ράβδος μάζας m κρέμεται οριζόντια από δυο νήματα A και B του ίδιου μήκους που είναι δεμένα στα άκρα της. Κόβουμε το νήμα A. Υπολογίστε την επιτάχυνση του σημείου A της ράβδου και την τάση του νήματος B αμέσως μετά .Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η ροπή αδρανείας της ράβδου μήκους L ως προς άξονα περιστροφής κάθετο σε αυτήν που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $(I = m.L^2.12^{-1})$.

3. Δυο μάζες m_1 και m_2 $(m_1 < m_2)$ είναι συνδεδεμένες με λεπτό αβαρές μη εκτατό νήμα και κρέμονται από μια κυλινδρική τροχαλία ακτίνας R και μάζας M. Θεωρούμε ότι το σύστημα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία. Υπολογίστε την επιτάχυνση της μάζας m_2 όταν το σύστημα αφεθεί ελεύθερο (η συσκευή αυτή λέγεται μηχανή του Atwood). Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η ροπή αδρανείας του κυλίνδρου ως προς κατακόρυφο άξονα περιστροφής $(I = m.R^2/2)$.

4. Ένας άνθρωπος με μάζα m που τρέχει με ταχύτητα υ πηδά και κάθεται στο εσωτερικό ακίνητου τροχού που έχει ακτίνα και ροπή αδράνειας I. Υπολογίστε πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη ταχύτητα του ανθρώπου ώστε αυτός να φτάσει στο ψηλότερο σημείο του τροχού. Οι τριβές στον άξονα περιστροφής του τροχού θεωρούνται αμελητέες. Δίνεται η βαρυτική επιτάχυνση g.

5. Κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R, στον οποίο δίνουμε γωνιακή ταχύτητα ω_0, τοποθετείται χωρίς αρχική γραμμική ταχύτητα σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ επιπέδου και κυλίνδρου είναι μ. σε πόσο χρόνο ο κύλινδρος θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει; Εξετάστε τις περιπτώσεις $\mu \rightarrow +\infty$ και $\mu \rightarrow 0$. Να γίνουν επίσης οι γραφικές παραστάσεις της γραμμικής ταχύτητας υ_C του κέντρου μάζας και της γωνιακής ταχύτητας ω του κυλίνδρου συναρτήσει του χρόνου.

6. Μπάλα μπιλιάρδου μάζας m και ακτίνας R ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής μ. Χτυπάμε τη μπάλα σε ύψος h από κέντρο μάζας της προσφέροντας ορμή p. Υπολογίστε σε πόσο χρόνο θα αρχίσει να κυλίεται. Δίνεται η ροπή αδρανείας της σφαίρας $I = 2.m.R^2/5$ και η βαρυτική επιτάχυνση g.

7. Σε κύλινδρο με μάζα M και ακτίνα R είναι τυλιγμένο λεπτό, αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου κρέμεται μάζα m. Υπολογίστε τη γραμμική επιτάχυνση της μάζας m, τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου και την τάση του νήματος. Θεωρήστε ότι ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η ροπή αδρανείας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του ($I = 0{,}5.m.R^2$).

8. Μια σφαίρα ένας κύλινδρος και ένας δακτύλιος που έχουν την ίδια μάζα m και την ίδια ακτίνα R αφήνονται χωρίς αρχική ταχύτητα στο ίδιο σημείο κεκλιμένου επιπέδου. Αν θεωρήσουμε ότι και τα τρία σώματα κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν, βρείτε τη σειρά με την οποία θα φτάσουν στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Δίνονται οι ροπές αδράνειας της σφαίρας ($I = 2.m.R^2/5$) και του κυλίνδρου ($I = 0{,}5.m.R^2$) καθώς και ότι όλη η μάζα του δακτυλίου είναι συγκεντρωμένη σε ακτίνα ίση με R.

9. Ομογενής κύλινδρος με μάζα m και ακτίνα R κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα ω_0.Κάποια στιγμή φτάνει στη βάση κεκλιμένου επιπέδου που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο και αρχίζει να ανεβαίνει. Αν υποθέσουμε ότι σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει υπολογίστε

- Το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει στο ανώτερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου.
- Τη δύναμη τριβής κατά την άνοδο.
- Τη δύναμη τριβής κατά την κάθοδο.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής ($I = 0{,}5.m.R^2$).

10. Δύο κύλινδροι Α και Β, ο ένας κοίλος και ο άλλος συμπαγής αφήνονται ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος h ενός κεκλιμένου επιπέδου. Να βρεθεί ο λόγος των ταχυτήτων με τις οποίες φτάνουν στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και ο λόγος των χρόνων κίνησής τους. Δίνονται η ροπή αδράνειας του συμπαγούς κυλίνδρου $I = 0{,}5.m.R^2$ και ότι οι κύλινδροι έχουν την ίδια μάζα και την ίδια ακτίνα .

11. Μια σφαίρα που έχει μάζα και ακτίνα αφήνεται να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα από την κορυφή της εσωτερικής επιφάνειας ενός κοίλου ημισφαιρίου. Να υπολογιστεί η αντίδραση που ασκεί η επιφάνεια στο σημείο Α που σχηματίζει με την κατακόρυφη διεύθυνση γωνία 60^0. Δίνεται ροπή αδράνειας της σφαίρας $I = 0{,}4.m.R^2$ και η βαρυτική επιτάχυνση g.

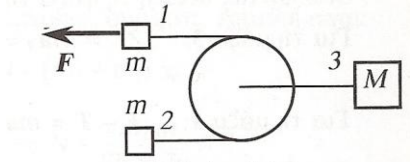
Γυμνάσιο- Λ. Τ. Λαιμού Πρεσπών
Λαιμός Πρεσπών, Φλώρινα
Τηλ. 2385051330, 2385051395

12. Ένας κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R αφήνεται ελεύθερος σε ένα σημείο κεκλιμένου επιπέδου που βρίσκεται σε ύψος $h = (10.3^{-1})$ m. Η γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\varphi = 30^0$. Αν ο κύλινδρος κυλά χωρίς να ολισθαίνει, να βρεθούν:

- Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του, όταν φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.
- Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του, όταν φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ m/s^2 και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα Κ ($I = 0{,}5m.R^2$).

13. Οι γνωστές μάζες του παρακάτω σχήματος βρίσκονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό ενώ η τροχαλία έχει αμελητέα μάζα. Στη μάζα m_1 ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη F. Αν θεωρήσετε ότι κατά την κίνηση του συστήματος τα νήματα παραμένουν παράλληλα υπολογίστε τις επιταχύνσεις των μαζών.



Σχήμα 8.6

14. Ομογενής ράβδος μήκους l = 2 m και μάζας m = 4 kg μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Στο άλλο άκρο της είναι στερεωμένο σώμα μάζας m = 4 kg. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί κατακόρυφα με τη μάζα προς τα κάτω.

- Ποιο ελάχιστο έργο θα δαπανήσουμε για να εκτρέψουμε τη ράβδο κατά γωνία $\theta = \pi/3$ από τη θέση ισορροπίας;
- Αν αφήσουμε ύστερα τη ράβδο ελεύθερη με ποια γωνιακή ταχύτητα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας;

Δίνεται η ροπή αδρανείας της ράβδου $I = m.l^2.3^{-1}$ και η βαρυτική επιτάχυνση $g = 10$ m.s^{-2}.

15. Δυο μάζες m_1 και m_2 είναι συνδεδεμένες με λεπτό αβαρές μη εκτατό νήμα και κρέμονται από μια τροχαλία αμελητέας μάζας. Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Υπολογίστε την επιτάχυνση και την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.