

Δυναμική των ρευστών Στοιχεία θεωρίας

1. Ρευστά σε ισορροπία

Πίεση, p : Ορίζεται ως το πηλίκο του μέτρου της δύναμης dF που ασκείται κάθετα σε μια επιφάνεια εμβαδού dA προς το εμβαδόν αυτό.

$$p = \frac{dF}{dA}$$

Η πίεση στο SI μετριέται σε Pascal (Pa). $1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$.

Τεχνική μονάδα: η $1\text{atm}=1,013\cdot 10^5\text{Pa}$

Αν η δύναμη που ασκείται σε μια επιφάνεια σχηματίζει γωνία θ με την κάθετο στην επιφάνεια, τότε για τον υπολογισμό της πίεσης χρησιμοποιούμε την κάθετη συνιστώσα της δύναμης και έχουμε:

$$p = \frac{dF_{\kappa}}{dA} = \frac{dF \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{dA}$$

Η πίεση που ασκείται σε διάφορα σημεία του χώρου που καταλαμβάνει ένα υγρό αλλά και στα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει μπορεί να οφείλεται σε εξωτερικό αίτιο ή στο βάρος του υγρού ή και στα δύο μαζί.

Υδροστατική πίεση, p : Είναι η πίεση που οφείλεται στο βάρος του ακίνητου υγρού και έχει νόημα μόνο όταν το υγρό βρίσκεται μέσα στο πεδίο βαρύτητας.

$$p = \rho gh$$

ρ , η πυκνότητα του υγρού, h το βάθος πάνω κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

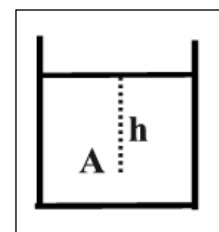
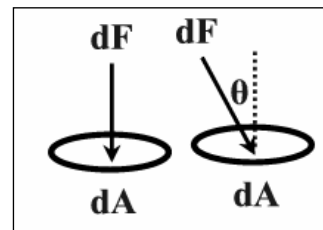
Ατμοσφαιρική πίεση: Είναι η πίεση της ατμόσφαιρας της Γης, η πίεση στη βάση του αέριου όγκου μέσα στον οποίο ζούμε. Η μέση τιμή της στην επιφάνεια της θάλασσας υπό κανονικές συνθήκες είναι $p_{\text{ατμ}}=1,013\cdot 10^5\text{Pa}=1\text{atm}$.

Η αρχή του Pascal: Η πίεση που ασκείται σε ένα ρευστό από κάποιο εξωτερικό αίτιο μεταδίδεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του ρευστού και στα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει.

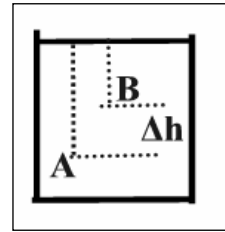
Η ολική (απόλυτη) πίεση: Είναι το άθροισμα της ατμοσφαιρικής και τη υδροστατικής πίεσης σε βάθος h ενός ακίνητου υγρού που βρίσκεται σε ανοικτό δοχείο μέσα στο πεδίο βαρύτητας.

$$p_{\text{ολ}} = p_{\text{ατμ}} + \rho gh$$

- Σύμφωνα με την αρχή του Pascal η ατμοσφαιρική πίεση ως εξωτερικό αίτιο μεταδίδεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του ρευστού.
- Η πίεση που δέχεται μια επιφάνεια που βρίσκεται στο βάθος ενός υγρού δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας.
- Η υδροστατική πίεση στον πυθμένα ενός δοχείου δεν εξαρτάται από το σχήμα του δοχείου ή από την ποσότητα του υγρού που περιέχει.



Θεμελιώδης αρχή της υδροστατικής: Το δοχείο περιέχει υγρό πυκνότητας ρ που ηρεμεί εντός πεδίου βαρύτητας g . Τα σημεία A και B βρίσκονται σε βάθος h_1 και h_2 αντιστοίχως. Η διαφορά πίεσης μεταξύ των A και B είναι:



$$p_A - p_B = (p_{atm} + \rho g h_1) - (p_{atm} + \rho g h_2) \rightarrow p_A - p_B = \rho g (h_1 - h_2) \text{ ή } \Delta p = \rho g \Delta h$$

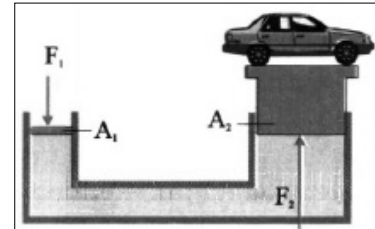
Η διαφορά των ολικών πιέσεων μεταξύ των σημείων A και B εξαρτάται μόνο από τη μεταξύ τους κατακόρυφη απόσταση και το είδος του υγρού και είναι ανεξάρτητη από το βάθος στο οποίο βρίσκονται.

Το υδραυλικό πιεστήριο: Επειδή οι πιέσεις στα δύο έμβολα μεταφέρονται οι ίδιες σύμφωνα με την αρχή του Pascal, ισχύει

$$p_1 = p_2 \rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

Οι δυνάμεις είναι ανάλογες με τα εμβαδά. Δηλαδή στο μεγαλύτερο εμβαδόν μεταφέρεται και μεγαλύτερη δύναμη.

Για τα έργα που κάνουν οι δυνάμεις F_1 και F_2 ισχύει $W_1 = W_2$.

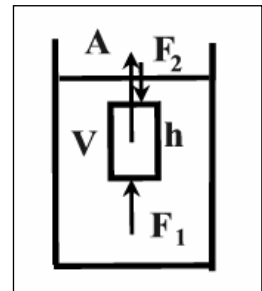


Άνωση: Όταν ένα σώμα είναι βυθισμένο ολόκληρο ή κατά ένα μέρος μέσα σε ρευστό τότε το ρευστό εξασκεί στο σώμα μια δύναμη κατακόρυφη προς τα πάνω ίση με το βάρος του ρευστού που εκτοπίζει το σώμα.

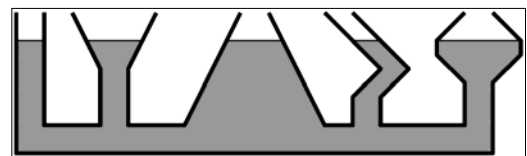
$$A = \rho \cdot g \cdot V$$

Όπου ρ η πυκνότητα του υγρού, και V ο βυθισμένος όγκος του σώματος.

Αν η κάτω βάση του σώματος βρίσκεται σε βάθος h_1 δέχεται από το ρευστό δύναμη $F_1 = p_1 A = \rho g h_1 A$. Η πάνω βάση αντιστοίχως, βρίσκεται σε μικρότερο βάθος h_2 και δέχεται δύναμη $F_2 = p_2 A = \rho g h_2 A$. Η άνωση είναι η συνισταμένη αυτών των δύο αντίθετων δυνάμεων, και έχει φορά προς τα πάνω, άρα: $A = F_1 - F_2 = \rho g A (h_1 - h_2) = \rho g V$.



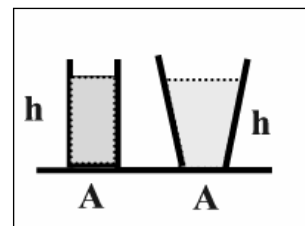
Αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων: Ισχύει για υγρά που ισορροπούν και όχι για υγρά που ρέουν και λέει ότι « εάν μια ποσότητα υγρού ισορροπεί μέσα σε δοχεία που συγκοινωνούν μεταξύ τους, τότε η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού σε κάθε δοχείο θα βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο».



Δύναμη στο πυθμένα του δοχείου: Η δύναμη που δέχεται ο πυθμένας εμβαδού, A , ενός δοχείου και οφείλεται στην απόλυτη υδροστατική πίεση ισούται με:

$$F = pA = (p_{atm} + \rho g h)A$$

Το μέτρο της δύναμης δεν εξαρτάται από το σχήμα του δοχείου ή την ποσότητα του υγρού που περιέχει. (υδροστατικό παράδοξο).



2. Ρευστά σε κίνηση

Ιδανικό ρευστό: Είναι το ρευστό που θεωρείται ασυμπίεστο και δεν παρουσιάζει εσωτερικές τριβές (μεταξύ των μορίων του) και τριβές με τα τοιχώματα του δοχείου.

Ασυμπίεστα ρευστά: Θεωρούνται τα ρευστά που έχουν σταθερό όγκο και σταθερή πυκνότητα ανεξάρτητα από την εξωτερική πίεση που τους ασκείται. Τα υγρά θεωρούνται ασυμπίεστα, τα αέρια όχι.

Στρωτή ροή: Η ροή που δε παρουσιάζει στροβίλους. Τα γειτονικά στρώματα του υγρού ρέουν απαλά μεταξύ τους. Στη στρωτή ροή η ταχύτητα των μορίων του υγρού σε ένα σημείο του χώρου παραμένει σταθερή.

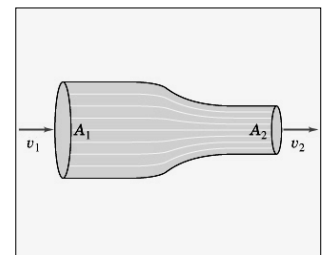
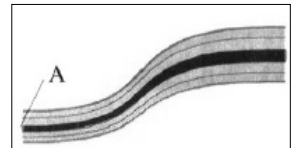
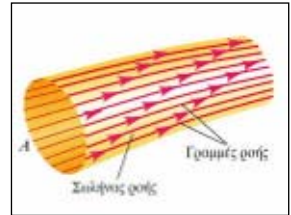
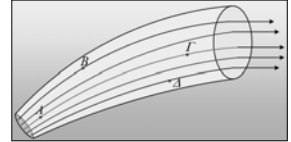
Ρευματική γραμμή (ή γραμμή ροής): Είναι η τροχιά ενός σωματίου του υγρού σε κίνηση. Σε κάθε σημείο μιας ρευματικής γραμμής είναι εφαπτόμενη η διεύθυνση της ταχύτητας του ρευστού στο σημείο αυτό.

Φλέβα ή σωλήνας ροής ή ρευματικός σωλήνας: Είναι το σύνολο των ρευματικών γραμμών που περνάνε μέσα από μια φανταστική στοιχειώδη επιφάνεια.

Παροχή (όγκου), Π : Ορίζεται ως το πηλίκο του όγκου του ρευστού ΔV που περνάει μέσα από μια διατομή του σωλήνα ροής σε χρόνο Δt , προς το χρόνο αυτό.

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$
$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A \cdot \Delta x}{\Delta t} = A v \rightarrow$$

$$\Pi = A \cdot v$$



Η παροχή μιας φλέβας ισούται με το γινόμενο του εμβαδού διατομής της φλέβας επί την ταχύτητα του ρευστού στη θέση αυτή. Μετριέται σε m^3/s στο SI.

Εξίσωση συνέχειας: Σε μια στρωτή ροή ενός ασυμπίεστου υγρού που ρέει σε σωλήνα μεταβλητής διατομής, ισχύει:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

• Είναι συνέπεια της αρχής διατήρησης της ύλης, και δείχνει ότι η παροχή όγκου μέσα από ένα σωλήνα μεταβλητής διατομής είναι σταθερή. Διότι:

$$dm_1 = dm_2 \rightarrow \rho dV_1 = \rho dV_2 \rightarrow A_1 dx_1 = A_2 dx_2 \rightarrow A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt \rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Παροχή μάζας, dm/dt : Ο ρυθμός της διερχόμενης μάζας (kg/s) από μια διατομή ενός σωλήνα:

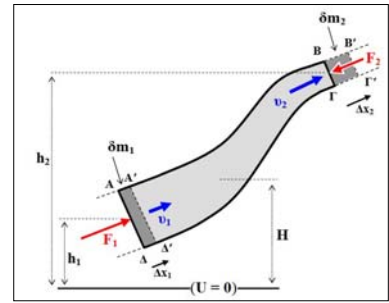
$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} \rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho \cdot \Pi$$

Εξίσωση Bernoulli: Κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής το άθροισμα της πίεσης p , της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ($\frac{1}{2}\rho v^2$) και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου (ρgy) διατηρείται σταθερό.

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gy = \text{σταθερό}$$

$$\text{ή } p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2$$

(p) η στατική πίεση, ($\frac{1}{2}\rho v^2$) η δυναμική πίεση και (ρgh) η υψομετρική πίεση.



Είναι συνέπεια της **αρχής διατήρησης της ενέργειας**.

Η εξίσωση του Bernoulli συσχετίζει την πίεση, την ταχύτητα ροής και το ύψος κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής.

Απόδειξη: Αν γράψουμε το ΘΜΚΕ για μια στοιχειώδη μάζα, dm , όγκου dV που μετακινείται μέσα στο ρευστό και δέχεται τη συνισταμένη δύναμη $F=F_1-F_2$ που οφείλεται στη διαφορά πίεσης p_1-p_2 και την ωθεί προς τα πάνω και τη δύναμη του βάρους, $dm \cdot g$. Το συνολικό έργο ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας:

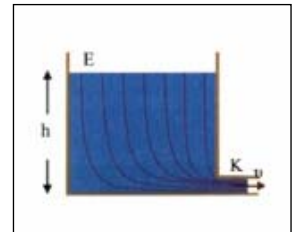
$$W_F + W_\beta = \Delta K \rightarrow \frac{dW_F}{dV} + \frac{dW_\beta}{dV} = \frac{dK}{dV} \rightarrow \frac{(F_1 - F_2)dy}{dV} - \frac{dm \cdot g \cdot dy}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dm}{dV} (v_2^2 - v_1^2) \rightarrow$$

$$p_1 - p_2 - \rho g(h_2 - h_1) = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} \rightarrow p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2$$

• Αν ο σωλήνας είναι **οριζόντιος** η εξίσωση γράφεται: $p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{σταθερό}$.

Όπου οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν και η ταχύτητα αυξάνεται, η πίεση μειώνεται.

Το Θεώρημα του Torricelli: Δίνει την ταχύτητα εκροής υγρού από οπή που βρίσκεται σε βάθος h κάτω από την επιφάνεια του ρευστού με δεδομένα ότι το υγρό στην επιφάνεια του δοχείου είναι σχεδόν ακίνητο ($v_E=0$) και τόσο η επιφάνεια, E όσο και το σημείο εκροής, K βρίσκονται υπό την ίδια ατμοσφαιρική πίεση, $p_E=p_K=p_{atm}$.



Αν γράψουμε το νόμο του Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής από το E έως το K με στάθμη δυναμικής ενέργειας, $U_K=0$ τότε έχουμε:

$$p_E + \rho gh = p_K + \frac{\rho v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

• Η ταχύτητα αυτή είναι ίση με την ταχύτητα που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από το ίδιο ύψος h .

• Αν στο σημείο E η πίεση είναι μεγαλύτερη της ατμοσφαιρικής του σημείου K κατά $\Delta p = p_E - p_K$, τότε η ταχύτητα εκροής γίνεται:

$$p_E + \rho gh = p_K + \frac{\rho v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho} + gh}$$

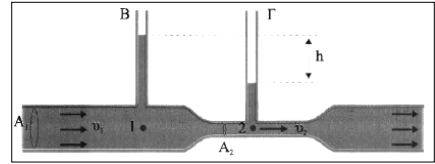
• Αν οι διατομές του σωλήνα στο E , είναι A_1 και της οπής στο K , A_2 και είναι συγκρίσιμες τότε

$$\text{ισχύει } A_1 v_E = A_2 v_K \quad (1). \text{ Από το νόμο του Bernoulli έχουμε: } p_E + \rho gh + \frac{\rho v_E^2}{2} = p_K + \frac{\rho v_K^2}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) υπολογίζουμε την ταχύτητα εκροής v_K .

Ροόμετρο Ventouri: Είναι διάταξη με την οποία μετράμε την ταχύτητα ροής σε ένα σωλήνα.

Αν είναι γνωστά τα εμβαδά διατομής A_1 και A_2 και η υψομετρική διαφορά $h_1-h_2=h$ μεταξύ των δύο σταθμών των σωλήνων Β και Γ τότε με τη βοήθεια της εξίσωσης Bernoulli και της εξίσωσης της συνέχειας μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ροής σε κάποιο σημείο. Από τις εξισώσεις:

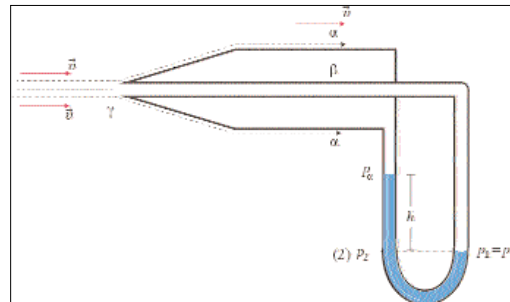


$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (1) \quad p_1 - p_2 = (\rho_{atm} + \rho g h_1) - (\rho_{atm} + \rho g h_2) = \rho g h \quad (2) \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (3)$$

έχουμε:
$$v_1 = \sqrt{\frac{2ghA_2^2}{A_1^2 - A_2^2}}$$

Ο σωλήνας Pitot: Ο σωλήνας Pitot είναι μια συσκευή με την οποία μετράμε την ταχύτητα

του αέρα. Τοποθετείται έτσι ώστε το άνοιγμα (σημείο γ) να είναι παράλληλο με το ρεύμα του αέρα. Στο σημείο (α) υπάρχουν ανοίγματα και το σημείο (β) είναι μακριά από το σημείο (γ). Με αυτόν τον τρόπο στο (α) αποκαθίσταται η κανονική ροή του αέρα που διαταράχτηκε στο σημείο (γ) λόγω πυκνωμάτων. Έτσι στο (α) έχουμε την κανονική ταχύτητα του αέρα. Στο σημείο (β) η ταχύτητα του αέρα είναι σχεδόν μηδενική.



Γράφουμε το νόμο Bernoulli μεταξύ των σημείων (α) και (β) για μια ρευματική γραμμή του αέρα πυκνότητας ρ_α που διασχίζει εξωτερικά τη διαδρομή αβ.

$$p_\alpha + \frac{1}{2}\rho_\alpha v^2 = p_\beta + 0 \quad (1)$$

Στο υγρό του μανομέτρου (πυκνότητας $\rho_{υγ}$) ισχύει

$$p_1 = p_2 \quad (2)$$

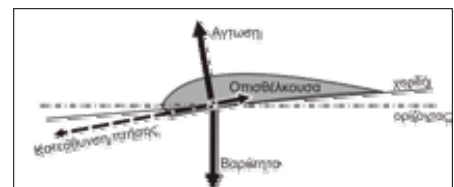
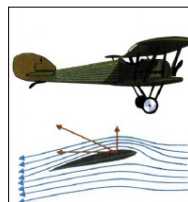
όπου $p_1 = p_\beta \quad (3)$ και $p_2 = p_\alpha + \rho_{υγ}gh \rightarrow p_\alpha = p_2 - \rho_{υγ}gh \quad (4)$

$$\text{Από (1)(3)(4)} \rightarrow p_2 - \rho_{υγ}gh + \frac{1}{2}\rho_\alpha v^2 = p_1 \rightarrow \frac{1}{2}\rho_\alpha v^2 = \rho_{υγ}gh \rightarrow v = \sqrt{\frac{2\rho_{υγ}gh}{\rho_\alpha}}$$

Με γνωστά τα ρ_α , $\rho_{υγ}$ και την υψομετρική διαφορά h του μανομέτρου υπολογίζουμε την ταχύτητα του αέρα

Η δυναμική άνωση: Είναι η κάθετη στην ταχύτητα του αεροπλάνου συνιστώσα της

αεροδύναμης, που δέχεται η πτέρυγα αυτού καθώς πετά. Οι πτέρυγες είναι ειδικά σχεδιασμένες ώστε οι ρευματικές γραμμές του αέρα να πυκνώνουν στο επάνω μέρος της πτέρυγας και να αραιώνουν στο κάτω. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της ταχύτητας του ανέμου στο επάνω μέρος άρα και τη μείωση της πίεσης σε σχέση με αυτή που επικρατεί στο κάτω μέρος. Η διαφορά πίεσης γεννά την αεροδύναμη. Η δυναμική άνωση εξαρτάται από το σχήμα και το εμβαδόν της επιφάνειας της πτέρυγας, την πυκνότητα του αέρα, την ταχύτητα του αεροπλάνου σε σχέση με τον αέρα και τη γωνία που σχηματίζει η πτέρυγα με

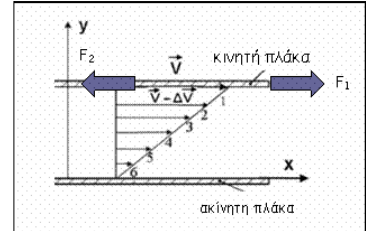


το οριζόντιο επίπεδο. Αν η δυναμική άωση είναι μεγαλύτερη από το βάρος το αεροπλάνο ανυψώνεται.

3. Η τριβή στα ρευστά

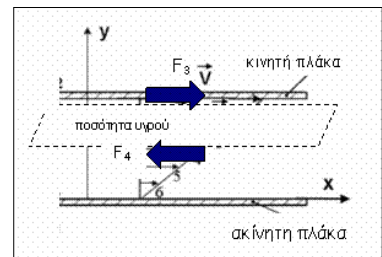
Ιξώδες: Είναι μια ιδιότητα που ισοδυναμεί με την εμφάνιση εσωτερικής τριβής στα ρευστά. Χαρακτηρίζει την αντίσταση του υγρού στις παραμορφώσεις κατά τη σχετική μετατόπιση των διαφόρων ρευστών στρώσεων μεταξύ τους.

Δύο πλάκες εμβαδού A τοποθετούνται οριζόντια και παράλληλα και ανάμεσά τους βάζουμε μέλι σε πάχος L . Η κάτω πλάκα είναι σταθερή. Ο πειραματιστής ασκεί τη δύναμη F_1 παράλληλα στην πάνω πλάκα ώστε αυτή να μετακινείται με σταθερή ταχύτητα, V , (βλέπε σχήμα).



Το ανώτατο στρώμα που εφάπτεται στην πλάκα κινείται με την ταχύτητα V που έχει η ίδια η πλάκα, ενώ το κατώτατο στρώμα παραμένει ακίνητο. Οι διαμοριακές δυνάμεις συνοχής που αναπτύσσονται ανάμεσα στα επιμέρους στρώματα του ρευστού εκδηλώνονται ως δυνάμεις τριβής ανάμεσά τους.

Οι διαμοριακές δυνάμεις σνάφειας αναγκάζουν τα ακρότατα στρώματα, το κάτω και το επάνω, να παραμένουν προσκολλημένα στην ακίνητη και στην κινούμενη πλάκα αντίστοιχα. Τα ενδιάμεσα στρώμα γλιστρούν το ένα ως προς το άλλο με τις αντίστοιχες τριβές τους, με αποτέλεσμα στο ρευστό να αναπτύσσεται ένα προφίλ ταχυτήτων με τιμή ταχύτητα που αυξάνεται βαθμιδωτά ως προς τον άξονα y .



Ταυτόχρονα ασκείται στην πλάκα αντίθετη δύναμη F_2 από το πάνω μέρος του ρευστού που εφάπτεται σ' αυτήν. Επειδή η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα είναι $|F_1|=|F_2|$. Το πάνω στρώμα του μελιού δέχεται από την πλάκα τη δύναμη F_3 δηλαδή την αντίδραση της F_2 και άρα, $|F_3|=|F_2|$. Όμως αν δεχθούμε ότι το στρώμα του μελιού κινείται και αυτό με την ίδια σταθερή ταχύτητα, πρέπει να δέχεται από ένα άλλο στρώμα που βρίσκεται από κάτω του την αντίθετη δύναμη F_4 . Άρα $|F_4|=|F_3|$. Η δύναμη της εσωτερικής τριβής είναι η F_4 . Μετρώντας ο πειραματιστής της δύναμη F_1 καταλήγει στο συμπέρασμα ότι

$$F_1=F_2=F_3=F_4=F=\eta \cdot A \cdot \frac{v}{L}$$

Όπου η είναι ο συντελεστής ιξώδους και μετριέται στο SI, σε $N \cdot s/m^2$ ή $Pa \cdot s$. Στην πράξη μετριέται σε poise. $1 \text{ poise} = 0,1 N \cdot s/m^2$. Χαρακτηρίζει το κάθε ρευστό αλλά εξαρτάται και από τη θερμοκρασία.

•Το ιξώδες των υγρών μειώνεται όταν η θερμοκρασία αυξάνεται. Αντιθέτως των αερίων αυξάνεται με την άνοδο της θερμοκρασίας.

Για νερό σε θερμοκρασία $20^0 C$ η τιμή του είναι $10^{-3} Pa \cdot s$, για το ελαιόλαδο $80 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$, για το μηχανόλαδο $0,3 Pa \cdot s$, για το μέλι $20 Pa \cdot s$, για τα διάφορα σιρόπια από $10 Pa \cdot s$ έως $100 Pa \cdot s$, για το ρετσίνι του πεύκου η τιμή είναι πάρα πολύ μεγάλη, γύρω στα $2,3 \cdot 10^8 Pa \cdot s$

Νευτώνεια υγρά: Τα υγρά που υπακούουν στη γραμμική σχέση μεταξύ δύναμης F και ταχύτητας, v , δηλαδή στην εξίσωση, $F=\eta \cdot A \cdot v/L$.