ΡΕΥΣΤΑ

άσκηση 1 (Σχολικό Βιβλίο του Δρη)

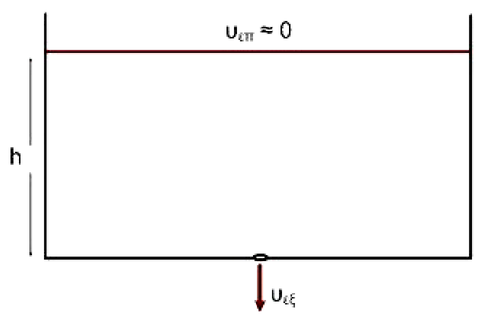
Η παροχή του καταρράκτη του Νιαγάρα είναι 8000 m^3 / s και η χωρητικότητα της τεχνητής λίμνης του Μαραθώνα $44 \cdot 10^6$ m^3 .
Υπολογίστε το χρόνο που απαιτείται ώστε τα νερά του Νιαγάρα να γεμίσουν την λίμνη του Μαραθώνα .

Λύση

Η παροχή του καταρράκτη του Νιαγάρα Π_N ορίζεται :
$\Pi_N = \Delta V / \Delta t$.
Ο όγκος της λίμνης του Μαραθώνα είναι V_M , άρα η μεταβολή του όγκου :
$\Delta V = V_M - 0$.
Δηλαδή :
$\Pi_N = \Delta V / \Delta t \Rightarrow \Delta t = \Delta V / \Pi_N \Rightarrow \Delta t = (V_M - 0) / \Pi_N \Rightarrow$
$\Delta t = V_M / \Pi_N \Rightarrow \Delta t = 44 \cdot 10^6 / (8 \cdot 10^3) \Rightarrow$
$\Delta t = 5{,}5 \cdot 10^3\ s \cong 1{,}528\ h$.

άσκηση 2 (Σχολικό Βιβλίο του Δρη)

Στον πυθμένα βαρελιού είναι ανοιγμένη μια οπή από την οποία ρέει κρασί με ταχύτητα 6,0 m / s .

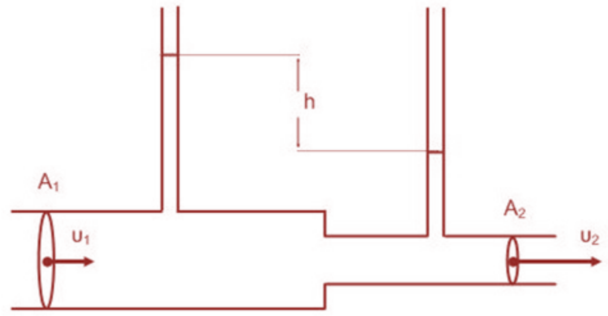


Αν η ελεύθερη επιφάνεια του κρασιού κατέρχεται με σχεδόν μηδενική ταχύτητα ποιο είναι το ύψος του βαρελιού ;
Δίνεται $g = 10\ m / s^2$.

Λύση

Από το θεώρημα του Torricelli :
$υ_{εξ} = \sqrt{(2 \cdot g \cdot h)} \Rightarrow υ_{εξ}^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow h = υ_{εξ}^2 / (2 \cdot g) \Rightarrow$
$h = 6^2 / (2 \cdot 10) \Rightarrow h = 36 / 20 \Rightarrow h = 18 / 10 \Rightarrow$
$h = 1{,}8\ m$.

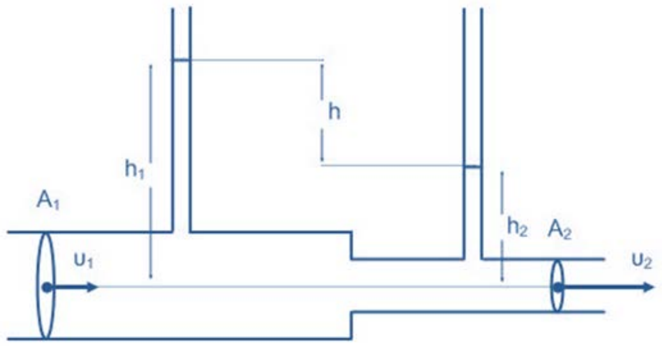
άσκηση 3 Σχολικό Βιβλίο του Δρη



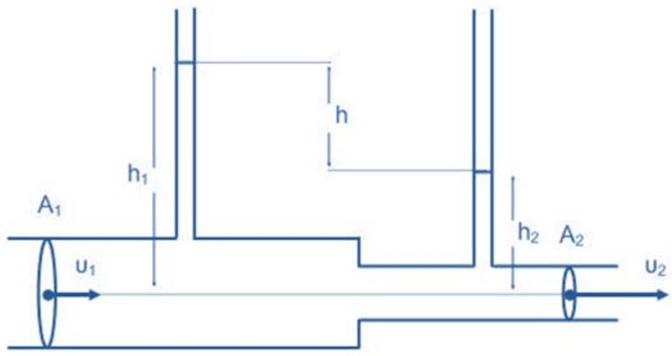
Στο σωλήνα του σχήματος ρέει πετρέλαιο . Αν ο λόγος των διατομών είναι $A_1 / A_2 = 5$ και το ύψος $h = 15\ cm$, να βρεθεί η ταχύτητα του υγρού στη διατομή A_1 .
Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m / s^2$.

Λύση

Ισχύει η εξίσωση της συνέχειας :
$A_1 \cdot υ_1 = A_2 \cdot υ_2 \Rightarrow υ_2 = (A_1 / A_2) \cdot υ_1 \Rightarrow υ_2 = 5 \cdot υ_1$ ... (Ι) .
Ισχύει :
$P_1 = P_{at} + ρ \cdot g \cdot h_1$,
$P_2 = P_{at} + ρ \cdot g \cdot h_2$,
από το σχήμα :
$h = h_1 – h_2$.



Εξίσωση του Bernoulli :
$P_1 + ½ \cdot ρ \cdot υ_1^2 = P_2 + ½ \cdot ρ \cdot υ_2^2 \Rightarrow$
με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων ,
$P_{at} + ρ \cdot g \cdot h_1 + ½ \cdot ρ \cdot υ_1^2 = P_{at} + ρ \cdot g \cdot h_2 + ½ \cdot ρ \cdot υ_2^2 \Rightarrow$
$ρ \cdot g \cdot h_1 + ½ \cdot ρ \cdot υ_1^2 = ρ \cdot g \cdot h_2 + ½ \cdot ρ \cdot υ_2^2 \Rightarrow$
$ρ \cdot g \cdot h_1 – ρ \cdot g \cdot h_2 = ½ \cdot ρ \cdot υ_2^2 – ½ \cdot ρ \cdot υ_1^2 \Rightarrow$
$ρ \cdot g \cdot (h_1 – h_2) = ½ \cdot ρ \cdot (υ_2^2 – υ_1^2) \Rightarrow$
από το σχήμα $h = h_1 – h_2$,
$g \cdot h = ½ \cdot (υ_2^2 – υ_1^2) \Rightarrow$
από τη σχέση (Ι) ,
$g \cdot h = ½ \cdot [(5 \cdot υ_1)^2 – υ_1^2] \Rightarrow$
$g \cdot h = ½ \cdot 24 \cdot υ_1^2 \Rightarrow υ_1 = \sqrt{(g \cdot h / 12)} \Rightarrow υ_1 = \sqrt{2} / 4\ m / s \Rightarrow$
$υ_1 = 0{,}35\ m / s$.

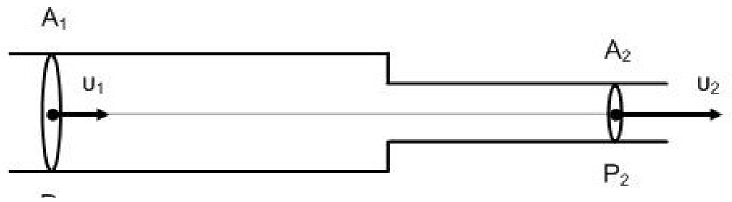


άσκηση 4 Σχολικό Βιβλίο του Δρη

Οριζόντιος σωλήνας διαρρέεται από νερό . Σε δύο περιοχές του σωλήνα οι διατομές είναι 0,20 m² και 0,050 m² αντίστοιχα .
Αν η ταχύτητα στην πρώτη διατομή είναι 5 m / s και η πίεση στη δεύτερη $2{,}0\cdot10^5$ N / m² , να βρείτε :
α. *Την ταχύτητα του υγρού στη δεύτερη διατομή ,*
β. *Την πίεση στην πρώτη διατομή .*
Η πυκνότητα του νερού είναι $1{,}0\cdot10^3$ kg / m³ .

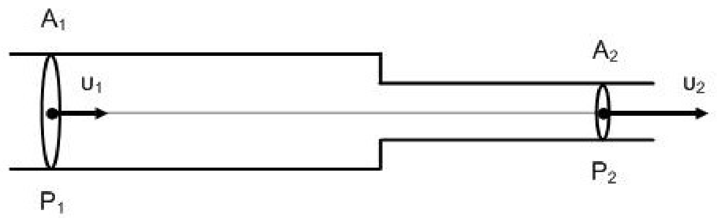
Λύση
Δίνονται :
$A_1 = 0{,}2$ m² , $A_2 = 0{,}05$ m² άρα , $A_1 / A_2 = 4$.

α. *Η εξίσωση της συνέχειας :*



$A_1\cdot\upsilon_1 = A_2\cdot\upsilon_2 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = (A_1 / A_2)\cdot\upsilon_1 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = 4\cdot\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2 = 4\cdot5 \Rightarrow$
$\boldsymbol{\upsilon_2 = 20\ m / s}$ **.**

β. *Εξίσωση του Bernoulli :*



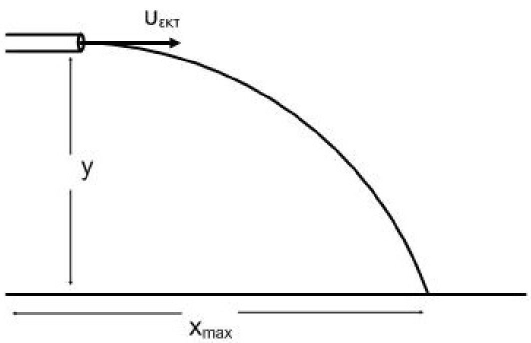
$P_1 + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2 = P_2 + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 \Rightarrow$
$P_1 = P_2 + ½\cdot\rho\cdot(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \Rightarrow$
ισχύει $\upsilon_2 = 4\cdot\upsilon_1$,
$P_1 = P_2 + ½\cdot\rho\cdot[(4\cdot\upsilon_1)^2 - \upsilon_1^2] \Rightarrow$
$P_1 = P_2 + ½\cdot\rho\cdot15\cdot\upsilon_1^2 \Rightarrow$
$P_1 = 2\cdot10^5 + ½\cdot1\cdot10^3\cdot15\cdot5^2 \Rightarrow$
$P_1 = 3{,}875\cdot10^5$ N / m² $\Rightarrow \boldsymbol{P_1 \cong 3{,}9\cdot10^5\ N / m^2}$.

άσκηση 5 Σχολικό Βιβλίο του Δρη

Η οπή εκτόξευσης του νερού ενός νεροπίστολου είναι 1,0 mm² και το εμβαδόν του εμβόλου που πιέζει το νερό 75 mm² .
Η εταιρεία κατασκευής απαιτεί γι' αυτό το νερό που εκτοξεύεται , όταν ένα παιδί χειρίζεται το παιχνίδι , και εκτοξεύεται οριζόντια κατά 3,5 m , ενώ η κατακόρυφη απόκλιση του να είναι μικρότερη από 1,0 m .
Αν ένα παιδί μπορεί να ασκήσει δύναμη περίπου 10 N , έχει τις προδιαγραφές της εταιρείας το νεροπίστολο ;
Η πυκνότητα του νερού είναι $1{,}0\cdot10^3$ kg·m³ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 9,8 m / s² .

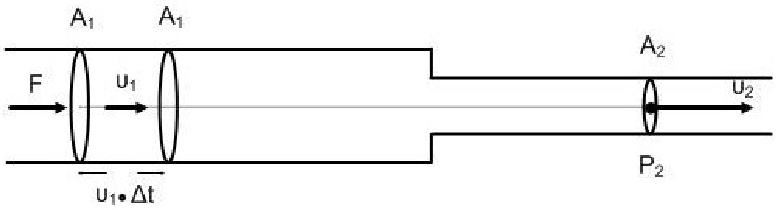
Λύση

1ος τρόπος λύσης
Προδιαγραφές : $x_{max} = 3{,}5$ m *με* $y = 1$ m .
Γενικά :



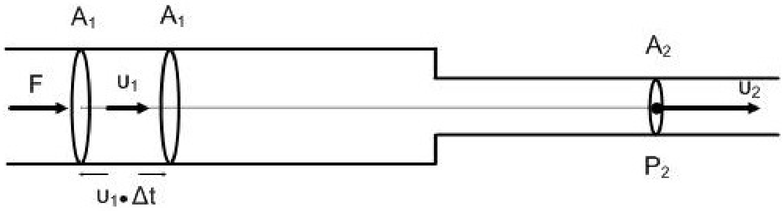
$y = ½\cdot g\cdot t^2$,
$x = \upsilon\cdot t \Rightarrow t = x / \upsilon$, *άρα :*
$y = [g / (2\cdot\upsilon^2)]\cdot x^2 \Rightarrow$
$\upsilon^2 = [g / (2\cdot y)]\cdot x^2$, *επομένως :*
$\upsilon_{εκ} = x_{max}\cdot\sqrt{[g / (2\cdot y)]} \cong 7{,}75$ m / s .

Θεωρούμε ότι το έμβολο υπό την επίδραση της F μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα υ_1 για Δt . Επομένως η F παράγει έργο :
$W_F = F\cdot\upsilon_1\cdot\Delta t$ … (I) .
Τότε η μάζα του ρευστού $\Delta m = \rho\cdot A_1\cdot\upsilon_1\cdot\Delta t$ … (II) *, μεταβάλλει την κινητική της ενέργεια κατά :*
$\Delta K = \frac{1}{2}\cdot\Delta m\cdot(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$,



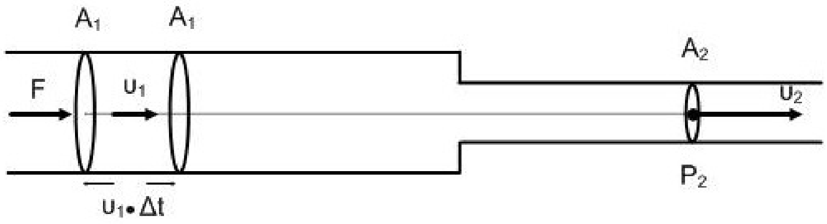
από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ,
$\Delta K = W_F$ *, άρα ,*
$\frac{1}{2}\cdot\Delta m\cdot(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) = W_F \Rightarrow$
από τις σχέσεις (I) και (II) ,
$\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot A_1\cdot\upsilon_1\cdot\Delta t\cdot(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) = F\cdot\upsilon_1\cdot\Delta t \Rightarrow \rho\cdot A_1\cdot(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) = 2\cdot F \Rightarrow \rho\cdot A_1\cdot\upsilon_2^2\cdot[1 - (\upsilon_1 / \upsilon_2)^2] = 2\cdot F$.
εξίσωση συνέχειας : $A_1\cdot\upsilon_1 = A_2\cdot\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 / \upsilon_2 = A_2 / A_1$.
Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις :
$\rho\cdot A_1\cdot\upsilon_2^2\cdot[1 - (A_2 / A_1)^2] = 2\cdot F \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{2\cdot F / [\rho\cdot A_1\cdot(1 - (A_2 / A_1)^2)]} \Rightarrow$
$\mathbf{\upsilon_2 \cong 16{,}33\ m / s > \upsilon_{\varepsilon\kappa\tau}}$ *άρα ικανοποιούνται οι προδιαγραφές .*

2ος τρόπος λύσης



Θα μπορούσαμε να δεχτούμε ότι υπό την επίδραση της F το έμβολο με διατομή A_1 έχει αποκτήσει ταχύτητα υ_1 άρα και το ρευστό . Τότε στην διατομή A_2 το ρευστό θα έχει ταχύτητα υ_2 . Επομένως , από την εξίσωση συνέχειας :
$A_1\cdot\upsilon_1 = A_2\cdot\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 / \upsilon_2 = A_2 / A_1$.
Το έργο της σταθερής δύναμης F θα είναι $W = F\cdot\Delta x$ *το οποίο μεταβάλλει την κινητική ενέργεια της μάζας* $\Delta m = \rho\cdot A_1\cdot\Delta x$ *κατά* $\Delta K = \frac{1}{2}\cdot\Delta m\cdot(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$,
άρα $F\cdot\Delta x = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot A_1\cdot\Delta x\cdot(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \Rightarrow \upsilon_2^2 - \upsilon_1^2 = 2\cdot F / (\rho\cdot A_1) \Rightarrow$
$\upsilon_2^2\cdot[1 - (\upsilon_1 / \upsilon_2)^2] = 2\cdot F / (\rho\cdot A_1) \Rightarrow$
$\upsilon_2 = \sqrt{2\cdot F / [\rho\cdot A_1\cdot(1 - (A_2 / A_1)^2)]}$ *, καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα .*

3ος τρόπος λύσης
Εξίσωση του Bernoulli :
$P_1 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2$
$\Rightarrow P_{at} + (F / A_1) + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2$
$= P_{at} + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 \Rightarrow$
$F / A_1 = (l / 2)\cdot(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \Rightarrow$
$2\cdot F / (\rho\cdot A_1) = \upsilon_2^2\cdot[1 - (\upsilon_1 / \upsilon_2)^2] \Rightarrow$

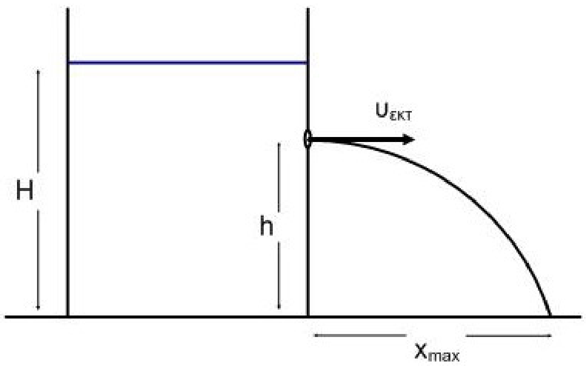


εξίσωση της συνέχειας : $A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 / \upsilon_2 = A_2 / A_1$,
$\upsilon_2 = \sqrt{\{2 \cdot F / [\rho \cdot A_1 \cdot (1 - (A_2 / A_1)^2)]\}}$ *, καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα .*

άσκηση 6 Σχολικό Βιβλίο του Δρη

Δοχείο είναι γεμάτο νερό μέχρι ύψους Η και βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι .
Βρείτε σε ποιο ύψος από το τραπέζι , πρέπει να ανοίξουμε μικρή τρύπα στο δοχείο , ώστε το νερό που θα εκτοξευθεί να πέσει στην μέγιστη δυνατή απόσταση πάνω στο τραπέζι .
Πόση είναι αυτή η μέγιστη απόσταση ;

Λύση



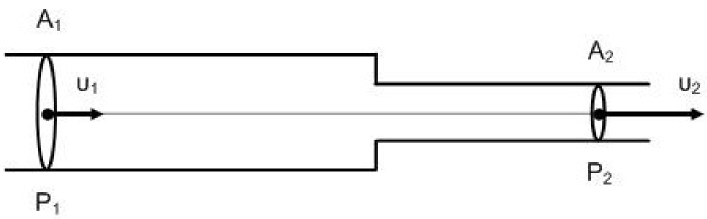
Ισχύει :
$x = \upsilon_{\varepsilon\kappa} \cdot \Delta t$,
$h = ½ \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{(2 \cdot h / g)}$,
θεώρημα Torricelli : $\upsilon_{\varepsilon\kappa} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)}$,
από τις παραπάνω σχέσεις :
$x^2 = 2 \cdot g \cdot (H - h) \cdot (2 \cdot h / g) \Rightarrow$
$x^2 = 4 \cdot H \cdot h - 4 \cdot h^2 \Rightarrow 4 \cdot h^2 - 4 \cdot H \cdot h + x^2 = 0$.
Πρέπει η διακρίνουσα $\Delta' \geq 0 \Rightarrow$
$4 \cdot h^2 - 4 \cdot x^2 \geq 0 \Rightarrow x \leq H \Rightarrow$ $\mathbf{x_{max} = H}$ **.**
Τότε :
$\Delta' = 0$ *και*
$h = 4 \cdot H / 8 \Rightarrow$ $\mathbf{h = H / 2}$.

άσκηση 8 Σχολικό Βιβλίο του Δρη

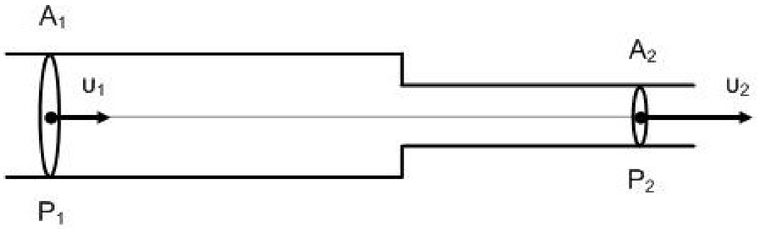
Ένα βεντουρίμετρο έχει διάμετρο σωλήνα 30 cm και διάμετρο λαιμού 15 cm .
Αν οι πιέσεις στο σωλήνα και στη στένωση είναι αντίστοιχα $4{,}0 \cdot 10^4$ *Pa και* $3{,}0 \cdot 10^4$ *Pa , να υπολογιστεί η παροχή του νερού στο σωλήνα .*
Η πυκνότητα του νερού είναι $1{,}0 \cdot 10^3$ *kg / m³ και* $\pi \cong 3{,}14$ *.*

Λύση

Δίνονται $P_1 = 4 \cdot 10^4\ N / m^2$, $P_2 = 3 \cdot 10^4\ N / m^2$ *και* $\rho = \rho_\nu = 10^3\ kg / m^3$.
Ακόμα $\Delta_1 = 30$ cm , $\Delta_2 = 15$ cm *, άρα :*
$\Delta_1 / \Delta_2 = 30 \cdot 10^{-2} / (15 \cdot 10^{-2}) \Rightarrow \Delta_1 / \Delta_2 = 2$.
Άρα $A_1 / A_2 = \Delta_1^2 / \Delta_2^2 \Rightarrow A_1 / A_2 = 4$.



Εξίσωση συνέχειας :
$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow A_1 / A_2 = \upsilon_2 / \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2 / \upsilon_1 = 4$ … (I) .
Εξίσωση Bernoulli :
$P_1 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow P_1 - P_2 = ½ \cdot \rho \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \Rightarrow$
$P_1 - P_2 = ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 \cdot [(\upsilon_2^2 / \upsilon_1^2) - 1]$ … (II) .



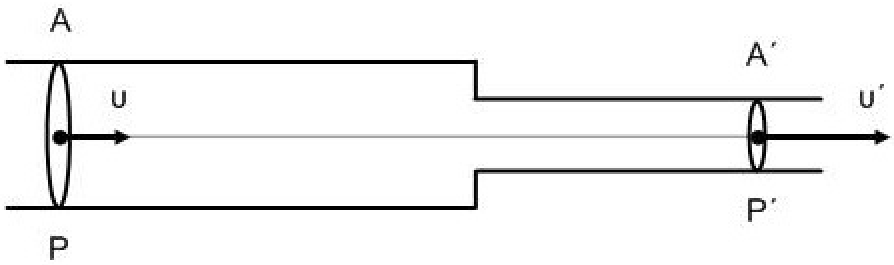
Η εξίσωση (ΙΙ) με την βοήθεια της εξίσωσης (Ι) :
$P_1 - P_2 = ½·ρ·υ_1^2·(4^2 - 1) \Rightarrow P_1 - P_2 = ½·ρ·υ_1^2·15 \Rightarrow υ_1 = \sqrt{(P_1 - P_2) / (7{,}5·ρ)} \Rightarrow$
$υ_1 = 2·\sqrt{3} / 3$ m / s .
Άρα
$Π = A_1·υ_1 = (π·Δ_1^2 / 4)·υ_1 = (π·9·10^{-2} / 4)·(2·\sqrt{3} / 3)\ m^3 / s \Rightarrow$
$Π = 1{,}5·\sqrt{3}·π·10^{-2}\ m^3 / s \Rightarrow 0{,}081\ m^3 / s$.

άσκηση 9 Σχολικό Βιβλίο του Δρη

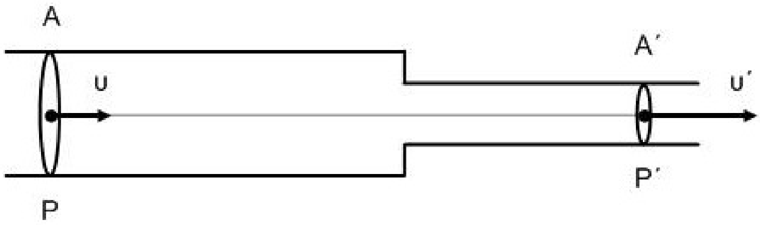
Η ένδειξη του μανομέτρου του σχήματος είναι $1{,}75·10^5$ Pa . Αν οι διατομές των σωλήνων Α και Α΄ έχουν σχέση Α = 6·Α΄ , υπολογίστε τις ταχύτητες υ και υ΄ , ώστε η πίεση στη διατομή Α΄ να είναι μηδέν .
(Το φαινόμενο στην Α΄ είναι γνωστό ως σπηλαίωση και παρατηρείται εξάτμιση του νερού και δημιουργία φυσαλίδων σε εκείνη τη θέση , που αγνοούμε κατά την ανάλυση μας) .
Η πυκνότητα του νερού είναι 10^3 kg / m³ .

Λύση

Δίνονται : Α = 6·Α΄ , Ρ = $1{,}75·10^5$ Pa , Ρ΄ = 0 και ρ = 10^3 kg / m³ .



Η εξίσωση της συνέχειας :
$A·υ = A΄·υ΄ \Rightarrow 6·A΄·υ = A΄·υ΄ \Rightarrow υ΄ = 6·υ$ … (Ι) .
Η εξίσωση του Bernoulli :



$P + ½·ρ·υ^2 = P΄ + ½·ρ·υ΄^2 \Rightarrow$
δίνεται Ρ΄ = 0 , από την σχέση (Ι) ,
$P + ½·ρ·υ^2 = ½·ρ·(6·υ)^2 \Rightarrow P = ½·ρ·36·υ^2 - ½·ρ·υ^2 \Rightarrow P = (35 / 2)·ρ·υ^2 \Rightarrow$
$υ^2 = 2·P / (35·ρ) \Rightarrow υ = \sqrt{2·P / (35·ρ)} \Rightarrow$

$\upsilon = \sqrt{10}\ m / s = 3{,}16\ m / s$.

Από την σχέση (Ι) :

$\upsilon' = 6\cdot\upsilon \Rightarrow \upsilon' = 6\cdot\sqrt{10}\ m / s \Rightarrow \upsilon' = 19\ m / s$.

άσκηση 10 Σχολικό Βιβλίο του Δρη

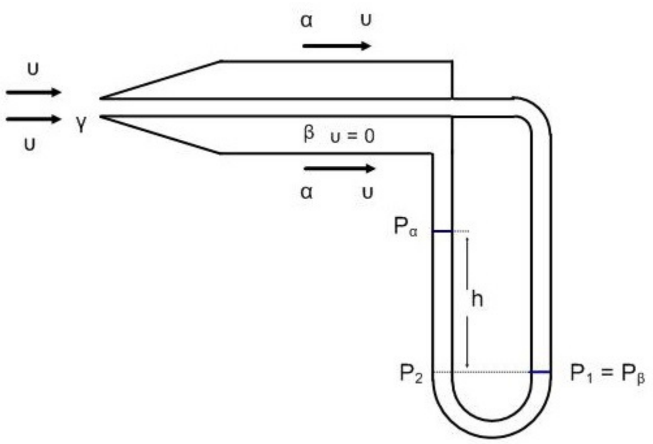
Ένας σωλήνας Pitot στερεώνεται σε φτερό αεροπλάνου . Το υγρό που χρησιμοποιείται είναι αλκοόλη και η ένδειξη είναι 26,5 cm .

Να υπολογιστεί η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι km / h .

Η πυκνότητα της αλκοόλης είναι $0{,}8\cdot10^3$ kg / m³ και του αέρα 1,30 kg / m³ . Δίνεται επίσης $g = 9{,}80\ m / s^2$.

Λύση

Δίνονται $h = 26{,}5\cdot10^{-2}$ m , $\rho' = 0{,}8\cdot10^3$ kg / m³ , $\rho = 1{,}3$ kg / m³ και $g = 9{,}8\ m / s^2$.



Εξίσωση του Bernoulli στα α , β :

$P_\alpha + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon^2 = P_\beta + 0$ … (Ι) .

Στο μανόμετρο , ισχύει :

$P_1 = P_2 \Rightarrow P_\beta = P_\alpha + \rho'\cdot g\cdot h$ … (ΙΙ) .

Από τις σχέσεις (Ι) και (ΙΙ) :

$P_\alpha + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon^2 = P_\alpha + \rho'\cdot g\cdot h \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon^2 = \rho'\cdot g\cdot h \Rightarrow \upsilon^2 = (2\cdot\rho'\cdot g\cdot h / \rho) \Rightarrow$

$\upsilon = \sqrt{(2\cdot\rho'\cdot g\cdot h / \rho)} \Rightarrow \upsilon = 56{,}54\ m / s \Rightarrow$

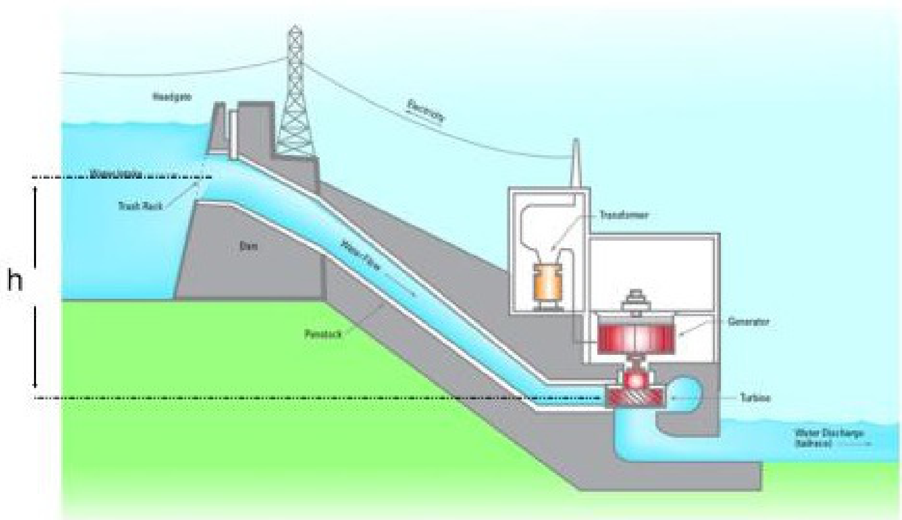
$\upsilon = 203{,}54\ km / h$.

άσκηση 11 Σχολικό Βιβλίο του Δρη

Υδατόπτωση δημιουργείται από τεχνητή λίμνη .

Αν h = 100 m και η παροχή της υδατόπτωσης είναι 200 m³ / s , να υπολογισθεί η ισχύς της υδατόπτωσης .

Να θεωρήσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m / s^2$ και την πυκνότητα του νερού 10^3 kg / m³ .



Λύση

Δίνεται h = 100 m , η παροχή της υδατόπτωσης $\Pi = 200\ m^3 / s$, $\rho = 10^3\ kg / m^3$ και $g = 10\ m / s^2$.

Η ισχύς ορίζεται :

$P = \Delta W / \Delta t \Rightarrow$

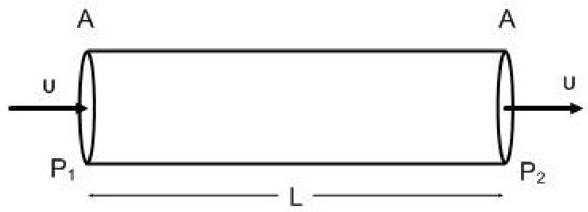
$P = \Delta m\cdot g\cdot h / \Delta t \Rightarrow$

$P = \rho \cdot (\Delta V / \Delta t) \cdot g \cdot h \Rightarrow$
$P = \rho \cdot \Pi \cdot g \cdot h \Rightarrow$
$P = 2 \cdot 10^8$ Watt (ή J / s) .

άσκηση 12(Σχολικό Βιβλίο του Δρη)

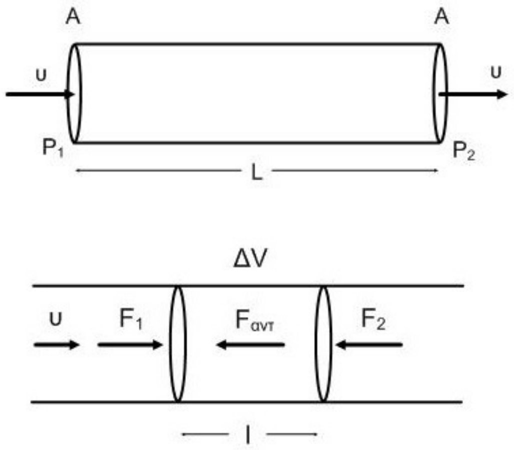
Σε ένα οριζόντιο αγωγό πετρελαίου η πίεση μειώνεται κατά $5{,}0 \cdot 10^3$ N / m² κάθε χιλιόμετρο αγωγού .

Υπολογίστε τις απώλειες ενέργειας για κάθε m³ πετρελαίου , καθώς προχωράει απόσταση 1,0 m .



Λύση

Για L = 1 km , η $P_1 - P_2 = 5 \cdot 10^3$ N / m² ,
για l = 1 m , η $\Delta P = -5$ N / m² .



Εξίσωση του Bernoulli :
$P + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon^2 + \rho \cdot g \cdot h =$ σταθερό .
Ο σωλήνας είναι οριζόντιος με σταθερή διατομή άρα h = σταθερό και υ = σταθερή , οπότε αν δεν είχαμε απώλειες θα έπρεπε η P = σταθερή κατά μήκος του .
Η μείωση της πίεσης οφείλεται στις απώλειες ενέργειας λόγω του ιξώδους του πετρελαίου και εκφράζει την απώλεια ενέργειας ανά μονάδα όγκου .

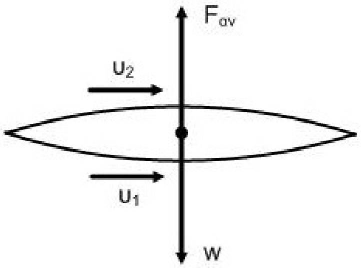
Έστω όγκος ΔV που πέρασε από μια διατομή και σε χρόνο Δt προχώρησε :
$l = \upsilon \cdot \Delta t = 1$ m (από την εκφώνηση) .
Τότε $\Delta P = -5$ N / m² .
Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας :
$\Sigma W = \Delta K = 0 \Rightarrow W_{\pi\rho o\sigma} - |W_{\alpha\pi\omega\lambda}| = 0 \Rightarrow$
$(F_1 - F_2) \cdot l = |W_{\alpha\pi\omega\lambda}| \Rightarrow |\Delta P| \cdot A = |W_{\alpha\pi\omega\lambda}| \Rightarrow$
$|W_{\alpha\pi\omega\lambda}| = |\Delta P| \cdot \Delta V \Rightarrow |W_{\alpha\pi\omega\lambda}| = 5 \cdot 1$ J $\Rightarrow$
$\boldsymbol{|W_{\alpha\pi\omega\lambda}| = 5}$ **J .**

άσκηση 13 Σχολικό Βιβλίο του Δρη

Τα φτερά ενός αεροπλάνου έχουν συνολικό εμβαδόν 20 m² (από τη μία πλευρά) .
Σε μια πτήση του αεροπλάνου , η ταχύτητα του αέρα στην κάτω μεριά των φτερών μετρήθηκε και βρέθηκε 40 m / s , ενώ στην πάνω 50 m / s .
Να υπολογιστεί το βάρος του αεροπλάνου .
Η πυκνότητα του αέρα είναι 1,3 kg / m³ .

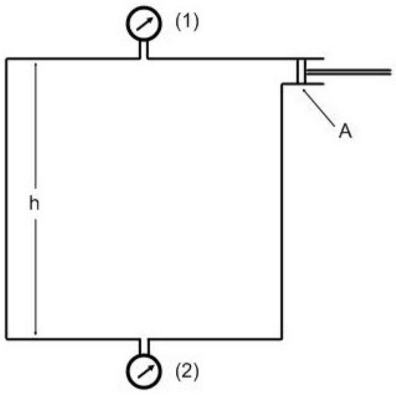
Λύση

Για ταχύτητα $\upsilon_1 = 40\ m/s$, η πίεση είναι P_1.
Για ταχύτητα $\upsilon_2 = 50\ m/s$, η πίεση είναι P_2, όπου $P_2 < P_1$.
Άρα $\Delta P = P_1 - P_2$, οπότε :
$F_{\alpha\nu} = \Delta P \cdot A$, όπου $A = 20\ m^2$.
Η εξίσωση του Bernoulli, για $\Delta y = 0$:
$P_1 + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2 = P_2 + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 \Rightarrow$
$P_1 - P_2 = ½\cdot\rho\cdot(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$.
Λόγω της ισορροπίας :
$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\alpha\nu} - w_{\alpha\varepsilon\rho} = 0 \Rightarrow w_{\alpha\varepsilon\rho} = F_{\alpha\nu} \Rightarrow$
$w_{\alpha\varepsilon\rho} = ½\cdot\rho\cdot A\cdot(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \Rightarrow$
$\boldsymbol{w_{\alpha\varepsilon\rho} = 11.700\ N}$.



άσκηση 14 Υδροστατική πίεση – Αρχή του Pascal 1

Το κυβικό δοχείο του σχήματος ακμής $h = 2\ m$ είναι γεμάτο με υγρό πυκνότητας $\rho = 1{,}1\cdot10^3\ kg/m^3$. Το έμβολο που κλείνει το δοχείο έχει διατομή $A = 100\ cm^2$.
Το μανόμετρο (1) που βρίσκεται στην πάνω πλευρά του δοχείου δείχνει πίεση $P_1 = 1{,}2\cdot10^5\ N/m^2$ (ή Pa).



Α. *Να υπολογίσετε την πίεση που δείχνει το μανόμετρο (2) που βρίσκεται στον πυθμένα του δοχείου, όταν το δοχείο βρίσκεται :*
α. *εκτός πεδίου βαρύτητας και*
β. *εντός πεδίου βαρύτητας.*
Β. *Να απαντήσετε στα παραπάνω ερωτήματα αν ασκήσουμε στο έμβολο επιπλέον δύναμη $F = 200\ N$.*
Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Λύση

Α.
α. *Αν το δοχείο βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας, τότε :*
$P_2 = P_1 = 1{,}2\cdot10^5\ N/m^2$ (Pa).
Το υγρό δεν είναι βάρος.

β. *Αν το δοχείο βρίσκεται στο πεδίο βαρύτητας της Γης ($g = 10\ m/s^2$) με εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου της υδροστατικής :*
$P_2' = P_1 + \rho\cdot g\cdot h \Rightarrow P_2' = 1{,}2\cdot10^5 + 1{,}1\cdot10^3\cdot10\cdot2 \Rightarrow$
$P_2' = 1{,}2\cdot10^5 + 0{,}22\cdot10^5 \Rightarrow \boldsymbol{P_2' = 1{,}42\cdot10^5\ N/m^2}$ **(ή Pa)**.

Β.
α. *Εκτός πεδίου βαρύτητας,*
σύμφωνα με την αρχή του Pascal :
$P_1' = P_1 + P_F \Rightarrow P_F = F/A = 2\cdot10^4\ N/m^2$ (ή Pa) $= 0{,}2\cdot10^5\ N/m^2$.

$P_1' = P_1 + (F / A) \Rightarrow P_1' = 1{,}2\cdot10^5\ N / m^2 + 200\ N / (10^2\cdot10^{-4}\ m^2) \Rightarrow$

$P_1' = 1{,}4\cdot10^5\ N / m^2$ ή Pα ,

και

$P_2'' = P_2 + P_F \Rightarrow P_2'' = P_1 + P_F \Rightarrow$ **$P_2'' = 1{,}4\cdot10^5\ N / m^2$ ή Pα** .

β.Εντός πεδίου βαρύτητας ,

$P_1'' = P_1' = 1{,}4\cdot10^5\ N / m^2$ ή Pα

και

$P_2''' = P_1 + \rho\cdot g\cdot h + P_F \Rightarrow P_2''' = P_2' + P_F \Rightarrow P_2''' = 1{,}42\cdot10^5 + 0{,}2\cdot10^5 \Rightarrow$

$P_2''' = 1{,}62\cdot10^5\ N / m^2$ ή Pα .

άσκηση 15 Υδροστατική πίεση – Αρχή του Pascal 2

Θεωρήστε ένα δοχείο με ρευστό που δέχεται κατακόρυφη προς τα πάνω επιτάχυνση α.

α. *Δείξτε ότι η μεταβολή της πίεσης με το βάθος δίνεται από την σχέση* $\Delta P = \rho\cdot h\cdot(g + \alpha)$ *, όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού και h το βάθος .*

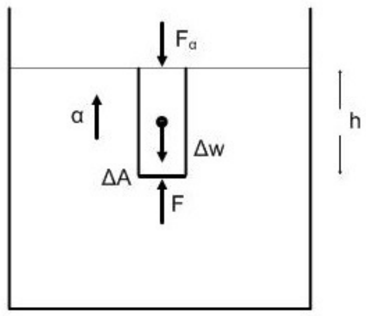
β. *Δείξτε επίσης ότι αν το ρευστό σαν σύνολο δέχεται μια κατακόρυφη προς τα κάτω επιτάχυνση α , η πίεση σε ένα βάθος h δίνεται από την σχέση* $\Delta P = \rho\cdot h\cdot(g - \alpha)$ *.*

γ. *Ποια είναι η κατάσταση στην ελεύθερη πτώση ;*

Λύση

α.

Θεωρούμε μια οριζόντια στοιχειώδη επιφάνεια ΔΑ σε βάθος h .



Η στήλη του ρευστού που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια έχει μάζα :

$\Delta m = \rho\cdot\Delta V \Rightarrow \Delta m = \rho\cdot h\cdot\Delta A$.

Η στοιχειώδης μάζα Δm δέχεται μια κατακόρυφη δύναμη F προς τα πάνω , από το ρευστό που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια ΔΑ , την F_α *κατακόρυφα προς τα κάτω από τον ατμοσφαιρικό αέρα και το βάρος του :*

$\Delta w = \Delta m\cdot g$.

Οι πλευρικές δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται .

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα και την στοιχειώδη μάζα Δm :

$\Sigma F = \Delta m\cdot\alpha \Rightarrow F - F_\alpha - \Delta w = \Delta m\cdot\alpha \Rightarrow F = F_\alpha + \Delta m\cdot(g + \alpha) \Rightarrow$

$F = F_\alpha + \rho\cdot h\cdot\Delta A\cdot(g + \alpha) \Rightarrow$

Η δύναμη από την στήλη στη ΔΑ έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της F (δράση – αντίδραση)

$F / \Delta A = (F_\alpha / \Delta A) + \rho\cdot h\cdot(g + \alpha) \Rightarrow$

$P = P_{\alpha\tau\mu} + \rho\cdot h\cdot(g + \alpha) \Rightarrow P - P_{\alpha\tau\mu} = \rho\cdot h\cdot(g + \alpha) \Rightarrow$ αλλά $P - P_{\alpha\tau\mu} = P_{\upsilon\delta\rho}$,

$P_{\upsilon\delta\rho} = \rho\cdot h\cdot(g + \alpha)$.

β.Με βάση το σχήμα στην προηγούμενη ερώτηση εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για την στοιχειώδη μάζα Δm αλλά για κίνηση με επιτάχυνση α προς τα κάτω .

$\Sigma F = \Delta m\cdot\alpha \Rightarrow$

$\Delta w + F_\alpha - F = \Delta m\cdot\alpha \Rightarrow F = F_\alpha + \Delta w - \Delta m\cdot\alpha \Rightarrow$

$F = F_\alpha + \Delta m\cdot g - \Delta m\cdot\alpha \Rightarrow F = F_\alpha + \Delta m\cdot(g - \alpha) \Rightarrow$

η δύναμη από την μάζα Δm στην επιφάνεια έχει το ίδιο μέτρο με την F (δράση – αντίδραση) ,
$F = F_\alpha + \rho \cdot g \cdot \Delta A \cdot (g - \alpha) \Rightarrow F / \Delta A = F_\alpha / \Delta A + \rho \cdot g \cdot (g - \alpha) \Rightarrow$
$P = P_\alpha + \rho \cdot g \cdot (g - \alpha) \Rightarrow P - P_\alpha = \rho \cdot g \cdot (g - \alpha) \Rightarrow$
$P_{\upsilon\delta\rho} = \rho \cdot g \cdot (g - \alpha)$.

γ. *Για την περίπτωση όπου α = g ,*
$P_{\upsilon\delta\rho} = 0$ *και*
$P = P_{\alpha\tau\mu}$.
Σε όλα τα σημεία του ρευστού η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική .

άσκηση 16 Παροχή – υπολογισμός της μάζας

Μια βρύση έχει διάμετρο 2 cm και το νερό στην έξοδο της έχει ταχύτητα 1 m / s .
α. *Ποια είναι η παροχή της βρύσης ;*
β. *Πόσα kg νερού θα πάρουμε , αν η βρύση παραμείνει ανοικτή για 10 s ;*
Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho_v = 10^3$ kg / m³ *και π = 3,14 .*

Λύση

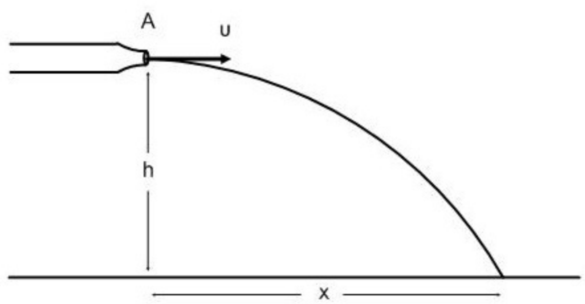
α. *Αν η διάμετρος της βρύσης είναι δ , για το εμβαδό Α της βρύσης :*
$A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = \pi(\delta/2)^2 \Rightarrow A = \pi\delta^2/4$.
Η παροχή Π της βρύσης :
$\Pi = A \cdot \upsilon \Rightarrow$
με την βοήθεια της σχέσης $A = \pi \cdot \delta^2 / 4$,
$\Pi = (\pi \cdot \delta^2 / 4) \cdot \upsilon \Rightarrow \Pi = [3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 / 4] \cdot 1 \Rightarrow$
$\mathbf{\Pi = 3,14 \cdot 10^{-4}\ m^3 / s}$ **.**

β. *Η παροχή Π ορίζεται :*
$\Pi = \Delta V / \Delta t \Rightarrow \Delta V = \Pi \cdot \Delta t$.
Η πυκνότητα ορίζεται :
$\rho_v = \Delta m / \Delta V \Rightarrow \Delta m = \rho_v \cdot \Delta V \Rightarrow$
με την βοήθεια της σχέσης $\Delta V = \Pi \cdot \Delta t$,
$m = \rho_v \cdot \Pi \cdot \Delta t \Rightarrow m = 10^3 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \Rightarrow$
$\mathbf{m = 3,14\ kg}$ **.**

άσκηση 17 Παροχή – Ο κηπουρός

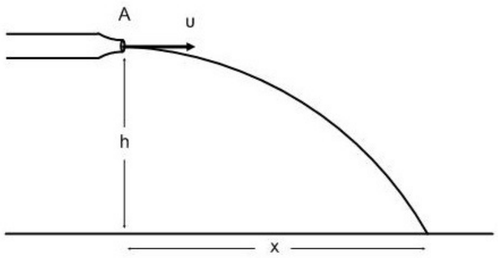
Ένας κηπουρός ποτίζει τον κήπο κρατώντας το σωλήνα ποτίσματος οριζόντιο , σε ύψος h = 1,25 m από το έδαφος . Ο σωλήνας έχει διάμετρο 2 cm και το νερό συναντά το έδαφος σε οριζόντια απόσταση x = 2 m από το στόμιο του σωλήνα .

Να βρείτε την παροχή του σωλήνα , αν g = 10 m / s² .



Λύση

Το νερό καθώς βγαίνει από το σωλήνα πραγματοποιεί οριζόντια βολή :
(σύνθετη κίνηση στο επίπεδο)
άξονας x :
$x = υ·t \Rightarrow t = x / υ$.
άξονας y :
$y = ½·g·t^2 \Rightarrow y = ½·g·(x / υ)^2 \Rightarrow y = ½·g·(x^2 / υ^2) \Rightarrow$
$υ^2 = g·x^2 / (2·y) \Rightarrow υ = x·\sqrt{g / (2·y)}$ $\quad y = h$,
$υ = x·\sqrt{g / (2·h)}$.



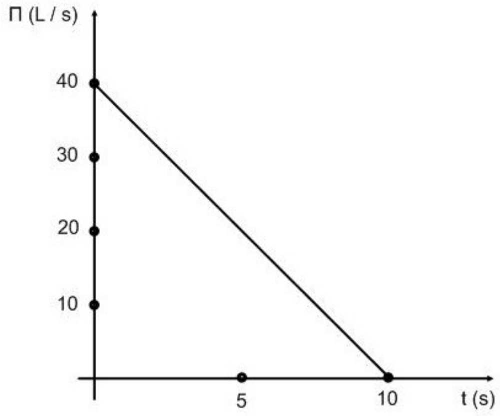
Το εμβαδό :
$A = π·r^2 \Rightarrow A = π(δ/2)^2 \Rightarrow A = πδ^2/4$.
Η παροχή :
$Π = A·υ \Rightarrow Π = (πδ^2/4)·x·\sqrt{g / (2·h)} \Rightarrow$
$Π = [3,14·(2·10^{-2})^2 / 4]·2·\sqrt{10 / (2·1,25)} \Rightarrow$
$Π = 6,28·10^{-4}·\sqrt{4} \Rightarrow$ $\mathbf{Π = 12,56·10^{-4}\ m^3 / s}$ **.**

άσκηση 18 Μεταβλητή Παροχή

Η παροχή νερού από ένα πυροσβεστικό σωλήνα είναι $Π_0 = 40$ L / s .
Την χρονική στιγμή t = 0 , η παροχή αρχίζει να ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο , έτσι ώστε να μηδενιστεί μετά από 10 s .
Να βρείτε πόσα λίτρα νερού θα εξέλθουν από το σωλήνα στη διάρκεια των 10 s .

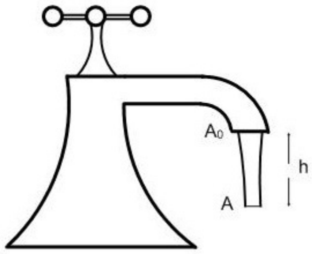
Λύση

Η εκφώνηση μας δίνει ότι η παροχή ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο , η παροχή Π είναι της μορφής :
$Π = Π_0 – λ·t$, *όπου λ είναι μια σταθερά .*
για $t = 0$ *είναι* $Π = Π_0 = 40$ L / s .
για $Π = 0$ *είναι* $t = 10$ s , *άρα :*
$Π = Π_0 – λ·t \Rightarrow 0 = 40 – λ·10 \Rightarrow λ = 40 / 10 \Rightarrow$
$\mathbf{λ = 4\ L / s^2}$**.**
Η παροχή Π σε συνάρτηση με τον χρόνο , είναι :
$Π = 40 – 4·t$, *όπου Π σε L / s και t σε s .*
Η γραφική παράσταση της παροχής σε συνάρτηση με τον χρόνο , είναι :



Ο όγκος του νερού που εξέρχεται από τον σωλήνα δίνεται από το εμβαδό της γραφικής παράστασης της παροχής σε συνάρτηση με τον χρόνο :
$V = E_{τρ} \Rightarrow V = ½·(βάση)·(ύψος) \Rightarrow$
$V = ½·10·40 \Rightarrow$ $\mathbf{V = 200\ L}$ **.**

άσκηση 19 Εξίσωση της συνέχειας 1 – Η βρύση



Καθώς το νερό πέφτει η ταχύτητα του αυξάνεται . Το εμβαδόν της διατομής στη στάθμη A_0 είναι 1,2 cm² και στην στάθμη A είναι 0,4 cm² . Η απόσταση h μεταξύ των A_0 και A είναι 64 mm .

α. *Πόση είναι η παροχή του νερού από την βρύση ;*

β. *Σε πόσο χρόνο θα γεμίσει δοχείο όγκου 480 ml .*

Λύση

α. *Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε :*

$\Pi_{A0} = \Pi_A \Rightarrow A_0 \cdot \upsilon_0 = A \cdot \upsilon$,

(όπου υ_0 , υ οι ταχύτητες στις στάθμες A_0 , A αντίστοιχα)

Το νερό εκτελεί κατακόρυφη κίνηση προς τα κάτω με επιτάχυνση α = g .

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας :

(άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει παντού και εφαρμόζεται για μια στοιχειώδη μάζα νερού που κινείται από την στάθμη A_0 στην στάθμη A)

$\Delta K = W_w \Rightarrow$

Επειδή η κίνηση γίνεται με α = g . Οι δυνάμεις επαφής του στοιχειώδους τμήματος με το τμήμα που είναι πάνω και κάτω από αυτό είναι μηδενικές . Επομένως έργο παράγει μόνο η δύναμη του βάρους .

$½ \cdot \Delta m \cdot \upsilon^2 – ½ \cdot \Delta m \cdot \upsilon_0^2 = \Delta m \cdot g \cdot h \Rightarrow$

$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$

(Από την εξίσωση της συνέχειας : $\upsilon = A_0 \cdot \upsilon_0 / A$)

$(A_0 \cdot \upsilon_0 / A)^2 = \upsilon_0^2 + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow (A_0^2 \cdot \upsilon_0^2) / A^2 = \upsilon_0^2 + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$

$[(A_0^2 \cdot \upsilon_0^2) / A^2] – \upsilon_0^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow \upsilon_0^2 \cdot (A_0^2 – A^2) / A^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$

$\upsilon_0 = \sqrt{\{2 \cdot g \cdot h \cdot [A^2 / (A_0^2 – A^2)]\}} \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\{2 \cdot 10 \cdot 64 \cdot 10^{-3} \cdot (0,4)^2 / [1,2^2 – 0.4^2]\}} \Rightarrow$

$\upsilon_0 = \sqrt{\{2 \cdot 64 \cdot 10^{-2} / 8\}} \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\{16 \cdot 10^{-2}\}} \Rightarrow$

$\boldsymbol{\upsilon_0 = 0,4\ m / s}$ **.**

Η παροχή της βρύσης είναι :

$\Pi = dV / dt = A_0 \cdot \upsilon_0 \Rightarrow \Pi = 0,4 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow$

$\boldsymbol{\Pi = 4,8 \cdot 10^{-5}\ m^3 / s}$ **.**

β. $\Delta V / \Delta t = \Pi \Rightarrow \Delta t = \Delta V / \Pi \Rightarrow$

$\Delta t = 480 \cdot 10^{-6} / (4,8 \cdot 10^{-5}) \Rightarrow$

$\boldsymbol{\Delta t = 10\ s}$ **.**

άσκηση 20 Εξίσωση της συνέχειας 2 – Το ραντιστήρι

Ένα λάστιχο ποτίσματος εσωτερικής διατομής D = 2 cm συνδέεται με ένα ραντιστήρι που αποτελείται απλώς από ένα κλειστό περίβλημα με 40 τρύπες , η καθεμιά διαμέτρου δ = 0,1 cm .

Αν το νερό στο λάστιχο έχει ταχύτητα 1,2 m / s , με ποια ταχύτητα φεύγει το νερό από τις τρύπες του ραντιστηριού .

Λύση

Διάμετρος του ποτιστικού σωλήνα :

$D = 2\ cm \Rightarrow D = 2\cdot10^{-2}\ m$.

Διάμετρος της οπής :

$\delta = 0,1\ cm \Rightarrow \delta = 0,1\cdot10^{-2}\ m$.

Από την εξίσωση συνέχειας :

$(\Pi = dV / dt = \sigma\tau\alpha\theta. = A\cdot\upsilon)$

$A_{\sigma\omega\lambda}\cdot\upsilon_{\sigma\omega\lambda} = A_{o\pi\acute{\omega}\nu}\cdot\upsilon_{o\pi\acute{\eta}\varsigma} \Rightarrow$

$A_{\sigma\omega\lambda}\cdot\upsilon_{\sigma\omega\lambda} = N\cdot A_{o\pi\acute{\eta}\varsigma}\cdot\upsilon_{o\pi\acute{\eta}\varsigma} \Rightarrow \upsilon_{o\pi\acute{\eta}\varsigma} = (A_{\sigma\omega\lambda}\cdot\upsilon_{\sigma\omega\lambda}) / (N\cdot A_{o\pi\acute{\eta}\varsigma}) \Rightarrow$

$\upsilon_{o\pi\acute{\eta}\varsigma} = [\pi\cdot(D^2 / 4)\cdot\upsilon_{\sigma\omega\lambda}] / [N\cdot\pi\cdot(\delta^2 / 4)] \Rightarrow \upsilon_{o\pi\acute{\eta}\varsigma} = [D^2 / (N\cdot\delta^2)]\cdot\upsilon_{\sigma\omega\lambda} \Rightarrow$

$\upsilon_{o\pi\acute{\eta}\varsigma} = [4\cdot10^{-4}\cdot1,2) / (10^{-2}\cdot10^{-4}\cdot40)] \Rightarrow \upsilon_{o\pi\acute{\eta}\varsigma} = (4\cdot1,2) / (4\cdot10^{-1}) \Rightarrow$

$\boldsymbol{\upsilon_{o\pi\acute{\eta}\varsigma} = 12\ m / s}$ **.**

άσκηση 21 Εξίσωση της συνέχειας III

Σωλήνας παροχής φυσικού αερίου έχει στην αρχή της εγκατάστασης διάμετρο 10 mm και στην είσοδο του σπιτιού διάμετρο 5 mm . Αν η ταχύτητα εισαγωγής του αερίου στην οικιακή εγκατάσταση είναι $\upsilon_2 = 25\ m / s$.

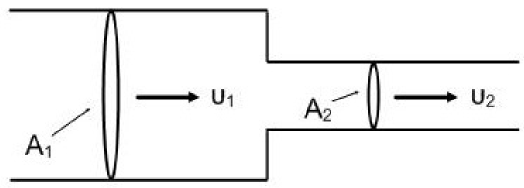
Να βρεθούν :

***α.** Πόση είναι η ταχύτητα εκροής από την παραγωγή ;*

***β.** Πόση είναι η παροχή του φυσικού αερίου ;*

***γ.** Σε πόσο χρόνο η κατανάλωση φτάνει το 1 m³ .*

Θεωρούμε το φυσικό αέριο ιδανικό ρευστό .



Λύση

***α.**Από την εξίσωση συνέχειας :*

$A_1\cdot\upsilon_1 = A_2\cdot\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = (A_2 / A_1)\cdot\upsilon_2$.

Ισχύει :

$A_2 = \pi\cdot(\delta_2 / 2)^2 \Rightarrow A_2 = \pi\cdot\delta_2^2 / 4$.

και

$A_1 = \pi\cdot(\delta_1 / 2)^2 \Rightarrow A_1 = \pi\cdot\delta_1^2 / 4$.

Άρα :

$\upsilon_1 = (A_2 / A_1)\cdot\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = [(\pi\cdot\delta_2^2 / 4) / (\pi\cdot\delta_1^2 / 4)]\cdot\upsilon_2 \Rightarrow$

$\upsilon_1 = (\delta_2^2 / \delta_1^2)\cdot\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = [\delta_2^2 / (2\cdot\delta_2)^2]\cdot\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2 / 4 \Rightarrow \upsilon_1 = 25 / 4 \Rightarrow$

$\boldsymbol{\upsilon_1 = 6,25\ m / s}$ **.**

***β.**Ισχύει :*

$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi$.

Ισχύει :

$\Pi = A_1\cdot\upsilon_1 \Rightarrow \Pi = \pi(\delta_1 / 2)^2\cdot\upsilon_1 \Rightarrow \Pi = 3,14\cdot(5\cdot10^{-3} / 2)^2\cdot25 \Rightarrow$

$\boldsymbol{\Pi = 490,625\cdot10^{-6}\ m^3 / s}$ **.**

γ.Ισχύει :
$\Pi = V / t \Rightarrow t = V / \Pi \Rightarrow t = 1 / (490{,}625 \cdot 10^{-6}) \Rightarrow$
$t = 10^{6} / 490{,}625 \Rightarrow t = 2{,}04 \cdot 10^{3}\ s \Rightarrow t = 2040\ s \Rightarrow$
$t = 34\ min$.

άσκηση 22 Εξίσωση του Bernoulli – Υπερπίεση

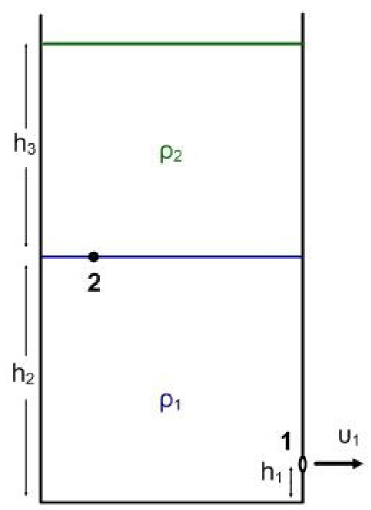
Ας υποθέσουμε πως φυσάμε ένα λεπτό ρεύμα αέρα από το στόμα μας , με ταχύτητα 8 m / s . Ποια νομίζετε πως είναι τότε η υπερπίεση (η μεταβολή της πίεσης) μέσα στο στόμα μας ; Θεωρείστε ότι η ταχύτητα του αέρα μέσα στο στόμα είναι σχεδόν μηδέν και η πυκνότητα του είναι $\rho_{\alpha\varepsilon\rho} = 1{,}2\ kg / m^3$.

Λύση

Ισχύει $h_1 = h_2$ και η ταχύτητα του αέρα στο στόμα μας είναι μηδέν $\upsilon_1 = 0$,
από την εξίσωση του Bernoulli :
$P_1 + ½ \cdot \rho_{\alpha\varepsilon\rho} \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + ½ \cdot \rho_{\alpha\varepsilon\rho} \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow$
$P_1 + ½ \cdot \rho_{\alpha\varepsilon\rho} \cdot 0 = P_2 + ½ \cdot \rho_{\alpha\varepsilon\rho} \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow$
$P_1 - P_2 = ½ \cdot \rho_{\alpha\varepsilon\rho} \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow$
$\Delta P = ½ \cdot \rho_{\alpha\varepsilon\rho} \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow$
$\Delta P = ½ \cdot 1{,}2 \cdot 8^2 \Rightarrow$
$\Delta P = ½ \cdot 1{,}2 \cdot 64 \Rightarrow$
$\Delta P = 38{,}4\ N / m^2$ *(ή Pa).*
Η ΔP είναι η ζητούμενη υπερπίεση .

23. Δύο μη αναμειγνυόμενα υγρά

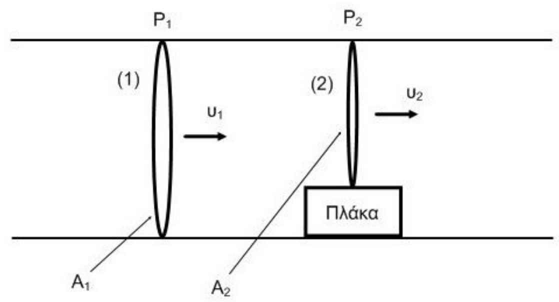
Στο δοχείο του σχήματος με οπή υπάρχουν δύο μη αναμειγνυόμενα υγρά , το υγρό 1 είναι το νερό με πυκνότητα $\rho_1 = 1000\ kg / m^3$ και το υγρό 2 είναι λάδι με πυκνότητα $\rho_2 = 900\ kg / m^3$.
Να υπολογιστεί η ταχύτητα εκροής του υγρού από την οπή .
Δίνονται $g = 10\ m / s^2$, $h_2 = 1{,}1\ m$, $h_1 = 0{,}2\ m$ και $h_3 = 1\ m$.



Λύση

Βλέπουμε στο σχήμα ότι το σημείο 2 είναι στη διαχωριστική επιφάνεια .
Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 :
$P_1 + ½ \cdot \rho_1 \cdot \upsilon_1^2 + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 = P_2 + ½ \cdot \rho_1 \cdot \upsilon_2^2 + \rho_1 \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow$
το $P_2 = P_{at} + \rho_2 \cdot g \cdot h_3$ *και* $P_1 = P_{at}$,
$P_{at} + ½ \cdot \rho_1 \cdot \upsilon_1^2 + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 = P_{at} + \rho_2 \cdot g \cdot h_3 + ½ \cdot \rho_1 \cdot \upsilon_2^2 + \rho_1 \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow$
θεωρώντας ότι $\upsilon_2 < \upsilon_1$,
$½ \cdot \rho_1 \cdot \upsilon_1^2 = \rho_1 \cdot g \cdot (h_2 - h_1) + \rho_2 \cdot g \cdot h_3 \Rightarrow$
$\upsilon_1 = \sqrt{[2 \cdot g \cdot (h_2 - h_1) + 2 \cdot (\rho_2 / \rho_1) \cdot g \cdot h_3]} \Rightarrow$
$\upsilon_1 = \sqrt{[2 \cdot 10 \cdot (1{,}1 - 0{,}2) + 2 \cdot (900 / 1000) \cdot 10 \cdot 1]} \Rightarrow$
$\upsilon_1 = \sqrt{36} \Rightarrow$
$\upsilon_1 = 6\ m / s$.

άσκηση 24   Εξίσωση της συνέχειας – εξίσωση του Bernoulli – Η αρτηριοσκλήρωση



Στην αρτηριοσκλήρωση , στα τοιχώματα των αρτηριών επικάθεται η ονομαζόμενη πλάκα με αποτέλεσμα η διατομή της αρτηρίας να μειώνεται .

α. *Αν τα εμβαδά των διατομών είναι A_1 και A_2 αντιστοίχως ποια η σχέση των ταχυτήτων υ_1 και υ_2 .*

β. *Υπολογίστε την διαφορά της πίεσης του αίματος μεταξύ των σημείων (1) και (2) .*

γ. *Εφαρμογή : Να γίνουν οι υπολογισμοί στην περίπτωση που η ακτίνα μιας αρτηρίας υποτριπλασιάζεται , η μέση τιμή ταχύτητας ροής στο ευρύ τμήμα της αρτηρίας είναι 50 cm / s ενώ η πυκνότητα του αίματος είναι ρ = 1.050 kg / m³ .*

Λύση

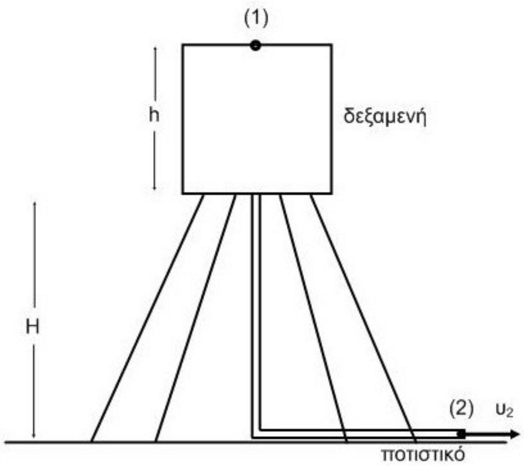
α.*Από την εξίσωση της συνέχειας :*
(Π = dV / dt = σταθερό , κατά μήκος μιας φλέβας ροής)
$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = (A_1 / A_2) \cdot \upsilon_1$.

β. *Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για οριζόντιο σωλήνα .*
$P + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon^2 =$ *σταθερό . Για τα σημεία (1) και (2) , έχουμε :*
$P_1 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow P_1 - P_2 = ½ \cdot \rho \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \Rightarrow$
από το προηγούμενο ερώτημα ,
$P_1 - P_2 = ½ \cdot \rho \cdot ((A_1 / A_2)^2 \cdot \upsilon_1^2 - \upsilon_1^2) \Rightarrow P_1 - P_2 = ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 \cdot [(A_1^2 / A_2^2) - 1]$.

γ. *Υπολογίζουμε τα εμβαδά των διατομών A_1 και A_2 :*
$A_1 = \pi \cdot r_1^2$ *και*
$A_2 = \pi \cdot r_2^2 \Rightarrow A_2 = \pi \cdot (r_1 / 3)^2 \quad \Rightarrow A_2 = \pi \cdot (r_1^2 / 9) \quad \Rightarrow$
$A_2 = A_1 / 9 \Rightarrow (A_1 / A_2)^2 = 9^2 \Rightarrow (A_1 / A_2)^2 = 81$.
Δίνεται
$\upsilon_1 = 50$ cm / s $\Rightarrow \upsilon_1 = 0{,}5$ m / s ,
άρα :
από το προηγούμενο ερώτημα ,
$P_1 - P_2 = ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 \cdot [(A_1^2 / A_2^2) - 1] \Rightarrow P_1 - P_2 = ½ \cdot 1050 \cdot (0{,}5)^2 \cdot (9^2 - 1) \Rightarrow$
$P_1 - P_2 = 10.500$ N / m² ή Pαή $\mathbf{P_1 - P_2 = 10{,}5\ KP\alpha}$ **.**

άσκηση 25   Εξίσωση της συνέχειας – εξίσωση του Bernoulli II

Μια κυλινδρική δεξαμενή ακτίνας 6 m και ύψους h = 5 m είναι γεμάτη με νερό , βρίσκεται στην κορυφή ενός πύργου ύψους 45 m και χρησιμοποιείται για το πότισμα ενός χωραφιού .



α. *Ποια η παροχή του νερού από ένα ποτιστικό διαμέτρου 2 cm που βρίσκεται στο έδαφος του χωραφιού ;*
β. *Αν θεωρήσουμε ότι η παροχή παραμένει σταθερή , μετά από πόση ώρα θα χρειαστεί η δεξαμενή και πάλι γέμισμα ;*

Λύση

α. *Για τα σημεία (1) και (2) εφαρμόζουμε την εξίσωση της συνέχειας :*
$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = (A_2 / A_1) \cdot \upsilon_2$.
Επειδή $A_2 / A_1 << 1$ *τότε και* $\upsilon_1 << \upsilon_2$,
οπότε θεωρούμε το $\upsilon_1 = 0$.
Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία (1) και (2) :
$P_1 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 + \rho \cdot g \cdot H = P_2 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2 + \rho \cdot g \cdot 0 \Rightarrow$
όπου $\upsilon_1 = 0$ *και* $P_1 = P_2 = P_{atm}$,
$\upsilon_2 = \sqrt{[2 \cdot g \cdot (H + h)]} \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{(2 \cdot 10 \cdot 45)} \Rightarrow$ $\boldsymbol{\upsilon_2 = 30\ m / s}$.
Η παροχή του ποτιστικού είναι :
$\Pi_2 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \Pi_2 = \pi \cdot (\delta / 2)^2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \Pi_2 = \pi \cdot (2 \cdot 10^{-2} / 2)^2 \cdot 30 \Rightarrow$
$\boldsymbol{\Pi_2 = 3 \cdot \pi \cdot 10^{-3}\ m^3 / s}$ **.**
β. *Υπολογίζουμε τον χρόνο για το άδειασμα της δεξαμενής :*
$\Pi = dV / dt \Rightarrow \Pi = V / t \Rightarrow t = (A \cdot h) / \Pi_2 \Rightarrow A = \pi \cdot R^2$,
$t = [(\pi \cdot R^2) \cdot h) / \Pi_2 \Rightarrow t = \pi \cdot 6^2 \cdot 5 / (3 \cdot \pi \cdot 10^{-3}) \Rightarrow$
t = 60.000 s ή 16 h και 40 min .

άσκηση 26   Εξίσωση της συνέχειας – εξίσωση του Bernoulli III

Ένα λάστιχο με εσωτερική κυκλική διατομή ακτίνας 0,6 cm , συνδέεται με βρύση στο ισόγειο και μεταφέρει το νερό στην ταράτσα κτηρίου ύψους 10 m .
Αν το στόμιο εκροής είναι κυκλικό και έχει ακτίνα 0,15 cm , ενώ η ταχύτητα με την οποία εκτοξεύεται το νερό είναι 8 m / s , να υπολογιστούν :
α. *Η ταχύτητα του νερού στο λάστιχο ,*
β. *Η πίεση του νερού στη θέση του στομίου της βρύσης .*
Η ροή να θεωρηθεί χωρίς τριβές ,
επίσης δίνονται : $g = 10\ m / s^2$, $\rho = 10^3\ kg / m^3$ *και* $P_{at} = 10^5\ Pa$.

Λύση

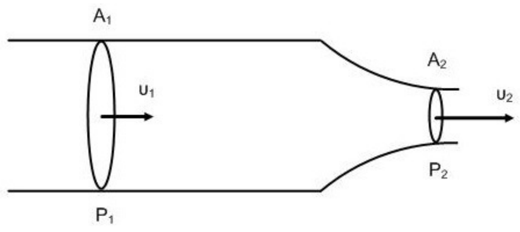
α. *Από την εξίσωση της συνέχειας :*
$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = (A_2 / A_1) \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = [\pi \cdot r_2^2 / (\pi \cdot r_1^2)] \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$

$\upsilon_1 = [0{,}0225 \cdot 10^{-4} / (0{,}36 \cdot 10^{-4})] \cdot 8 \Rightarrow \upsilon_1 = (2{,}25 / 36) \cdot 8 \Rightarrow \upsilon_1 = 18 / 36 \Rightarrow$
$\boldsymbol{\upsilon_1 = 0{,}5\ m / s}$ **.**

β. Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli :
$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2 + \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow P_1 = P_{at} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) + \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow$
$P_1 = 10^5 + \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot (64 - 0{,}25) + 10^3 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow P_1 = 2 \cdot 10^5 + 31{,}875 \cdot 10^3 \Rightarrow$
$\boldsymbol{P_1 = 2{,}32 \cdot 10^5\ Pa}$ **(με προσέγγιση εκατοστού)**

Εξίσωση της συνέχειας – εξίσωση του Bernoulli IV

Στον οριζόντιο σωλήνα που φαίνεται στην εικόνα , ρέει ιδανικό υγρό πυκνότητας ρ , του οποίου η ταχύτητα και η πίεση στην εγκάρσια διατομή A_1 είναι υ_1 και P_1 αντίστοιχα .
Να βρείτε στην εγκάρσια διατομή A_2 :
α. Την ταχύτητα υ_2 ,
β. Την πίεση P_2 .



Τα μεγέθη A_1 , A_2 , υ_1 , P_1 , ρ να θεωρηθούν γνωστά .

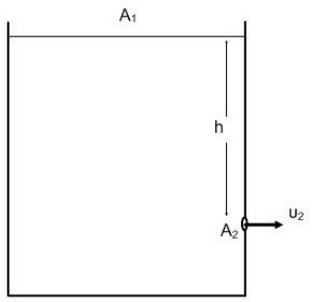
Λύση

α. Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε :
$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = (A_1 / A_2) \cdot \upsilon_1 \ \ldots\ (I)$.

β. Από την εξίσωση του Bernoulli για $h_1 = h_2$:
$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow$
$P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2) \Rightarrow$
από την εξίσωση (Ι) ,
$P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \{\upsilon_1^2 - [(A_1 / A_2) \cdot \upsilon_1]^2\} \Rightarrow P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 \cdot \{(A_2^2 - A_1^2) / A_2^2\} \Rightarrow$
$\boldsymbol{P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 \cdot \{1 - (A_1 / A_2)^2\}}$ **.**

άσκηση 27 Εξίσωση της συνέχειας – Εξίσωση του Bernouli V

Στη δεξαμενή νερού της εικόνας υπάρχει μια τρύπα σε βάθος $h = 5$ m . Μια βρύση στο πάνω μέρος τροφοδοτεί τη δεξαμενή με νερό . Ποια πρέπει να είναι η παροχή της βρύσης , ώστε η δεξαμενή να είναι συνεχώς γεμάτη , χωρίς όμως να ξεχειλίζει ;
Δίνεται για την τρύπα $A_2 = 3{,}14 \cdot 10^{-6}\ m^2$ και $g = 10\ m / s^2$.



Λύση

Η υ_1 είναι το μέτρο της ταχύτητας με την οποία κινείται το νερό στη δεξαμενή και η υ_2 είναι το μέτρο της ταχύτητας με την οποία βγαίνει το νερό από την τρύπα .
Από την εξίσωση της συνέχειας :
$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = (A_2 / A_1) \cdot \upsilon_2 \ \ldots\ (I)$.
Ισχύει $A_1 >> A_2 \Rightarrow$
$(A_2 / A_1) << 1 \Rightarrow (A_2 / A_1) \rightarrow 0$,

άρα από την σχέση (Ι) :

$\upsilon_1 \to 0$.

Εξίσωση του Bernoulli :

$P_1 + ½·\rho_{νερ}·\upsilon_1^2 + \rho_{νερ}·g·h_1 = P_2 + ½·\rho_{νερ}·\upsilon_2^2 + \rho_{νερ}·g·h_2 \Rightarrow$

όπου $\upsilon_1 = 0$, $h_2 = 0$ *και* $h_1 = h$,

$P_1 + \rho_{νερ}·g·h = P_2 + ½·\rho_{νερ}·\upsilon_2^2 \quad \Rightarrow$

ισχύει $P_1 = P_2$,

$\rho_{νερ}·g·h = ½·\rho_{νερ}·\upsilon_2^2 \quad \Rightarrow$

$2·g·h = \upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{(2·g·h)}$.

Η παροχή Π_2 *της τρύπας :*

$\Pi_2 = A_2·\upsilon_2 \Rightarrow \Pi_2 = A_2·\sqrt{(2·g·h)} \Rightarrow \Pi_2 = 3{,}14·10^{-6}·\sqrt{(2·10·5)} \Rightarrow$

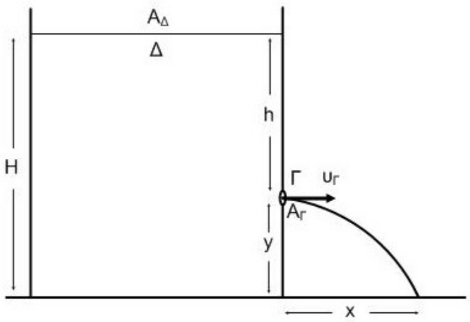
$\Pi_2 = 3{,}14·10^{-6}·10 \Rightarrow \Pi_2 = 3{,}14·10^{-5}$ m³ / s .

άσκηση 28 Εξίσωση της συνέχειας – Εξίσωση του Bernoulli VI

Η δεξαμενή νερού περιέχει νερό (πυκνότητας $\rho_{νερ}$*) ύψους Η και έχει μια μικρή τρύπα σε βάθος h . Το νερό που βγαίνει από την τρύπα διαγράφει την παραβολή που φαίνεται στην εικόνα και συναντά το έδαφος σε απόσταση x .*

Αν θεωρήσουμε το ύψος Η σταθερό , να βρείτε το βάθος h .

Δίνεται Η = 5 m και x = 3 m .



Λύση

Το νερό , βγαίνοντας από την μικρή τρύπα (σημείο Γ) θα εκτελέσει οριζόντια βολή . (σύνθετη κίνηση)

Άξονας x :

$x = \upsilon_\Gamma·t \Rightarrow t = x / \upsilon_\Gamma$ … (Ι) .

Άξονας y :

$y = ½·g·t^2 \Rightarrow$

με την βοήθεια της εξίσωσης (Ι) ,

επίσης $y = H – h$,

$H – h = ½·g·(x / \upsilon_\Gamma)^2 \Rightarrow H – h = ½·g·(x^2 / \upsilon_\Gamma^2) \quad \Rightarrow \upsilon_\Gamma^2 = g·x^2 / [2·(H – h)] \Rightarrow$

$\upsilon_\Gamma = x·\sqrt{\{g / [2·(H – h)]\}}$ … (ΙΙ) .

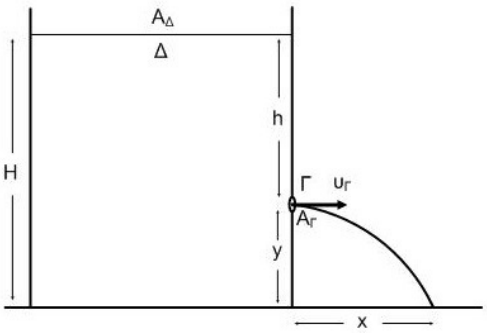
Εξίσωση της συνέχειας για τις θέσεις Δ και Γ :

$A_\Delta·\upsilon_\Delta = A_\Gamma·\upsilon_\Gamma \Rightarrow \upsilon_\Delta = \upsilon_\Gamma·(A_\Gamma / A_\Delta)$.

Ισχύει $A_\Delta >> A_\Gamma \Rightarrow (A_\Gamma / A_\Delta) << 1$,

άρα ,

$\boldsymbol{\upsilon_\Delta = 0}$ **.**



Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Δ και Γ :

$P_\Delta + ½·\rho_{νερ}·\upsilon_\Delta^2 + \rho_{νερ}·g·h = P_\Gamma + ½·\rho_{νερ}·\upsilon_\Gamma^2 \quad \Rightarrow$

ισχύει $P_\Delta = P_\Gamma = P_{at}$,

$P_\Delta + ½\cdot\rho_{\nu\varepsilon\rho}\cdot 0^2 + \rho_{\nu\varepsilon\rho}\cdot g\cdot h = P_\Delta + ½\cdot\rho_{\nu\varepsilon\rho}\cdot\upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow$

$\rho_{\nu\varepsilon\rho}\cdot g\cdot h = ½\cdot\rho_{\nu\varepsilon\rho}\cdot\upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow 2\cdot g\cdot h = \upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow$

από την σχέση (ΙΙ) ,

$2\cdot g\cdot h = x^2\cdot\{g / [2\cdot(H - h)]\} \Rightarrow$

$2\cdot h = x^2 / [2\cdot(H - h)] \Rightarrow (H - h)\cdot h = x^2 / 4 \Rightarrow H\cdot h - h^2 = x^2 / 4 \Rightarrow 5\cdot h - h^2 = 3^2 / 4 \Rightarrow$

$5\cdot h - h^2 = 2{,}25 \Rightarrow h^2 - 5\cdot h + 2{,}25 = 0$.

Με λύσεις για το ύψος h :

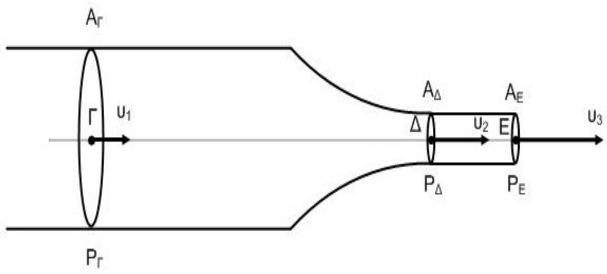
$h = 4{,}5$ m *ή* $h = 0{,}5$ m .

Δεν υπάρχει από την εκφώνηση της άσκησης περιορισμός που να μας αποτρέπει από το να δεχτούμε κάποια από τις δύο λύσεις . Άρα και οι δύο λύσεις είναι δεκτές .

άσκηση 29   Εξίσωση του Bernoulli – Ο πυροσβεστικός σωλήνας

Ο πυροσβεστικός σωλήνας που φαίνεται στην εικόνα έχει διάμετρο 6,4 cm και καταλήγει σε ακροφύσιο διαμέτρου 2,5 cm .

Αν η υπερπίεση στο σωλήνα είναι $\Delta P = 3{,}5\cdot 10^5$ N / m² *και η ταχύτητα ροής* $\upsilon_1 = 4$ m / s , *να βρείτε :*



α. *Την ταχύτητα ροής* υ_2 *στο στο ακροφύσιο .*

β. *Την πίεση του νερού στο ακροφύσιο .*

γ. *Την ταχύτητα* υ_3 , *του νερού ακριβώς έξω από το ακροφύσιο .*

Δίνεται $P_{at} = 1\cdot 10^5$ N / m² *και η πυκνότητα του νερού* $\rho_{\nu\varepsilon\rho} = 10^3$ kg / m³ .

Λύση

α. *Το εμβαδό* A_Γ :

$A_\Gamma = \pi\cdot r_\Gamma^2 \Rightarrow A_\Gamma = \pi\cdot(\delta_\Gamma / 2)^2 \Rightarrow A_\Gamma = \pi\cdot\delta_\Gamma^2 / 4$.

Το εμβαδό A_Δ :

$A_\Delta = \pi\cdot r_\Delta^2 \Rightarrow A_\Delta = \pi\cdot(\delta_\Delta / 2)^2 \Rightarrow A_\Delta = \pi\cdot\delta_\Delta^2 / 4$.

Από την εξίσωση της συνέχειας :

$A_\Gamma\cdot\upsilon_1 = A_\Delta\cdot\upsilon_2 \Rightarrow (\pi\cdot\delta_\Gamma^2 / 4)\cdot\upsilon_1 = (\pi\cdot\delta_\Delta^2 / 4)\cdot\upsilon_2 \Rightarrow$

$\delta_\Gamma^2\cdot\upsilon_1 = \delta_\Delta^2\cdot\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = (\delta_\Gamma^2 / \delta_\Delta^2)\cdot\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2 = (\delta_\Gamma / \delta_\Delta)^2\cdot\upsilon_1 \Rightarrow$

$\upsilon_2 = (6{,}4\cdot 10^{-2} / 2{,}5\cdot 10^{-2})^2\cdot 4 \Rightarrow \upsilon_2 = 2{,}56^2\cdot 4 \Rightarrow$

$\upsilon_2 = 26{,}21$ m / s .

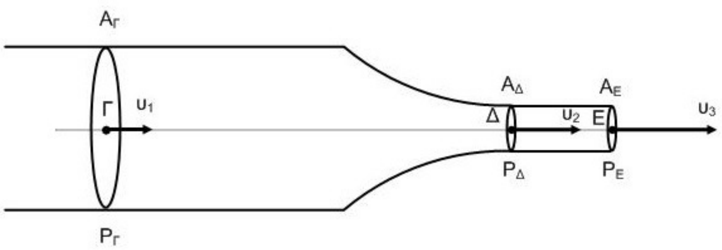
β. *Ισχύει :*

$\Delta P = P_\Gamma - P_{at} \Rightarrow P_\Gamma = \Delta P + P_{at} \Rightarrow P_\Gamma = 3{,}5\cdot 10^5 + 1\cdot 10^5 \Rightarrow$

$P_\Gamma = 4{,}5\cdot 10^5$ N / m² .

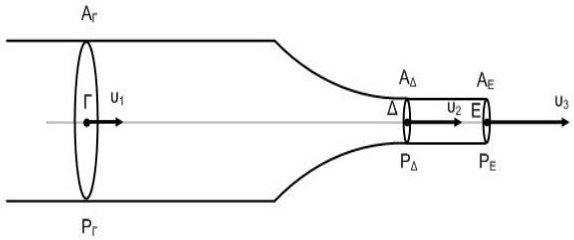
Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Γ και Δ :

(Τα σημεία Γ και Δ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία)



$P_Γ + ½·ρ_{νερ}·υ_1^2 + ρ_{νερ}·g·h_Γ = P_Δ + ½·ρ_{νερ}·υ_2^2 + ρ_{νερ}·g·h_Δ \Rightarrow$
Αφού τα σημεία Γ και Δ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία ισχύει $h_Γ = h_Δ$,
$P_Γ + ½·ρ_{νερ}·υ_1^2 = P_Δ + ½·ρ_{νερ}·υ_2^2 \Rightarrow P_Δ = P_Γ + ½·ρ_{νερ}·υ_1^2 – ½·ρ_{νερ}·υ_2^2 \Rightarrow$
$P_Δ = P_Γ + ½·ρ_{νερ}·(υ_1^2 – υ_2^2) \Rightarrow P_Δ = 4,5·10^5 + ½·10^3·(4^2 – 26,21^2) \Rightarrow$
$P_Δ = 4,5·10^5 + ½·10^3·(16 – 686,96) \Rightarrow P_Δ = 4,5·10^5 – 3,35·10^5 \Rightarrow$
$P_Δ = 1,15·10^5 N / m^2$.

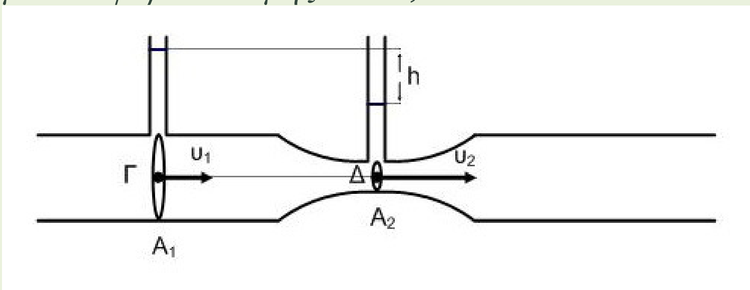
γ. *Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Δ και Ε :(Τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία)*



$P_Δ + ½·ρ_{νερ}·υ_2^2 + ρ_{νερ}·g·h_Δ = P_E + ½·ρ_{νερ}·υ_3^2 + ρ_{νερ}·g·h_E \Rightarrow$
Αφού τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία ισχύει $h_Δ = h_E$,
$P_Δ + ½·ρ_{νερ}·υ_2^2 = P_E + ½·ρ_{νερ}·υ_3^2 \Rightarrow$
ισχύει $P_E = P_{at}$,
$P_Δ + ½·ρ_{νερ}·υ_2^2 = P_{at} + ½·ρ_{νερ}·υ_3^2 \Rightarrow ½ · ρ_{νερ}·υ_3^2 = ½·ρ_{νερ}·υ_2^2 + (P_Δ – P_{at}) \Rightarrow$
$υ_3^2 = υ_2^2 + [2·(P_Δ – P_{at}) / ρ_{νερ}] \Rightarrow υ_3 = \sqrt{υ_2^2 + [2·(P_Δ – P_{at}) / ρ_{νερ}]} \Rightarrow$
$υ_3 = \sqrt{26,21^2 + [2·(1,15·10^5 – 1·10^5) / 10^3]} \Rightarrow υ_3 = \sqrt{686,96 + 30} \Rightarrow$
$\boldsymbol{υ_3 = \sqrt{716,96} \Rightarrow υ_3 = 26,77\ m / s}$ **.**

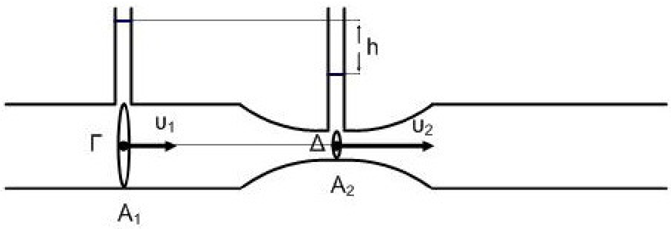
άσκηση 30 Εξίσωση του Bernoulli – Κεντρικός αγωγός και οι δύο σωλήνες

Ένας κεντρικός αγωγός νερού , διαμέτρου 30 cm , έχει ένα στένωμα με διάμετρο 10 cm . Δύο κατακόρυφοι σωλήνες συνδέονται με τον κύριο αγωγό και το στένωμα και το νερό σε αυτούς παρουσιάζει μια διαφορά στάθμης h = 1,6 m .



α. *Ποια είναι η ταχύτητα ροής στον κεντρικό αγωγό ;*
β. *Ποια είναι η παροχή του αγωγού ;*
Δίνεται $g = 10\ m / s^2$ *και* $π ≅ 3,14$.

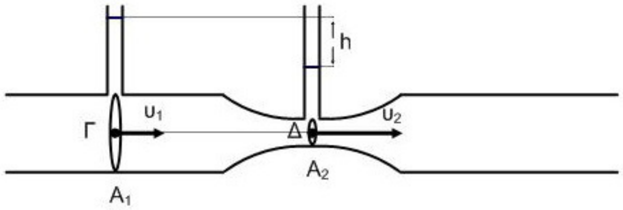
Λύση



α. *Στο σημείο Γ το νερό έχει εμβαδό διατομής* A_1 : $A_1 = π·r_1^2 \Rightarrow A_1 = π·(δ_1 / 2)^2$.
και στο σημείο Γ το νερό ρέει με ταχύτητα $υ_1$.
Στο σημείο Δ το νερό έχει εμβαδό διατομής A_2 :
$A_2 = π·r_2^2 \Rightarrow A_2 = π·(δ_2 / 2)^2$.

και στο σημείο Δ το νερό ρέει με ταχύτητα υ_2 *.*
Ισχύει : $\delta_1 / \delta_2 = 30 \cdot 10^{-2} / (10 \cdot 10^{-2}) \Rightarrow$
$\delta_1 / \delta_2 = 3 \ldots (I)$ *.*

Εφαρμόζουμε την εξίσωση της συνέχειας στα σημεία Γ και Δ :
$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \pi \cdot (\delta_1 / 2)^2 \cdot \upsilon_1 = \pi \cdot (\delta_2 / 2)^2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_1 \cdot (\delta_1 / \delta_2)^2 \Rightarrow$
από την σχέση (Ι) ,
$\upsilon_2 = 3^2 \cdot \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2 = 9 \cdot \upsilon_1 \ldots (II)$ *.*
Ισχύει :
$\Delta P = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow P_1 - P_2 = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow P_1 = P_2 + \rho \cdot g \cdot h \ldots (III)$ *.*
Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα συνευθειακά σημεία Γ και Δ :

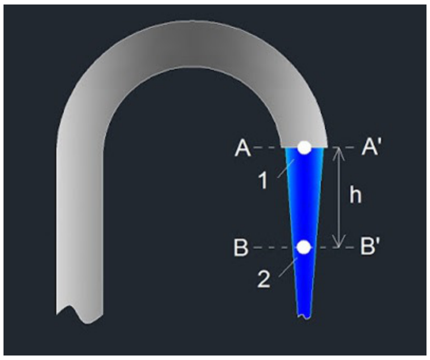


$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow$
τα σημεία Α και Γ είναι συνευθειακά , άρα $h_1 = h_2$ *,*
από την σχέση (ΙΙ) ,
$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (9 \cdot \upsilon_1)^2 \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot 81 \cdot \upsilon_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 \Rightarrow$
από την σχέση (ΙΙΙ) ,
$(P_2 + \rho \cdot g \cdot h) - P_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot 80 \cdot \upsilon_1^2 \Rightarrow \rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot 80 \cdot \upsilon_1^2 \Rightarrow$
$\upsilon_1^2 = g \cdot h / 40 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{(g \cdot h / 40)} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{(10 \cdot 1{,}6 / 40)} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{(16 / 40)} \Rightarrow$
$\upsilon_1 = 0{,}63$ m / s .

β. *Η παροχή του αγωγού Π :*
(σε οποιαδήποτε διατομή , λόγω της εξίσωσης συνέχειας)
$\Pi = A_1 \cdot \upsilon_1 \Rightarrow \Pi = \pi \cdot (\delta_1 / 2)^2 \cdot \upsilon_1 \Rightarrow \Pi = 3{,}14 \cdot (0{,}3 / 2)^2 \cdot 0{,}63 \Rightarrow$
$\Pi = 0{,}044\ m^3 / s$ ή $44 \cdot 10^{-3}\ m^3 / s$.

άσκηση 31 Εξίσωση της συνέχειας – εξίσωση του Bernoulli – Η βρύση ΙΙ

Όταν πάει κάποιος σε μία βρύση για να πλύνει τα χέρια του ή το πρόσωπο του μπορεί να παρατηρήσει πως η φλέβα νερού που δημιουργείται μετά το άνοιγμα της βρύσης έχει μεταβλητό πάχος. Συγκεκριμένα όσο απομακρύνεται το νερό από την βρύση τόσο μικρότερη διάμετρο έχει η φλέβα. Στην ανάρτηση αυτή θα δούμε μία εφαρμογή που εξηγεί το φαινόμενο αυτό.
σχήμα 1, μία φλέβα νερού «τρέχει» από μία βρύση. Η απόσταση των διατομών ΑΑ' και ΒΒ' είναι h.



Έχουμε, λοιπόν, την βρύση του σχήματος 1 η οποία δημιουργεί μία φλέβα νερού. Καθώς το νερό κατευθύνεται προς τα κάτω η διατομή της φλέβας μειώνεται. Αν $\delta_1 = 0.5$ cm *είναι η διάμετρος της φλέβας στην διατομή ΑΑ΄ , δηλαδή μόλις το νερό εξέρχεται από την βρύση ,* *βρείτε την διάμετρο δ_2 της φλέβας στην διατομή ΒΒ΄ . Ως δεδομένα χρησιμοποιήστε πως η απόσταση αυτών των δύο διατομών είναι h = 5 cm και πως η ταχύτητα του ρευστού στην διατομή ΑΑ΄ είναι ίση με u_1 = 1 m / s.*

σχήμα 1, μία φλέβα νερού "τρέχει" από μία βρύση. Η απόσταση των διατομών ΑΑ' και ΒΒ' είναι h.

Για να βρούμε μία σχέση μεταξύ των δ_1 και δ_2 αρκεί να σκεφτούμε πως για την φλέβα νερού ισχύει η εξίσωση συνέχειας. Δηλαδή αν Π_1 είναι η παροχή στην διατομή ΑΑ' και Π_2 είναι η παροχή στην διατομή ΒΒ' έχουμε

$$\Pi_1=\Pi_2 \quad (1)$$

Από τον ορισμό της παροχής γνωρίζουμε πως η παροχή Π σε μία διατομή ισούται με την ταχύτητα του ρευστού u σε αυτή την διατομή επί το εμβαδόν Α της διατομής, δηλαδή

$$\Pi=uA$$

Αν συγκεκριμένα αναφερόμαστε σε κυκλικές διατομές, ισχύει

$$\Pi=u\frac{\pi\delta^2}{4}$$

όπου δ είναι η διάμετρος της διατομής (προσοχή μην γίνει μπέρδεμα του π=3.14... και της παροχής Π).

Επομένως, εάν με u_2 συμβολίσουμε την ταχύτητα του νερού στην διατομή ΒΒ' αντίστοιχα, η εξίσωση (1) γίνεται

$$u_1\frac{\pi\delta_1^2}{4}=u_2\frac{\pi\delta_2^2}{4} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2=\frac{u_2}{u_1} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_2}=\sqrt{\frac{u_2}{u_1}} \quad (2)$$

Όποτε από την εξίσωση (2) γίνεται φανερό πως στην περίπτωση που θέλουμε να βρούμε μία σχέση μεταξύ των δ_1 και δ_2 πρέπει να συσχετίσουμε τα u_1 και u_2. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε με την εξίσωση Bernoulli. Έτσι αν θεωρήσουμε πως έχουμε δύο σημεία 1 και 2 τα οποία κατ' αντιστοιχία βρίσκονται πάνω στις διατομές ΑΑ' και ΒΒ', η εξίσωση Bernoulli γράφεται

$$p_1+\frac{1}{2}\rho u_1^2+\rho g z_1=p_2+\frac{1}{2}\rho u_2^2+\rho g z_2 \quad (3)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του νερού, z_1 και z_2 οι υψομετρικές θέσεις των σημείων 1 και 2 και p_1 και p_2 είναι οι πιέσεις των σημείων 1 και 2. Η εξίσωση (3) απλοποιείται καθώς η πίεση στα σημεία 1 και 2 είναι ατμοσφαιρική και ως εκ τούτου μηδενική. Δηλαδή έχουμε

$$p_1=p_2=0$$

Επίσης, η υψομετρική διαφορά των σημείων 1 και 2 είναι ίση με h οπότε ισχύει

$$z_1-z_2=h \quad (4)$$

Συνεπώς, η εξίσωση (3) γράφεται

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2=\frac{1}{2}\rho u_2^2+\rho g(z_2-z_1)$$

Αν όμως διαιρέσουμε κατά μέλη με το ρ/2 και λάβουμε υπόψιν μας την εξίσωση (4) προκύπτει

$$u_1^2=u_2^2-2gh \quad (5)$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2) και (5) προκύπτει η σχέση

$$\frac{\delta_1}{\delta_2}=\sqrt{\frac{\sqrt{u_1^2+2gh}}{u_1}}$$

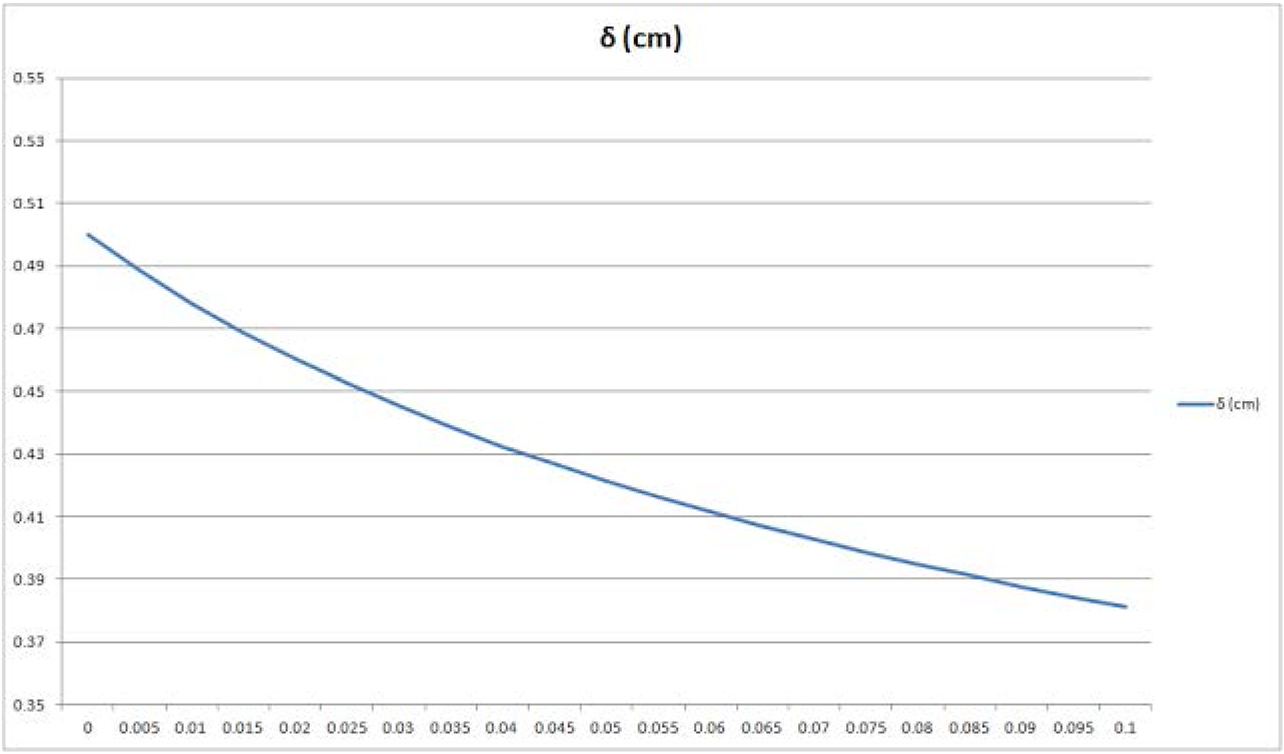
Έτσι η διάμετρος δ_2 ισούται με

$$\delta_2=\frac{\delta_1}{\sqrt{\frac{\sqrt{u_1^2+2gh}}{u_1}}} \quad (6)$$

Κάνοντας αντικατάσταση αριθμητικές τιμές στην σχέση (6) προκύπτει πως

$$\delta_2=\frac{0.5cm}{\sqrt{\frac{\sqrt{(1m/s)^2+2\cdot(9.81m/s)\cdot 0.05m}}{1m/s}}}=0.42 \ \ cm$$

Το συμπέρασμα από την παραπάνω ανάλυση είναι το εξής: Καθώς το νερό πέφτει η ταχύτητα του αυξάνεται. Έτσι η διατομή της φλέβας συνεχώς μειώνεται ώστε να διατηρηθεί η παροχή σταθερή. Αυτό μπορεί να γίνει φανερό κάνοντας την γραφική παράσταση της διαμέτρου δ σε ένα σημείο της φλέβας συναρτήσει του h (σχήμα 2) με την βοήθεια της σχέσης (6).



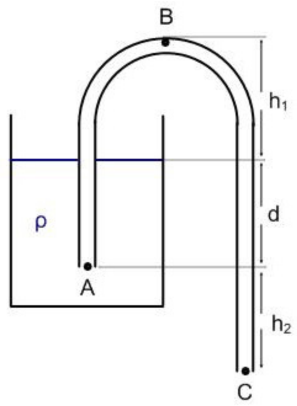
σχήμα 2, η γραφική παράσταση της διαμέτρου δ συναρτήσει του h.

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί πως στην διεθνή βιβλιογραφία η παροχή συνηθίζεται να συμβολίζεται με Q και οι διάμετροι με D.

άσκηση 32 Σωλήνας αναρρόφησης

Το σχήμα δείχνει ένα σωλήνα αναρρόφησης , μια απλή συσκευή για να τραβήξουμε υγρό από ένα δοχείο . Ο σωλήνας ABC πρέπει να είναι αρχικά γεμάτος , αλλά όταν επιτευχθεί αυτό , υγρό θα ρέει από αυτόν έως ότου η επιφάνεια του υγρού στο δοχείο ισοσταθμιστεί με το άνοιγμα A του σωλήνα .

Το υγρό έχει πυκνότητα 10^3 kg / m³ και αμελητέο ιξώδες . Οι αποστάσεις που φαίνονται στο σχήμα είναι h_1 = 25 cm , d = 10 cm και h_2 = 40 cm .



***α.** Με πόση ταχύτητα εξέρχεται το υγρό από το σωλήνα στο C ,*

***β.** Αν η ατμοσφαιρική πίεση είναι 10^5 Pa , πόση είναι η πίεση στο υγρό στο πιο ψηλό σημείο B της διαδρομής ;*

***γ.** Θεωρητικά πόσο είναι το μέγιστο δυνατό ύψος h_1 στο οποίο ένας σωλήνας αναρρόφησης μπορεί να ανυψώσει το νερό ;*

Δίνεται g = 10 m / s² .

Λύση

***α.**Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία A και C :*

$P_A + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_A^2 + \rho\cdot g\cdot h_2 = P_C + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_C^2 + 0 \Rightarrow$

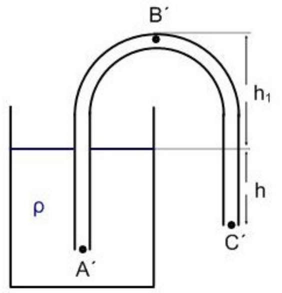
όμως $\upsilon_A = 0$ *(αρχική ταχύτητα) , επίσης* $P_A = P_{at} + \rho\cdot g\cdot d$ *και* $P_C = P_{at}$,

$P_{at} + \rho\cdot g\cdot d + \rho\cdot g\cdot h_2 = P_{at} + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_C^2 \Rightarrow ½\cdot\rho\cdot\upsilon_C^2 = \rho\cdot g\cdot(d + h_2) \Rightarrow \upsilon_C = \sqrt{[2\cdot g\cdot(d + h_2)]} \Rightarrow$

$\upsilon_C = \sqrt{[2\cdot 10\cdot(0{,}1 + 0{,}4)]} \Rightarrow \upsilon_C = \sqrt{10}\ m/s$.

β. *Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία B και C :*
$P_B + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_B{}^2 + \rho\cdot g\cdot(h_1 + d + h_2) = P_C + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_C{}^2 + 0 \ldots (1)$.
Επειδή η διατομή του σωλήνα είναι σταθερή $A_B = A_C$ *από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε :*
$A_B\cdot\upsilon_B = A_C\cdot\upsilon_C \Rightarrow \upsilon_B = \upsilon_C$.
Ισχύει $P_C = P_{at}$.
Άρα η σχέση (1) :
$P_B + \rho\cdot g\cdot(h_1 + d + h_2) = P_{at} \Rightarrow P_B = P_{at} - \rho\cdot g\cdot(h_1 + d + h_2) \Rightarrow$
$P_B = 10^5 - 10^3\cdot 10\cdot 0{,}75 \Rightarrow P_B = (1 - 0{,}075)\cdot 10^5\ Pa \Rightarrow P_B = 0{,}925\cdot 10^5\ Pa$.
Η P_B *είναι 7,5 % μικρότερη της* P_{at} .

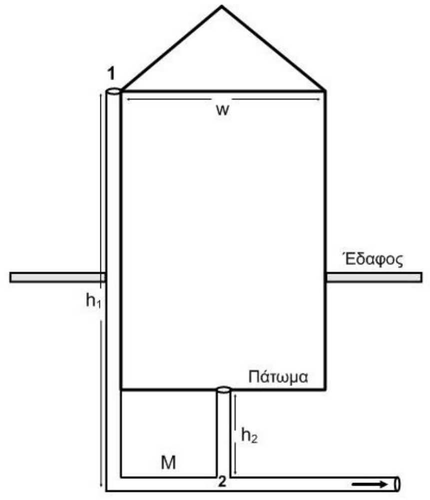
γ. *Αντιμετωπίζουμε το ερώτημα θεωρητικά και γενικά .*



Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία B΄ και C΄ (άκρο εξόδου του νερού) :
$P_B{}' + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_B{}'^2 + \rho\cdot g\cdot(h_1{}' + h) = P_C{}' + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_C{}'^2 + 0 \ldots (2)$.
$P_C{}' = P_{at}$ *και* $\upsilon_B{}' = \upsilon_C{}'$ *γιατί ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή και από την εξίσωση της συνέχειας :*
$A_B{}'\cdot\upsilon_B{}' = A_C{}'\cdot\upsilon_C{}' \Rightarrow A_B{}' = A_C{}'$,
$\upsilon_B{}' = \upsilon_C{}'$.
Από την σχέση (2) με την αντικατάσταση των σχέσεων :
$P_B{}' + \rho\cdot g\cdot(h_1{}' + h) = P_{at} \Rightarrow \rho\cdot g\cdot h_1{}' = P_{at} - P_B{}' - \rho\cdot g\cdot h \Rightarrow$
$h_1{}' = [P_{at} - P_B{}' - \rho\cdot g\cdot h] / (\rho\cdot g)$.
Το $h_1{}'$ *γίνεται μέγιστο όταν το* $P_B{}'$ *τείνει στο μηδέν όπως και το h . Δηλαδή το άκρο εξόδου του νερού C΄ πρέπει να βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με την ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο δοχείο .*
$h_{1,max}{}' = P_{at} / (\rho\cdot g) \Rightarrow h_{1,max}{}' = 10^5 / (10^3\cdot 10) \Rightarrow$
$h_{1,max}{}' = 10\ m$.

άσκηση 33 Σύστημα ομβρίων υδάτων σπιτιού

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ένα πολύ απλουστευμένο διάγραμμα του συστήματος των ομβρίων υδάτων ενός σπιτιού .
Το νερό της βροχής που πέφτει στην κεκλιμένη στέγη συγκεντρώνεται σε υδρορροές γύρω από τα άκρα της στέγης κατόπιν αποστραγγίζεται από κατακόρυφες υδρορροές (φαίνεται μόνο μία στο σχήμα) στον κυρίως αποχετευτικό σωλήνα M κάτω από το υπόγειο , ο οποίος με τη σειρά του μεταφέρει το νερό σε μεγαλύτερο σωλήνα κάτω από το δρόμο .
Στο σχήμα φαίνεται ένα ακόμη στόμιο – φρεατίου στο υπόγειο να είναι συνδεδεμένο με την αποχέτευση M .
Υποθέστε ότι ισχύουν τα ακόλουθα :



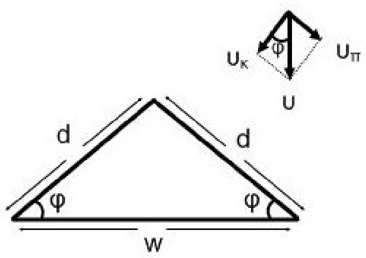
1. Οι κατακόρυφες υδρορροές έχουν ύψος $h_1 = 6$ m .
2. Η αποχέτευση στο δάπεδο έχει ύψος $h_2 = 1$ m .
3. Ο σωλήνας Μ έχει ακτίνα 3 cm .
4. Το σπίτι έχει πλάτος $w = 30$ m και μήκος $L = 60$ m .
5. Όλο το νερό που πέφτει στη στέγη καταλήγει στον σωλήνα Μ .
6. Η αρχική ταχύτητα του νερού σε κάθε κατακόρυφη υδρορροή είναι αμελητέα .
7. Η ταχύτητα του ανέμου είναι αμελητέα (η βροχή πέφτει κατακόρυφα) .

Με ποιο ρυθμό βροχόπτωσης , σε εκατοστά ανά ώρα , το νερό στο σωλήνα Μ θα φτάσει στο ύψος του στομίου στο πάτωμα και θα απειλεί να πλημμυρίσει το υπόγειο ;
Δίνεται $g = 10$ m / s² , $\pi = 3,14$.

Λύση

Στη περίπτωση που το νερό φτάνει στο στόμιο ,
εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 :
$P_1 + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2 + \rho\cdot g\cdot h_1 = P_2 + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 + \rho\cdot g\cdot 0 \Rightarrow$
όπου $P_1 = P_{at}$ και $\upsilon_1 = 0$,
$P_{at} + \rho\cdot g\cdot h_1 = P_2 + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 \Rightarrow$
(θεωρούμε το νερό στο σωλήνα ύψους h_2 σε ηρεμία , η πίεση στο σημείο 2 είναι
$P_2 = P_{at} + \rho\cdot g\cdot h_2$) ,
$P_{at} + \rho\cdot g\cdot h_1 = P_{at} + \rho\cdot g\cdot h_2 + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 \Rightarrow ½\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 = \rho\cdot g\cdot h_1 - \rho\cdot g\cdot h_2 \Rightarrow$
$½\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 = \rho\cdot g\cdot(h_1 - h_2) \Rightarrow ½\cdot\upsilon_2^2 = g\cdot(h_1 - h_2) \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{[2\cdot g\cdot(h_1 - h_2)]} \Rightarrow$
$\upsilon_2 = \sqrt{[2\cdot 10\cdot(6 - 1)]} \Rightarrow \upsilon_2 = 10$ m / s .
Η παροχή του σωλήνα Μ είναι και η παροχή της βροχόπτωσης γιατί όλο το νερό από την στέγη καταλήγει στον σωλήνα Μ .
$dV / dt = A_M\cdot\upsilon_2 \Rightarrow dV / dt = \pi r^2\cdot\upsilon_2 \Rightarrow dV / dt = 3,14\cdot(3\cdot 10^{-2})^2\cdot 10 \Rightarrow$
$dV / dt = 3,14\cdot 9\cdot 10^{-3}$ m³ / s .
Αυτή είναι και η παροχή της βροχόπτωσης .
Πρέπει να σημειώσουμε ότι η επιφάνεια που είναι κάθετη στην ταχύτητα της βροχής είναι :
$A_{\Sigma\pi\iota\tau} = w\cdot L \Rightarrow A_{\Sigma\pi\iota\tau} = 30\cdot 60 \Rightarrow A_{\Sigma\pi\iota\tau} = 1800$ m² .
Επομένως :
$dV / dt = A_{\Sigma\pi\iota\tau}\cdot(dy / dt) \Rightarrow dy / dt = (1 / A_{\Sigma\pi\iota\tau})\cdot(dV / dt) \Rightarrow dy / dt = (1 / 18\cdot 10^2)\cdot 3,14\cdot 9\cdot 10^{-3} \Rightarrow$
$dy / dt = 1,57\cdot 10^{-5}$ m / s $\Rightarrow dy / dt = 1,57\cdot 10^{-5}\cdot[100$ cm / (1 / 3600) h] $\Rightarrow$
$dy / dt = 1,57\cdot 36\cdot 10^{-1}$ cm / h $\Rightarrow dy / dt = 5,652$ cm / h , ο ρυθμός βροχόπτωσης .

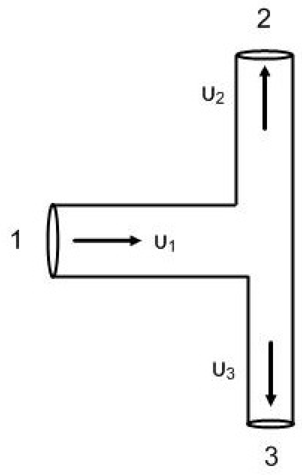
Παρατήρηση



$dV / dt = A\cdot\upsilon_\kappa \Rightarrow$
$(\sigma\upsilon\nu\ \varphi = \upsilon_\kappa / \upsilon \Rightarrow \upsilon_\kappa = \upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\ \varphi)$
$dV / dt = 2\cdot d\cdot L\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\ \varphi \Rightarrow$
$[\sigma\upsilon\nu\ \varphi = (w / 2) / d \Rightarrow d = w / (2\cdot\sigma\upsilon\nu\ \varphi)]$
$dV / dt = 2\cdot[w / (2\cdot\sigma\upsilon\nu\ \varphi)]\cdot L\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\ \varphi \Rightarrow$
$dV / dt = w\cdot L\cdot\upsilon$.

άσκηση 34 Διακλάδωση Τ αγωγών

Ο αγωγός 1 με εμβαδό διατομής 10 cm² στο σχήμα μεταφέρει νερό με ταχύτητα 8 m / s και διακλαδίζεται με ένα οριζόντιο – τύπου Τ στον αγωγό 2 με εμβαδό διατομής 6 cm² και τον αγωγό 3 με εμβαδό διατομής 4 cm² .



Η πίεση του νερού στην έξοδο του αγωγού 3 είναι 100 kPa και ταχύτητα 9 m / s .

Να υπολογιστούν :

α. *Η πίεση του νερού στην είσοδο του αγωγού 1 ,*

β. *Η ταχύτητα του νερού στην έξοδο του αγωγού 2 ,*

γ. *Η πίεση του νερού στην έξοδο του αγωγού 2 .*

Υποθέτουμε ότι η ροή είναι στρωτή *, δηλαδή δεν παρουσιάζει στροβίλους στο ιδανικό ρευστό (νερό) που κινείται μέσα στο σωλήνα (κάτι που δεν ισχύει βέβαια στη πραγματικότητα) .*

Λύση

α. *Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τους αγωγούς 1 και 3 :*

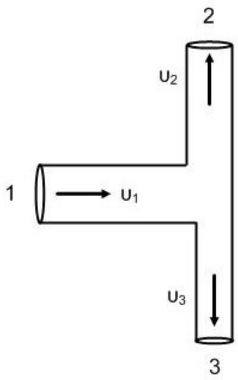
$P_1 + ½·ρ·υ_1^2 + ρ·g·y_1 = P_3 + ½·ρ·υ_3^2 + ρ·g·y_3 \Rightarrow y_1 = y_3 = 0$,

$P_1 + ½·ρ·υ_1^2 = P_3 + ½·ρ·υ_3^2 \Rightarrow P_1 = P_3 + ½·ρ·(υ_3^2 – υ_1^2) \Rightarrow$

$P_1 = 10^5 + ½·10^3·(9^2 – 8^2) \Rightarrow P_1 = 10^5 + ½·10^3·17 \Rightarrow P_1 = 100·10^3 + 8{,}5·10^3 \Rightarrow$

$P_1 = 108{,}5$ kPa .

β. *Το νερό είναι ασυμπίεστο , άρα σε χρόνο Δt :*



$dV_1 = dV_2 + dV_3 \Rightarrow dV_1 / dt = (dV_2 / dt) + (dV_3 / dt) \Rightarrow A_1·υ_1 = A_2·υ_2 + A_3·υ_3 \Rightarrow$

$A_2·υ_2 = A_1·υ_1 – A_3·υ_3 \Rightarrow υ_2 = (A_1·υ_1 – A_3·υ_3) / A_2 \Rightarrow$

οι μετατροπές των μονάδων δεν είναι απαραίτητες γιατί απλοποιούνται ,

$υ_2 = (10·8 – 4·9) / 6 \Rightarrow υ_2 = 7{,}33$ m / s .

γ. *Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τους αγωγούς 1 και 2 :*

$P_1 + ½·ρ·υ_1^2 + ρ·g·y_1 = P_2 + ½·ρ·υ_2^2 + ρ·g·y_2 \Rightarrow$

$y_1 = y_2 = 0$,

$P_1 + ½·ρ·υ_1^2 = P_2 + ½·ρ·υ_2^2 \Rightarrow$

$P_2 = P_1 + ½·ρ·(υ_1^2 – υ_2^2) \Rightarrow$

$P_2 = 108{,}5·10^3 + ½·10^3·(64 – 53{,}7) \Rightarrow$

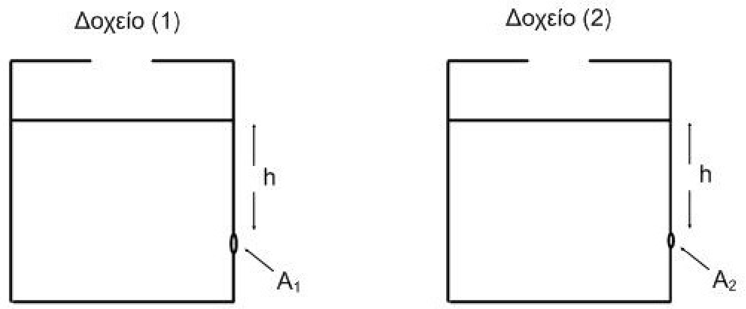
$P_2 = 108{,}5·10^3 + 5{,}2·10^3 \Rightarrow$

$P_2 = 113{,}7$ kPa .

άσκηση 35 Ροή μάζας – ρυθμός μείωσης της μάζας εξαιτίας εκροής

Υποθέστε ότι δύο δοχεία το καθένα με ένα μεγάλο άνοιγμα στην κορυφή περιέχουν διαφορετικά υγρά . Μια μικρή τρύπα ανοίγεται στο πλευρό του καθενός δοχείου στην ίδια απόσταση h κάτω από την επιφάνεια του υγρού . Η μία τρύπα όμως έχει διπλάσια διατομή από την άλλη ($A_1 = 2·A_2$).

***Α.α.** Ποια η σχέση μεταξύ των παροχών όγκου .*
***β.** Ποιος ο λόγος των πυκνοτήτων των ρευστών αν παρατηρείται ότι η ροή μάζας είναι ίδια για κάθε τρύπα .*
***γ.** Τι πρέπει να κάνουμε για να γίνουν οι παροχές όγκου ίσες .*



***Β.**Αν για τις αρχικές διατομές όπου $A_1 = 2·A_2$ μεταβάλλουμε την απόσταση h της μιας τρύπας από την επιφάνεια του υγρού (π.χ. προσθέτουμε ή αφαιρούμε υγρό) έτσι ώστε $h_2 = 4·h_1$ τότε η σχέση για τις παροχές όγκου είναι :*
***α.** $Π_1 = Π_2$,   **β.** $Π_1 = 2·Π_2$,   **γ.** $Π_2 = 2·Π_1$.*
Να βρεθεί η σωστή επιλογή και να αιτιολογηθεί .

Λύση

***α.** Δοχείο (1) ρευστό πυκνότητας $ρ_1$, διατομής τρύπας A_1 , σε χρόνο dt εκρέει ρευστό μάζας dm_1 και όγκου dV_1 .*
Δοχείο (2) ρευστό πυκνότητας $ρ_2$, διατομής τρύπας A_2 , σε χρόνο dt εκρέει ρευστό μάζας dm_2 και όγκου dV_2 .
Επίσης : $A_1 = 2·A_2$,
$Π_1 = dV_1 / dt$ και $Π_2 = dV_2 / dt$.
Από το θεώρημα του Torricelli :
$υ_1 = υ_2 = \sqrt{(2·g·h)}$.
Ισχύει :
$Π_1 = A_1·υ_1$. $Π_2 = A_2·υ_2$.
Διαιρούμε κατά μέλη τις δύο σχέσεις :
$Π_1 / Π_2 = (A_1·υ_1) / (A_2·υ_2) \Rightarrow$ (όπου $υ_1 = υ_2$, $A_1 = 2·A_2$) $Π_1 / Π_2 = (2·A_2) / A_2 \Rightarrow$
$Π_1 / Π_2 = 2$.

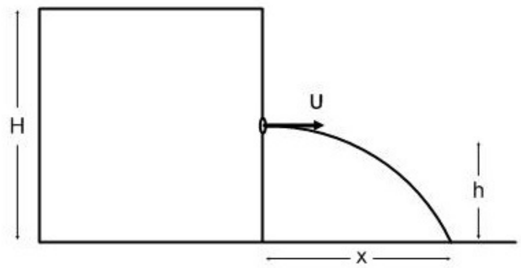
***β.** $dm_1 / dt = ρ_1·(dV_1 / dt) \Rightarrow dm_1 / dt = ρ_1·Π_1$, ροή μάζας (1) .*
$dm_2 / dt = ρ_2·(dV_2 / dt) \Rightarrow dm_2 / dt = ρ_2·Π_2$, ροή μάζας (2) .
$dm_1 / dt = dm_2 / dt \Rightarrow ρ_1·Π_1 = ρ_2·Π_2 \Rightarrow ρ_1 / ρ_2 = Π_2 / Π_1 \Rightarrow$
$ρ_1 = ρ_2 / 2$.

***γ.** Για να γίνουν οι παροχές όγκου ίσες πρέπει $A_1 = A_2΄$, άρα πρέπει να ανοίξουμε περισσότερο την τρύπα (2) .*

Β. $\Pi_1 = A_1 \cdot \upsilon_1$ *και* $\Pi_2 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$
$[\upsilon_1 = \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_1)}$ *και* $\upsilon_2 = \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_2)}]$
$\Pi_1 = A_1 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_1)}$ *και* $\Pi_2 = A_2 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_2)}$,
διαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις :
$\Pi_1 / \Pi_2 = A_1 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_1)} / \{A_2 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_2)}\} \Rightarrow$ (*ισχύει* $h_2 = 4 \cdot h_1$ *και* $A_1 = 2 \cdot A_2$)
$\Pi_1 / \Pi_2 = A_1 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_1)} / \{A_2 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot 4 \cdot h_1)}\} \Rightarrow \Pi_1 / \Pi_2 = 1 \Rightarrow$
$\Pi_1 = \Pi_2$, *σωστή η επιλογή α .*

άσκηση 36 Θεώρημα Torricelli – Ταχύτητα εκροής , μέγιστη απόσταση

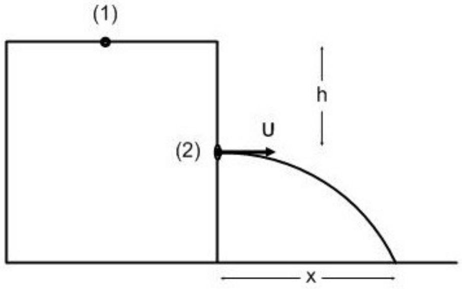
Κυλινδρικό δοχείο ύψους Η είναι γεμάτο με υγρό που θεωρείται ιδανικό .
Σε ποιο ύψος από το έδαφος πρέπει να ανοίξουμε μια τρύπα έτσι ώστε το υγρό που εκρέει να φτάσει στην μέγιστη δυνατή απόσταση από την κατακόρυφο που περνάει από την οπή ;



Λύση

Το υγρό που εκρέει από την οπή έχει οριζόντια ταχύτητα υ και το υγρό εκτελεί οριζόντια βολή .
Άρα ισχύει :
$x = \upsilon \cdot t$
και
$h = ½ \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow$
$t = \sqrt{(2 \cdot h / g)}$.
Από το θεώρημα του Torricelli :
(Η απόδειξη του θεωρήματος του Torricelli βρίσκεται στο κάτω μέρος)
$\upsilon = \sqrt{[2 \cdot g \cdot (H - h)]}$.
Άρα :
$x = \upsilon \cdot t \Rightarrow x = \sqrt{[2 \cdot g \cdot (H - h)]} \cdot \sqrt{(2 \cdot h / g)}$,
υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο :
$x^2 = 4 \cdot g \cdot (H - h) \cdot (h / g) \Rightarrow x^2 = 4 \cdot (H - h) \cdot h \Rightarrow x^2 = 4 \cdot H \cdot h - 4 \cdot h^2 \Rightarrow 4 h^2 - 4 \cdot H \cdot h + x^2 = 0$.
Για να λυθεί το τριώνυμο ως προς h πρέπει $\Delta \geq 0$ *, άρα :*
$\beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma \geq 0 \Rightarrow 16 \cdot H^2 - 4 \cdot 4 \cdot x^2 \geq 0 \Rightarrow 16 x^2 \leq 16 \cdot H^2 \Rightarrow x \leq H$.
Δηλαδή $x_{max} = H$.
Στο τριώνυμο $4 \cdot h^2 - 4 \cdot H \cdot h + x^2 = 0$ *θέτουμε* $x = x_{max} = H$:
$4 \cdot h^2 - 4 \cdot H \cdot h + H^2 = 0$. $h_{1,2} = (4 \cdot H \pm \sqrt{\Delta}) / (2 \cdot 4)$.
Το $\Delta = 0$ *για* $x = H$,
$h_{1,2} = H / 2$.
Αν χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο :
$g(h) = x^2 = 4 \cdot H \cdot h - 4 \cdot h^2$.
Η συνάρτηση έχει μέγιστο όταν :
$d\, g(h) / dh = 0 \Rightarrow d\, g(h) / dh = 4 \cdot H - 2 \cdot 4 \cdot h \Rightarrow 0 = 4 \cdot H - 8 \cdot h \Rightarrow$
$h = H / 2$.

Απόδειξη του θεωρήματος του Torricelli :



Για τα σημεία (1) και (2) εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli :

$P_1 + ½·ρ_υ·υ_1^2 + ρ_υ·g·h = P_2 + ½·ρ_υ·υ_2^2$.

Από την εξίσωση της συνέχειας :

$A_1·υ_1 = A_2·υ_2 \Rightarrow υ_1^2 = (A_2^2 / A_1^2)·υ_2^2$.

Επειδή $A_2^2 / A_1^2 << 1$ *το* $υ_1^2 << 1$ *και μπορεί να παραληφθεί .*

Επίσης $P_1 = P_2 = P_{at}$,

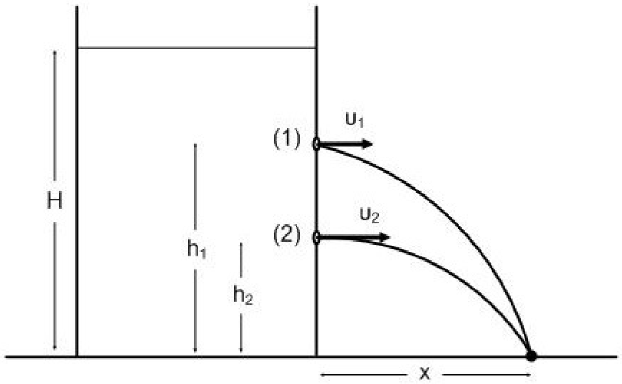
Άρα :

$ρ_υ·g·h = ½·ρ_υ·υ_2^2 \Rightarrow υ_2 = \sqrt{(2·g·h)}$.

άσκηση 37 Θεώρημα Torricelli – Εξίσωση της υδροστατικής

Κυλινδρικό δοχείο ύψους H είναι γεμάτο με υγρό . Στην ίδια κατακόρυφο της πλευρικής κυλινδρικής επιφάνειας ανοίγουμε δύο τρύπες που απέχουν από το έδαφος αποστάσεις h_1 *και* h_2 *έτσι ώστε το υγρό από τις δύο τρύπες να πέφτει στο ίδιο σημείο του εδάφους ; Δίνεται* $g = 10\ m / s^2$.

Λύση



Για το υγρό που εκρέει από την τρύπα (1) έχουμε : $x = υ_1·t_1$ … (I) ,

και

$h_1 = ½·g·t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{(2·h_1 / g)}$ … (II) .

Από το θεώρημα του Torricelli , έχουμε :

$υ_1 = \sqrt{[2·g·(H – h_1)]}$ … (III) .

Από την εξίσωση (I) με την βοήθεια των (II) και (III) :

$x = \sqrt{[2·g·(H – h_1)]}·\sqrt{(2·h_1 / g)}$ … (IV) .

Ομοίως για το υγρό που εκρέει από την τρύπα (2) έχουμε :

$x = υ_2·t_2$, $t_2 = \sqrt{(2·h_2 / g)}$ *και* $υ_2 = \sqrt{[2·g·(H – h_2)]}$.

επομένως

$x = \sqrt{[2·g·(H – h_2)]}·\sqrt{(2·h_2 / g)}$ … (V) .

Από τις εξισώσεις (IV) και (V) , τα πρώτα μέλη είναι ίσα , άρα :

$\sqrt{[2·g·(H – h_1)]}·\sqrt{(2·h_1 / g)} = \sqrt{[2·g·(H – h_2)]}·\sqrt{(2·h_2 / g)} \Rightarrow$

υψώνουμε στο τετράγωνο και κάνουν απλοποιήσεις , οπότε :

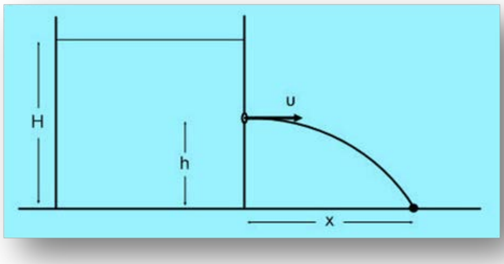
$(H – h_1)·h_1 = (H – h_2)·h_2 \Rightarrow H·h_1 – h_1^2 = H·h_2 – h_2^2 \Rightarrow H·h_1 – H·h_2 = h_1^2 – h_2^2 \Rightarrow$

$H·(h_1 – h_2) = (h_1 – h_2)·(h_1 + h_2) \Rightarrow h_1 \neq h_2$,

$h_1 + h_2 = H$.

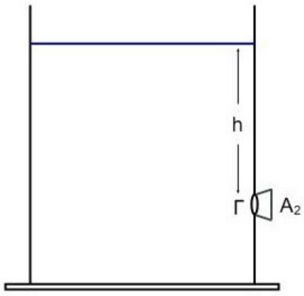
Λύνεται και γενικά αναζητώντας της λύσεις του τριωνύμου που σχηματίζεται , ως εξής :

$x = \upsilon\cdot t$, $t = \sqrt{(2\cdot h/g)}$ και $\upsilon = \sqrt{[2\cdot g\cdot(H-h)]}$.
επομένως $x = \sqrt{[2\cdot g\cdot(H-h)]}\cdot\sqrt{(2\cdot h/g)}$ $\Rightarrow$
Υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο .
$x^2 = 4\cdot(H-h)\cdot h \Rightarrow 4\cdot h^2 - 4\cdot H\cdot h + x^2 = 0$,
με ρίζες :
$h_1 = [H + \sqrt{(H^2 - x^2)}]/2$
και
$h_2 = [H - \sqrt{(H^2 - x^2)}]/2$
προσθέτουμε τις δύο ρίζες h_1 και h_2 κατά μέλη :
$h_1 + h_2 = H$.



άσκηση 38 Δύναμη από το ρευστό – Εξίσωση του Torricelli

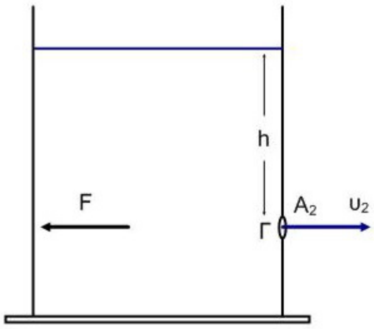
Στο δοχείο που φαίνεται στην εικόνα , περιέχεται υγρό αρχικής μάζας Μ και πυκνότητας ρ . Σε βάθος h υπάρχει τρύπα διατομής A_2 (πολύ μικρότερης από το εμβαδό διατομής του δοχείου) στην οποία υπάρχει ένας φελλός , ώστε να συγκρατείται το υγρό .
Η μάζα του δοχείου είναι m . Το δοχείο βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο .



Ξαφνικά ο φελλός εκτινάσσεται με αποτέλεσμα να αρχίσει η ροή υγρού από την τρύπα .
Ποια είναι η αρχική επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί το δοχείο ;
Δίνονται τα : A_2 , ρ , h και g , M και m .

Λύση

Ελάχιστα πριν εκτιναχθεί ο φελλός που βρίσκεται στο σημείο Γ , θεωρούμε ποσότητα μάζας Δm σε επαφή με τον φελλό . Αφού ο φελλός δεν έχει ακόμα εκτιναχθεί , η Δm ποσότητα μάζας έχει ταχύτητα μηδέν .
Ο φελλός εκτινάσσεται και θεωρούμε υ_2 την ταχύτητα της μάζας Δm με την οποία βγαίνει από την τρύπα .

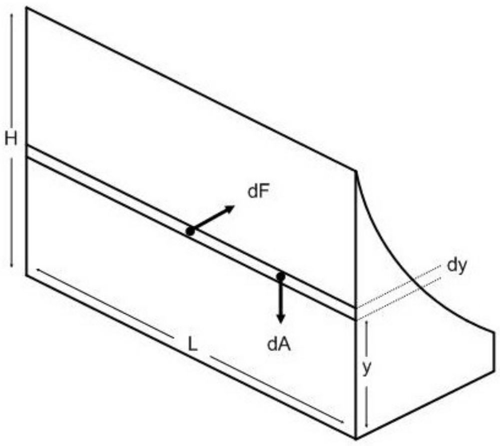


Επομένως η μεταβολή της ορμής της στην οριζόντια διεύθυνση θα είναι $\Delta P = \Delta m\cdot\upsilon_2$, σύμφωνα με το θεώρημα μεταβολής της ορμής η δύναμη που εξασκείται στη μάζα Δm από το υπόλοιπο υγρό και κατά επέκταση από το τοίχωμα του δοχείου που βρίσκεται απέναντι από την τρύπα είναι :
$F = \Delta P/\Delta t \Rightarrow$
$F = \Delta m\cdot\upsilon_2/\Delta t \Rightarrow$
$F = \rho\cdot(\Delta V/\Delta t)\cdot\upsilon_2 \Rightarrow$
η παροχή ορίζεται : $\Pi = \Delta V/\Delta t$,
$F = \rho\cdot\Pi\cdot\upsilon_2 \Rightarrow$
όπου $\Pi = A_2\cdot\upsilon_2$,
$F = \rho\cdot A_2\cdot\upsilon_2^2$.
Από το θεώρημα του Torricelli για το σημείο Γ :

$\upsilon_2 = \sqrt{(2 \cdot g \cdot h)}$.
Άρα :
$F = \rho \cdot A_2 \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow F = \rho \cdot A_2 \cdot (2 \cdot g \cdot h) \Rightarrow F = 2 \cdot \rho \cdot A_2 \cdot g \cdot h$.
Σύμφωνα με το αξίωμα δράσης – αντίδρασης και το νερό , μάζας Δm , καθώς εκτοξεύεται από την τρύπα εξασκεί πάνω στο τοίχωμα δύναμη αντίθετη από την F , οπότε το σύστημα θα αποκτήσει μια αρχική επιτάχυνση α :
$\alpha = F / (M + m) \Rightarrow$
$\alpha = (2 \cdot \rho \cdot A_2 \cdot g \cdot h) / (M + m)$ *, με φορά προς τα αριστερά .*

άσκηση 39 Υπολογισμός της ολικής δύναμης από το υγρό στην πλευρική επιφάνεια φράγματος και μέση πίεση

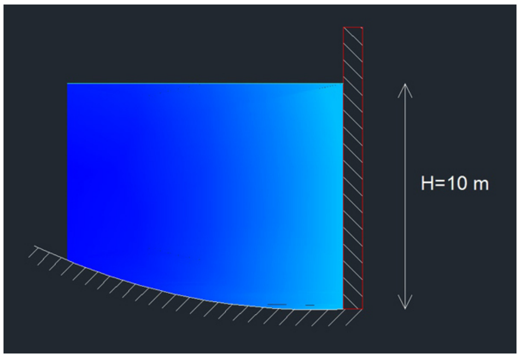
Στην στοιχειώδη επιφάνεια dA θεωρούμε ότι ασκείται δύναμη dF . Στην επιφάνεια την στοιχειώδη η πίεση έχει σταθερή τιμή $P = \rho \cdot g \cdot (H - y)$.
όπου $dA = L \cdot dy$.



Επομένως :
$dF = P \cdot dA$ *, με ολοκλήρωση :*
$\int_0^H dF = \int_0^H P \cdot dA \Rightarrow F_{ολ} = \int_0^H \rho \cdot g \cdot (H - y) \cdot L \cdot dy \Rightarrow$
$F_{ολ} = \int_0^H \rho \cdot g \cdot H \cdot L \cdot dy - \int_0^H \rho \cdot g \cdot L \cdot y \cdot dy \Rightarrow$
$F_{ολ} = \int_0^H \rho \cdot g \cdot H \cdot L \cdot dy - ½ \cdot \rho \cdot g \cdot L \cdot y^2 |_0^H \Rightarrow$
$F_{ολ} = \rho \cdot g \cdot L \cdot H^2 - ½ \cdot \rho \cdot g \cdot L \cdot H^2 \Rightarrow$
$F_{ολ} = ½ \cdot \rho \cdot g \cdot L \cdot H^2$.
Η μέση πίεση :
$P_\mu = F_{ολ} / A_{ολ} \Rightarrow P_\mu = ½ \cdot \rho \cdot g \cdot L \cdot H^2 / (L \cdot H) \Rightarrow$
$P_\mu = ½ \cdot \rho \cdot g \cdot H$.

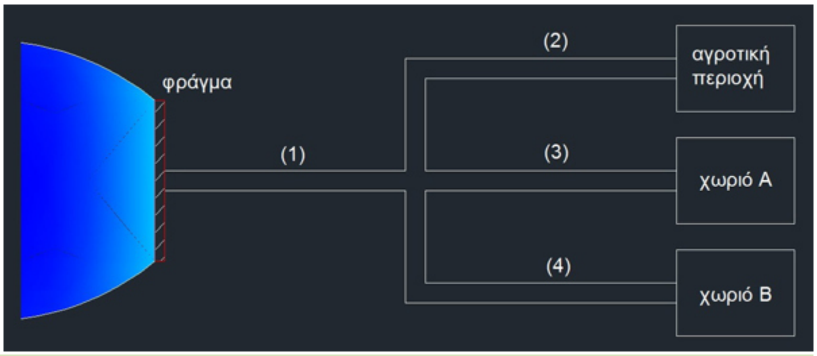
άσκηση 40 Δίκτυο διανομής νερού

Το νερό που φτάνει στα σπίτια μας ή το νερό που αρδεύει τις αγροτικές περιοχές συλλέγεται από την φύση . Με το πέρασμα των χρόνων ο άνθρωπος εξέλιξε διάφορες τεχνικές ώστε να συγκεντρώνει το νερό από την βροχή , από τα ποτάμια και από τον υδροφόρο ορίζοντα . Μετά την συλλογή του , το νερό αυτό με συστήματα αγωγών διανέμεται στις περιοχές όπου υπάρχει ανάγκη .



Σε αυτή την ανάρτηση θα δούμε μία εφαρμογή η οποία μελετάει ένα τέτοιο σύστημα .
Έστω πως έχουμε το ορθογωνικό φράγμα του σχήματος 1.
Η στάθμη του νερού μέσα στο φράγμα βρίσκεται στα H = 10 m και το πλάτος του (η διάσταση κάθετη στο σχήμα 1) είναι b = 50 m . Όταν δεν εκρέει νερό από το φράγμα υπολογίστε την συνολική δύναμη που δέχεται το φράγμα από το νερό .
σχήμα 1 , η στάθμη του νερού μέσα στο φράγμα είναι 10 m.
Έπειτα, το φράγμα συνδέεται με σύστημα τεσσάρων αγωγών όπως φαίνεται στο σχήμα 2

(δείτε παρακάτω) με αποτέλεσμα να αρχίσει η εκροή νερού από αυτό . Οι αγωγοί (2) , (3) και (4) τροφοδοτούν μία αγροτική περιοχή , το χωριό Α και το χωριό Β αντίστοιχα . Η αγροτική περιοχή έχει έκταση 100 στρέμματα , στο χωριό Α διαμένουν 1000 κάτοικοι ενώ στο χωριό Β διαμένουν 700 κάτοικοι . Έτσι αν για κάθε στρέμμα της αγροτικής περιοχής απαιτείται παροχή 3 m^3 / h και αν για κάθε κάτοικο των χωριών Α και Β απαιτείται παροχή 0,5 m^3 / h υπολογίστε :



- *την συνολική παροχή νερού που διαρρέει τον αγωγό (1) ώστε να αρδεύεται σωστά η αγροτική περιοχή και να υδρεύονται επαρκώς τα χωριά Α και Β ,*
- *τις διαμέτρους των αγωγών (1) , (2) , (3) και (4) αν η ταχύτητα του νερού μέσα στους αγωγούς είναι 1,5 m / s ,*
- *την πίεση στο σημείο σύνδεσης του αγωγού και του φράγματος συναρτήσει της στάθμης h του νερού ,*
- *σε ποιο ύψος στάθμης η πίεση στο σημείο σύνδεσης του αγωγού και του φράγματος μηδενίζεται .*

Ο αγωγός (1) είναι συνδεδεμένος με το φράγμα έτσι ώστε ο άξονας του να απέχει ύψος 1 m πάνω από την βάση του φράγματος . Επίσης, υποθέστε πως η ροή του νερού δεν εμποδίζεται εξαιτίας υψομετρικών διαφορών στο δίκτυο και πως όλοι οι αγωγοί είναι κυκλικής διατομής . Η πυκνότητα του νερού ισούται με ρ = 1000 kg / m^3 .

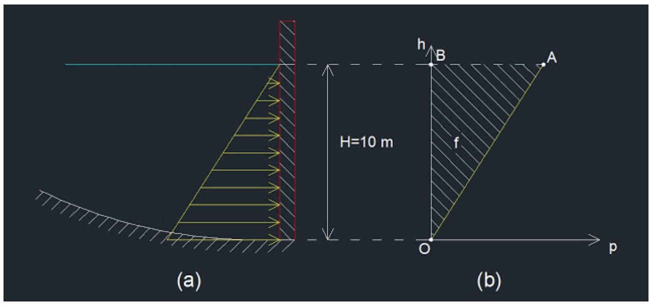
σχήμα 2 , φαίνεται το δίκτυο διανομής νερού από πάνω . Ένα τέτοιο σχέδιο ονομάζεται οριζοντιογραφία.

Ερώτημα 1

Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε την δύναμη που ασκεί το νερό στο φράγμα. Για να το πετύχουμε αυτό πρέπει να σκεφτούμε πως η υδροστατική πίεση p αυξάνεται γραμμικά με το βάθος h αφού ισχύει ο τύπος

$$p = \rho g h$$

Ως εκ τούτου σε κάθε σημείο του φράγματος η πίεση έχει διαφορετική τιμή. Έτσι η λύση στο πρόβλημα μας είναι να σχεδιάσουμε το διάγραμμα κατανομή πιέσεων πάνω στο φράγμα (σχήμα 3a).



σχήμα 3, (a) το διάγραμμα κατανομής πιέσεων πάνω στο φράγμα, (b) το διάγραμμα κατανομής πιέσεων τοποθετήθηκε σε ένα σύστημα αξόνων.

Το διάγραμμα κατανομής πιέσεων μπορεί να μεταφερθεί όμως σε ένα σύστημα αξόνων (σχήμα 3b). Οι άξονες του σχήματος 3b αντιπροσωπεύουν το βάθος h και την υδροστατική πίεση p. Οπότε το εμβαδόν ενός τέτοιου διαγράμματος έχει μονάδες δύναμης ανά μήκος αφού η πίεση μετριέται σε N/m^2 και το βάθος σε m. Δηλαδή

$$1\frac{N}{m^2}\cdot 1m=1\frac{N}{m}$$

Επομένως, το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ αντιπροσωπεύει την δύναμη ανά μονάδα πλάτους f που ασκείται στο φράγμα. Η πλευρά του τριγώνου ΟΒ ισούται με το ύψος της στάθμης του νερού και ως εκ τούτου (ΟΒ)=Η=10 m. Η πλευρά ΑΒ ισούται με την πίεση στο βάθος των 10 m. Έτσι

$$(AB)=p(10)=1000\frac{kg}{m^3}\cdot 9.8\frac{m}{s^2}\cdot 10m=98\ \ \frac{kN}{m^2}$$

Έτσι η δύναμη ανά μονάδα πλάτους που ασκείται στο φράγμα είναι ίση με

$$f=\frac{1}{2}\cdot(OB)\cdot(AB)=\frac{1}{2}\cdot 10m\cdot 98\frac{kN}{m^2}=490\ \ \frac{kN}{m}$$

Για να βρούμε την συνολική δύναμη F που ασκείται στο φράγμα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την δύναμη ανά μονάδα πλάτους f με το πλάτος b. Οπότε έχουμε

$$F=f\cdot b=490\frac{kN}{m}\cdot 50m=24.5\ \ MN$$

Συνεπώς το φράγμα δέχεται δύναμη μέτρου 24.5 MN.

Ερώτημα 2

Η αγροτική περιοχή χρειάζεται παροχή νερού ίση με την παροχή που απαιτείται για να αρδευτούν όλα τα στρέμματα της. Έτσι η παροχή Π_2 που διαρρέει τον αγωγό (2) ισούται με το γινόμενο της παροχής που απαιτείται για την άρδευση ενός στρέμματος επί τον αριθμό των στρεμμάτων της αγροτικής περιοχής. Συνεπώς

$$\Pi_2=3\frac{m^3}{h}\cdot 100=300\ \ \frac{m^3}{h}$$

Έπειτα, ο αγωγός (3) που αρδεύει το χωριό Α διαρρέεται από παροχή Π_3 ίση με το γινόμενο των αναγκών σε νερό του κάθε κατοίκου επί τον αριθμό των κατοίκων. Έτσι

$$\Pi_3=0.5\frac{m^3}{h}\cdot 1000=500\ \ \frac{m^3}{h}$$

Ομοίως, για τον αγωγό (4) ισχύει

$$\Pi_4=0.5\frac{m^3}{h}\cdot 700=350\ \ \frac{m^3}{h}$$

Έτσι από την εξίσωση της συνέχειας γνωρίζουμε πως για την παροχή Π_1 του αγωγού (1) ισχύει

$$\Pi_1=\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4=300\frac{m^3}{h}+500\frac{m^3}{h}+350\frac{m^3}{h}=1150\ \ \frac{m^3}{h}$$

Ερώτημα 3

Γνωρίζουμε πως η παροχή Π ενός αγωγού είναι ίση με το γινόμενο της ταχύτητας του νερού u μέσα στον αγωγό επί την διατομή Α του αγωγού. Για αγωγό κυκλικής διατομής ισχύει

$$A=\frac{\pi\delta^2}{4}$$

Έτσι η παροχή Π δίνεται από τον τύπο

$$\Pi = u\frac{\pi\delta^2}{4}$$

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε την παροχή Π και την ταχύτητα του νερού u μέσα στον αγωγό μπορούμε να υπολογίσουμε την διάμετρο του αγωγού από την σχέση

$$\delta = \sqrt{\frac{4\Pi}{u\pi}}$$

Στην περίπτωση μας η ταχύτητα u είναι ίση με 1.5 m/s και στους τέσσερις αγωγούς οπότε για τον αγωγό (1) έχουμε

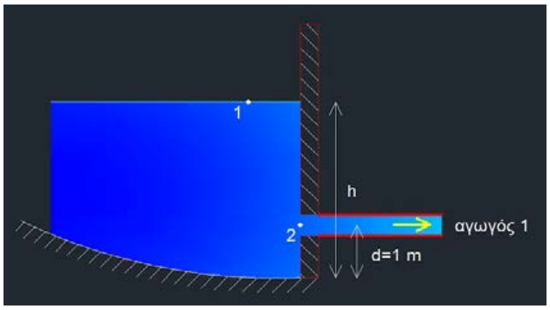
$$\delta_1 = \sqrt{\frac{4\Pi_1}{u\pi}} = \sqrt{\frac{4\cdot 1150\frac{m^3}{h}}{1.5\frac{m}{s}\pi}} = 0.52 \;\; m$$

Ομοίως, για τους άλλους αγωγούς προκύπτει

$$\delta_2 = 0.27 \;\; m$$
$$\delta_3 = 0.34 \;\; m$$
$$\delta_4 = 0.28 \;\; m$$

Ερώτημα 4

Γνωρίζουμε από τα δεδομένα πως ο αγωγός (1) συνδέεται με το φράγμα 1 m πάνω από την βάση του. Έτσι αν κάποια χρονική στιγμή η στάθμη του φράγματος είναι h προκύπτει το σχήμα 4.



Θεωρούμε τα σημεία 1 και 2 έτσι ώστε το σημείο 1 να βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού και το σημείο 2 να βρίσκεται πάνω στην σύνδεση αγωγού και φράγματος. Επομένως, εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 2 και έχουμε

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g d$$

Για να απλοποιήσουμε την παραπάνω εξίσωση αρκεί να σκεφτούμε πως η πίεση στο σημείο 1 είναι ατμοσφαιρική, δηλαδή ίση με μηδέν. Επίσης, η ταχύτητα του ρευστού στο σημείο 1 είναι μηδενική ενώ η ταχύτητα στο σημείο 2 είναι ίση με 1.5 m/s. Συνεπώς επιλύοντας την εξίσωση Bernoulli ως προς p_2 προκύπτει

$$p_2 = \rho g(h-d) - \frac{1}{2}\rho u_2^2 \;\; \Rightarrow$$
$$p_2 = 9800h - 10925 \;\; (S.I.)$$

Η παραπάνω συνάρτηση εκφράζει την σχέση του ύψους στάθμης του νερού h και της πίεσης στο σημείο 2, δηλαδή στο σημείο σύνδεσης του αγωγού και του φράγματος.

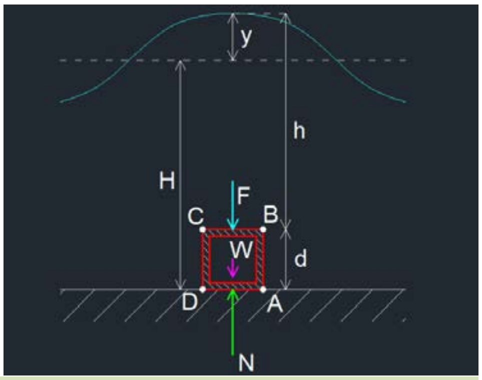
Ερώτημα 5

Για να βρούμε για ποιο h η πίεση στο σημείο 2 είναι ίση με μηδέν λύνουμε την εξίσωση

$$9800h - 10925 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; h = 1.11 \;\; m$$

Έτσι η πίεση για h>1.11 m είναι θετική (δηλαδή μεγαλύτερη της ατμοσφαιρικής) ενώ για h<1.11 m είναι αρνητική (δηλαδή μικρότερη της ατμοσφαιρικής).
Η παραπάνω εφαρμογή περιέχει πολλά στοιχεία που υπολογίζονται κατά τον σχεδιασμό ενός αρδευτικού ή υδρευτικού δικτύου. Επιπλέον στοιχεία που υπολογίζονται είναι οι απώλειες ενέργειας του νερού μέσα στους αγωγούς και η πίεση στο τέλος των αγωγών (2), (3) και (4).

άσκηση 41



Πολλές φορές οι μηχανικοί αναγκάζονται να τοποθετήσουν αγωγούς μέσα στον βυθό της θάλασσας ώστε να μην προκληθούν καταστροφές από τις άγκυρες των πλοίων ή από άλλους παράγοντες . Αυτό όμως δεν είναι πάντα δυνατό αφού τα θαλάσσια ρεύματα δεν επιτρέπουν πολλές φορές την εκσκαφή του βυθού . Τότε οι υδραυλικοί μηχανικοί καλούνται να διαστρώσουν τον αγωγό πάνω στον πυθμένα της θάλασσας . Σε αυτή την ανάρτηση θα μελετήσουμε μια τέτοια διάστρωση .
Έστω πως βρισκόμαστε σε μία περιοχή όπου επικρατούν αρμονικοί κυματισμοί πλάτους Α = 1 m , περιόδου T = 2 s και μήκος κύματος λ . Στον πυθμένα υπάρχει αγωγός τετραγωνικής διατομής του οποίου η ακμή ισούται με d = 0,5 m . Αν κάθε μέτρο του αγωγού ζυγίζει m = 10 kg , βρείτε:
α. *Την μέγιστη δύναμη που δέχεται από τον πυθμένα 1 m αγωγού ώστε ο αγωγός να ισορροπεί πάνω στον πυθμένα ,*
β. *Την απομάκρυνση της θαλάσσιας στάθμης, που βρίσκεται πάνω από τον αγωγό, από την θέση ηρεμίας της όταν η δύναμη που δέχεται ο αγωγός από τον βυθό ισούται με 45 kN ,*
γ. *Την δύναμη που ασκεί ο πυθμένας στον αγωγό συναρτήσει του χρόνου*
δ. *Ποιες χρονικές στιγμές η δύναμη που ασκείται από τον πυθμένα στον αγωγό έχει μέτρο ίσο με 50 kN .*
Υποθέστε πως το νερό γύρω από τον αγωγό είναι ακίνητο, πως λ >> d και πως η απόσταση του πυθμένα από την θέση ηρεμίας της θάλασσας είναι ίση με H = 10 m . Η πυκνότητα του θαλασσινού νερού είναι ίση με ρ = 1000 kg / m^3 .

Λύση

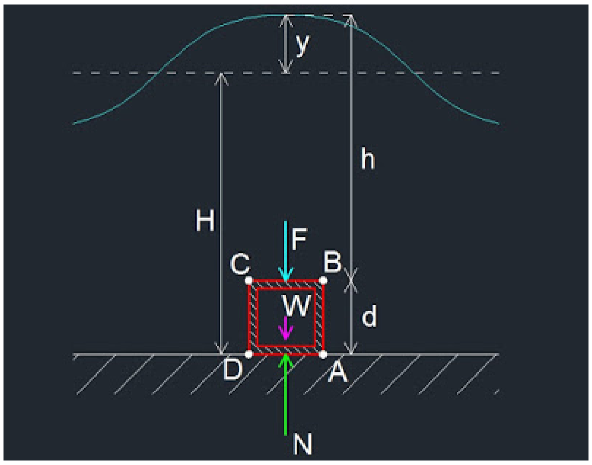
άσκηση 48 Αγωγός μέσα στην θάλασσα

Πολλές φορές οι μηχανικοί αναγκάζονται να τοποθετήσουν αγωγούς μέσα στον βυθό της θάλασσας ώστε να μην προκληθούν καταστροφές από τις άγκυρες των πλοίων ή από άλλους παράγοντες. Αυτό όμως δεν είναι πάντα δυνατό αφού τα θαλάσσια ρεύματα δεν επιτρέπουν πολλές φορές την εκσκαφή του βυθού. Τότε οι υδραυλικοί μηχανικοί καλούνται να διαστρώσουν τον αγωγό πάνω στον πυθμένα της θάλασσας. Σε αυτή την ανάρτηση θα μελετήσουμε μια τέτοια διάστρωση.

Έστω πως βρισκόμαστε σε μία περιοχή όπου επικρατούν αρμονικοί κυματισμοί πλάτους A=1 m, περιόδου T=2 s και μήκος κύματος λ. Στον πυθμένα υπάρχει αγωγός τετραγωνικής διατομής του οποίου η ακμή ισούται με d=0.5 m. Αν κάθε μέτρο του αγωγού ζυγίζει m=10 kg, βρείτε:

1. *την μέγιστη δύναμη που δέχεται από τον πυθμένα 1 m αγωγού ώστε ο αγωγός να ισορροπεί πάνω στον πυθμένα*
2. *την απομάκρυνση της θαλάσσιας στάθμης, που βρίσκεται πάνω από τον αγωγό, από την θέση ηρεμίας της όταν η δύναμη που δέχεται ο αγωγός από τον βυθό ισούται με 45 kN*
3. *την δύναμη που ασκεί ο πυθμένας στον αγωγό συναρτήσει του χρόνου*
4. *ποιες χρονικές στιγμές η δύναμη που ασκείται από τον πυθμένα στον αγωγό έχει μέτρο ίσο με 50 kN*

Υποθέστε πως το νερό γύρω από τον αγωγό είναι ακίνητο, πως λ>>d και πως η απόσταση του πυθμένα από την θέση ηρεμίας της θάλασσας είναι ίση με H=10 m. Η πυκνότητα του θαλασσινού νερού είναι ίση με ρ=1000 kg/m^3.



σχήμα 1, φαίνονται οι κατακόρυφες δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του προβλήματος.

Ερώτημα 1

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό είναι οι υδροστατικές δυνάμεις στις πλευρές του AB, BC και CD, το βάρος του W και η δύναμη από τον πυθμένα N. Αν θέλουμε να ισορροπεί ο αγωγός πρέπει να ισχύει

$$\Sigma F_x=0 \ \text{και} \ \Sigma F_y=0$$

Οι οριζόντιες υδροστατικές δυνάμεις που ασκούνται στις πλευρές AB και CD είναι ίσες αφού το πρόβλημα μας είναι συμμετρικό, δηλαδή δεν υπάρχει λόγος να έχουν διαφορετικά *μέτρα. Επομένως, η ισορροπία κατά x ισχύει ταυτοτικά. Έπειτα, για τις δυνάμεις κατά y ισχύει*

$$F+W-N=0 \Rightarrow$$
$$N=F+W \quad (1)$$

Για την δύναμη F που ασκείται στην πλευρά BC έχουμε

$$F=pE$$

όπου p είναι η υδροστατική πίεση που ασκείται πάνω στην πλευρά BC και E είναι το εμβαδόν της πάνω έδρας του αγωγού.
Για την υδροστατική πίεση ισχύει

$$p=\rho g h$$

όπου h είναι το βάθος της πλευράς BC. Σύμφωνα με το σχήμα 1, μία τυχαία χρονική στιγμή που η απομάκρυνση της θαλάσσιας στάθμης πάνω από τον αγωγό ισούται με y, το βάθος h ισούται με

$$h=H+y-d$$

Από την ανάλυση που κάναμε παραπάνω προκύπτει η εξίσωση

$$N=E\rho g(H+y-d)+mg \quad (2)$$

αφού είναι γνωστό πως ισχύει

$$W=mg$$

Στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2) όλα είναι σταθερά, εκτός από το y. Έτσι για να μεγιστοποιηθεί το N πρέπει να μεγιστοποιηθεί το y. Η μέγιστη τιμή του y είναι ίση με A και ως εκ τούτου η μέγιστη τιμή του N ισούται με

$$N_{max}=E\rho g(H+A-d)+mg \Rightarrow$$
$$N_{max}=(1m\cdot 0.5m)\cdot 1000\frac{kg}{m^3}\cdot 9.8\frac{m}{s^2}(10m+1m-0.5m)$$
$$+10kg\cdot 9.8\frac{m}{s^2}=51.5 \ \ kN$$

Έτσι όταν η θαλάσσια στάθμη πάνω από τον αγωγό έχει απομακρυνθεί κατά +1m από την θέση ηρεμίας της, ο αγωγός δέχεται δύναμη από τον πυθμένα ίση με 51.5 kN.

Ερώτημα 2

Για να βρούμε την απομάκρυνση του νερού όταν N=45 kN χρησιμοποιούμε πάλι την εξίσωση (2). Έτσι την επιλύουμε ως προς y και κάνουμε αντικατάσταση σε αυτή την τιμή του N που μας ενδιαφέρει. Οπότε έχουμε

$$y=\frac{N-mg}{E\rho g}+d-H \Rightarrow$$
$$y=\frac{45000N-10kg\cdot 9.8\frac{m}{s^2}}{(1m\cdot 0.5m)1000\frac{kg}{m^3}\cdot 9.8\frac{m}{s^2}}+0.5m-10m=-0.34 \ \ m$$

Επομένως, όταν η δύναμη που ασκεί ο πυθμένας στον αγωγό ισούται με 45 kN, η απομάκρυνση της θαλάσσιας στάθμης που βρίσκεται πάνω από τον αγωγό ισούται με 0.34 m κάτω από την στάθμη ηρεμίας.

Ερώτημα 3

Η στάθμη της θάλασσας πάνω από τον αγωγό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση αφού μπορεί να θεωρηθεί μικρό τμήμα (d<<λ) ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται αρμονικό κύμα. Ως εκ τούτου η απομάκρυνση της y από την στάθμη ηρεμίας είναι ίση με

$$y = A\sin\omega t$$

Η κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης ισούται με

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Έτσι συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις με την εξίσωση (2) έχουμε

$$N(t) = E\rho g\left[H + A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - d\right] + mg \Rightarrow$$

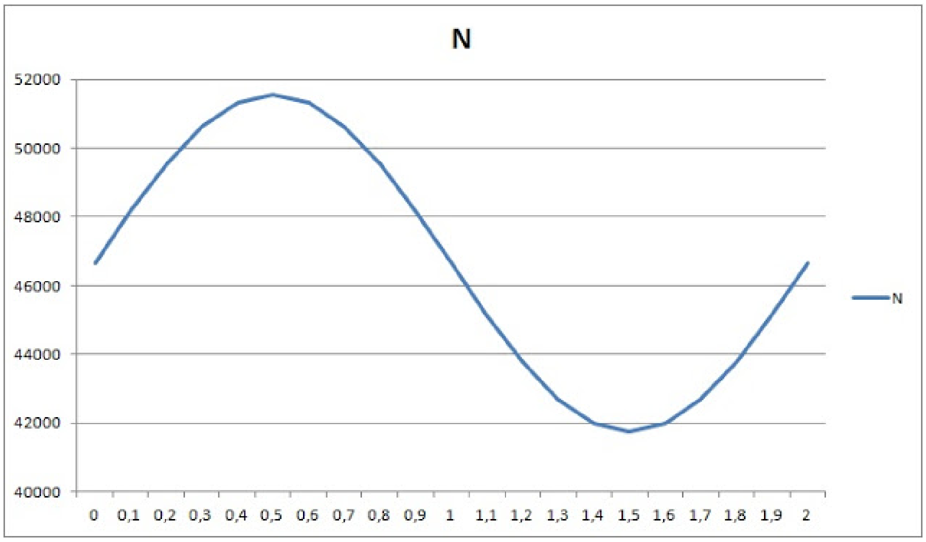
$$N(t) = (1m\cdot 0.5m)\cdot 1000\frac{kg}{m^3}\cdot 9.8\frac{m}{s^2}\cdot\left[10m + 1m\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{2s}t\right) - 0.5m\right]$$

$$+10kg\cdot 9.8\frac{m}{s^2} \Rightarrow$$

$$N(t) = 4900[9.5 + \sin(\pi t)] + 98 \Rightarrow$$

$$N(t) = 46648 + 4900\sin(\pi t) \quad (3)$$

Οπότε η εξίσωση (3) μας δίνει το μέτρο της δύναμης N συναρτήσει του t. Στο σχήμα 2 φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης N(t).



σχήμα 2, η συνάρτηση N(t). Στον άξονα x φαίνεται χρόνος σε seconds και στον άξονα y δίνονται οι τιμές του N σε Newtons.

Ερώτημα 4

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τις χρονικές στιγμές που η δύναμη N ισούται με 50 kN, θέτουμε στην εξίσωση (3) την τιμή N=50 kN και έχουμε

$$46648+4900\sin(\pi t)=50000 \Rightarrow$$
$$\sin(\pi t)=3352/4900 \Rightarrow$$
$$\sin(\pi t)=0.68$$

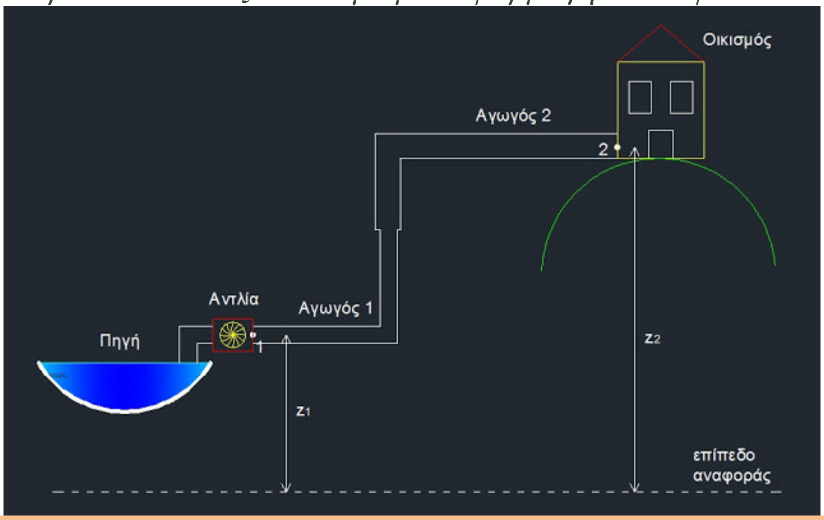
Η γωνία που έχει ημίτονο ίσο με 0.68 είναι ίση με θ=0.747 rad.

Έτσι

$$\sin(\pi t)=\sin\vartheta \Rightarrow$$
$$\pi t=2k\pi+\vartheta \text{ ή } \pi t=2k\pi+\pi-\vartheta \Rightarrow$$
$$t=2k+\frac{\vartheta}{\pi} \text{ ή } t=2k+1-\frac{\vartheta}{\pi} \Rightarrow$$
$$t=2k+0.24 \text{ ή } t=2k+0.76$$

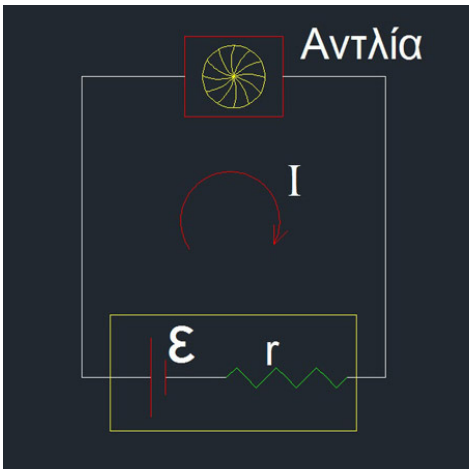
όπου k ένας ακέραιος αριθμός. Συνεπώς η δύναμη N έχει μέτρο ίσο με 50 kN τις στιγμές 0.24 s, 0.76 s, 2.24 s, 2.76 s,...

Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε πως ένα ρευστό ρέει από ένα υψηλό σημείο προς ένα χαμηλότερο. Έτσι σε περιπτώσεις που για την ύδρευση ενός οικισμού απαιτείται να μεταφερθεί νερό από ένα χαμηλό σε ένα υψηλότερο σημείο χρησιμοποιούνται αντλίες. Συγκεκριμένα, οι αντλίες είναι διατάξεις που αυξάνουν την πίεση σε ένα σημείο της ροής Παρακάτω θα εξετάσουμε μία εφαρμογή όπου φαίνεται η χρήση μίας αντλίας.



άσκηση 42

Στο σχήμα 1 φαίνεται το σύστημα δύο αγωγών και μίας αντλίας. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται για να υδρεύσει έναν οικισμό που βρίσκεται σε υψόμετρο z_2=100 m. Καθώς η πηγή νερού βρίσκεται χαμηλότερα του οικισμού, οι μηχανικοί επιλέγουν να τοποθετήσουν μια αντλία σε υψόμετρο z_1 = 50 m. Επιπλέον, επιλέγουν ως διάμετρο του αγωγού (1) την τιμή δ_1 = 300 mm και ως διάμετρο του αγωγού (2) την τιμή δ_2 = 500 mm. Αν ο



πληθυσμός του οικισμού είναι 72000 κάτοικοι και κάθε κάτοικος έχει ανάγκη νερού ίση με 10 lt / h βρείτε:

1. *Την παροχή νερού που πρέπει να διαρρέει το σύστημα*

2. *Την ταχύτητα του νερού μέσα στους αγωγούς (1) και (2)*

3. *Την πίεση που πρέπει να δημιουργείται από την αντλία ώστε να υδρεύεται ο οικισμός*

4. *Την ισχύ της αντλίας*

5. *Το ρεύμα που διαρρέει την αντλία*

Θεωρείστε πως η πίεση στο δίκτυο του οικισμού πρέπει να είναι ίση με 3 atm και πως η αντλία τροφοδοτείται με πηγή συνεχούς ρεύματος η οποία έχει ΗΕΔ ίση με Ε = 3000 V και τιμή εσωτερικής αντίστασης r = 10 Ω . Τέλος, θεωρείστε πως η ισχύς της αντλίας είναι ίση με το γινόμενο της πίεσης που δημιουργεί και της παροχής του συστήματος. Το νερό (ρ = 1000 kg / m^3) δεν χάνει ενέργεια κατά την διάρκεια της ροής του και οι αγωγοί είναι κυκλικής διατομής.

Λύση

Όσον αφορά την ισχύ της αντλίας :

Η παροχή στον οικισμό είναι 0,2 m^3 / s , συνεπώς φτάνει νερό μάζας :

$m = \rho \cdot V = 1000 \cdot 0{,}2$ kg = 200 kg σε κάθε δευτερόλεπτο.

Η ποσότητα αυτή του νερού θα έχει ενέργεια:

$E = K + U = ½ \cdot m \cdot \upsilon^2 + m \cdot g \cdot h$.

Όπου υ = 1 m / s και $h = z_2 – z_1$ = 50 m .

Με αντικατάσταση προκύπτει :

$E = ½ \cdot 200 \cdot 1^2$ J + $200 \cdot 10 \cdot 50$ J = 100.100 J .

Ενώ η ίδια ποσότητα νερού έχει αρχική κινητική ενέργεια, φτάνοντας στην αντλία :

$E_{αρχ} = ½ \cdot m \cdot \upsilon^2 = ½ \cdot 200 \cdot 2{,}8^2$ J = 784 J .

(Η ταχύτητα στην είσοδο και στην έξοδο της αντλίας είναι ίδια με βάση την αρχή της συνέχειας).

Συνεπώς η αντλία πρέπει να παρέχει ενέργεια ανά δευτερόλεπτο :

$ΔE = E – E_{αρχ}$ = 99.316 J .

Ή διαφορετικά η ελάχιστη ισχύς της αντλίας πρέπει να είναι 99.316W (αν αγνοήσουμε απώλειες ή απόδοση της αντλίας).

Ερώτημα 1

Η παροχή Π που διαρρέει το σύστημα είναι το γινόμενο των αναγκών του κάθε κατοίκου επί τον πληθυσμό. Επομένως έχουμε

$$\Pi = 72000 \cdot 10 \frac{lt}{h} = 720000 \frac{lt}{h} = 720 \frac{m^3}{h} = 0.2 \frac{m^3}{s}$$

Ερώτημα 2

Από την εξίσωση συνέχειας γνωρίζουμε πως για τις παροχές Π_1 και Π_2 που διαρρέουν τους αγωγούς (1) και (2) αντίστοιχα ισχύει

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi$$

Η παροχή που διαρρέει έναν αγωγό δίνεται από την σχέση

$$\Pi = uA$$

Για κυκλικούς αγωγούς προκύπτει η εξής σχέση μεταξύ της διατομής Α και της διαμέτρου δ

$$A=\frac{\pi\delta^2}{4}$$

Έτσι η ταχύτητα του ρευστού μέσα στον αγωγό δίνεται από την σχέση

$$u=\frac{4\Pi}{\pi\delta^2}$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στον αγωγό (1) έχουμε

$$u_1=\frac{4\Pi_1}{\pi\delta_1^2}=\frac{4\cdot 0.2m^3/s}{\pi\cdot(0.3m)^2}=2.8\ \ m/s$$

Ομοίως για τον αγωγό (2) ισχύει

$$u_2=\frac{4\Pi_2}{\pi\delta_2^2}=\frac{4\cdot 0.2m^3/s}{\pi\cdot(0.5m)^2}=1.0\ \ m/s$$

Συνεπώς, η ταχύτητα του νερού μέσα στον αγωγό (1) είναι 2.8 m/s *ενώ η ταχύτητα του μέσα στον αγωγό (2) είναι 1.0* m/s.

Ερώτημα 3

Για να υπολογίσουμε την πίεση που δημιουργεί η αντλία θεωρούμε τα σημεία 1 και 2 (σχήμα 1). Το σημείο 1 βρίσκεται πάνω στην αντλία ενώ το σημείο 2 τοποθετείται στην αρχή του υδρευτικού δικτύου του οικισμού. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli *μεταξύ των σημείων 1 και 2 και ως εκ τούτου έχουμε*

$$p_1+\frac{1}{2}\rho u_1^2+\rho g z_1=p_2+\frac{1}{2}\rho u_2^2+\rho g z_2$$

όπου p_1 *η πίεση της αντλίας και* p_2 *η πίεση στο δίκτυο του οικισμού. Επιλύοντας ως προς* p_1 *προκύπτει*

$$p_1=p_2+\frac{1}{2}\rho(u_2^2-u_1^2)+\rho g(z_2-z_1)\ \Rightarrow$$

$$p_1=3atm+\frac{1}{2}\cdot 1000\frac{kg}{m^3}\left[\left(2.8\frac{m}{s}\right)^2-\left(1\frac{m}{s}\right)^2\right]+$$

$$+1000\frac{kg}{m^3}\cdot 9.81\frac{m}{s^2}(100m-50m)\ \Rightarrow$$

$$p_1=3atm+493920Pa=3atm+4.9atm=7.9atm$$

Οπότε η αντλία πρέπει να δημιουργεί πίεση στο σημείο 1 ίση με 7.9 atm *ώστε να υδρευτεί ο οικισμός.*

Ερώτημα 4

Από τα δεδομένα γνωρίζουμε πως η ισχύ P της αντλίας δίνεται από την σχέση

$$P=\Pi p_1$$

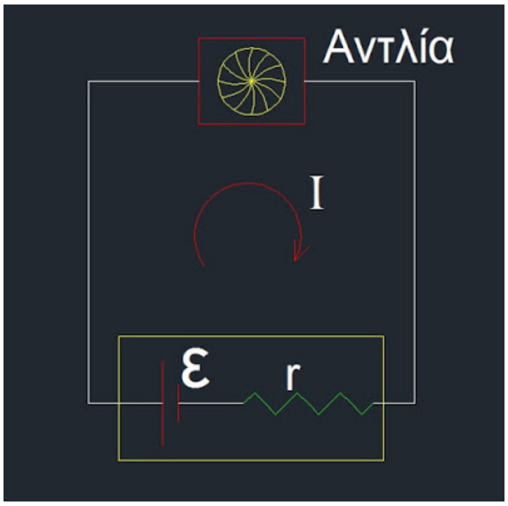
Έτσι η τιμή της ισχύος είναι

$$P=0.2\frac{m^3}{s}\cdot 7.9atm=158\ \ kW$$

Ερώτημα 5

Για να βρούμε το ρεύμα I που διαρρέει την αντλία αρκεί να σκεφτούμε πως έχουμε το κύκλωμα του σχήματος 2.

σχήμα 2, η πηγή παράγει ενέργεια η οποία καταναλώνεται στην εσωτερική αντίσταση και στην αντλία.



Η ενέργεια που παράγει η πηγή καταναλώνεται στην εσωτερική της αντίσταση και στην αντλία. Επομένως, από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$\mathcal{E}I = I^2 r + P \Rightarrow$$
$$I^2 r - \mathcal{E}I + P = 0 \Rightarrow$$
$$10 \cdot I^2 - 3000 \cdot I + 158000 = 0$$

Λύνοντας αυτή την εξίσωση δευτέρου βαθμού προκύπτει πως το ρεύμα I μπορεί να έχει είτε την τιμή 68.1 A είτε την τιμή 231.9 A.

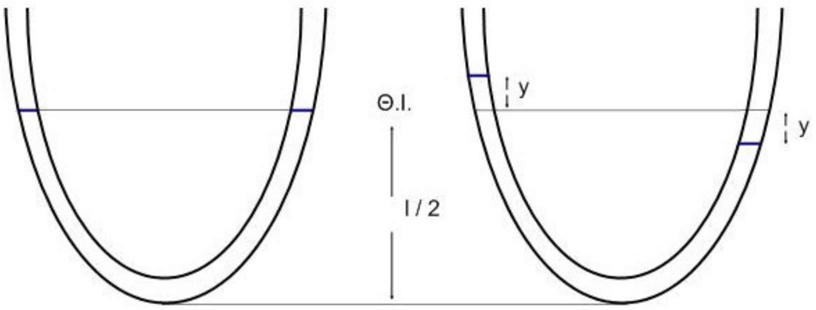
Πρέπει να σημειωθεί πως πολλά από τα παραπάνω είναι απλούστευση της πραγματικότητας. Παραδείγματος χάριν, και στα υδραυλικά και στα ηλεκτρικά κυκλώματα υπάρχουν απώλειες ενέργειας. Επίσης, μία αντλία δεν έχει απόδοση 100% και ως εκ τούτου στον τύπο υπολογισμού της ισχύος της εμπλέκεται ο συντελεστής απόδοσης. Και τέλος, το νερό κατά την διάρκεια της κίνησης του χάνει ενέργεια οπότε η εξίσωση Bernoulli *"αλλάζει μορφή". Οπότε η εφαρμογή αυτή έχει εκπαιδευτικό χαρακτήρα και προσπαθεί να εισάγει τους ενδιαφερόμενους σε βασικές έννοιες των υδραυλικών και ηλεκτρικών κυκλωμάτων.*

Η απόδειξη του τύπου που δίνει την ισχύ μίας αντλίας παρουσιάζεται στην ανάρτηση Η ισχύς μίας αντλίας.

άσκηση 43 Ρευστά και ταλάντωση

Γυάλινος σωλήνας σχήματος U, ανοιχτός κατά τα δύο άκρα του περιέχει στήλη υγρού μήκους l και μάζας $m_{ολ}$.

α. *Υπολογίστε την περίοδο T των ελευθέρων ταλαντώσεων της στήλης υγρού μήκους l και μάζας*

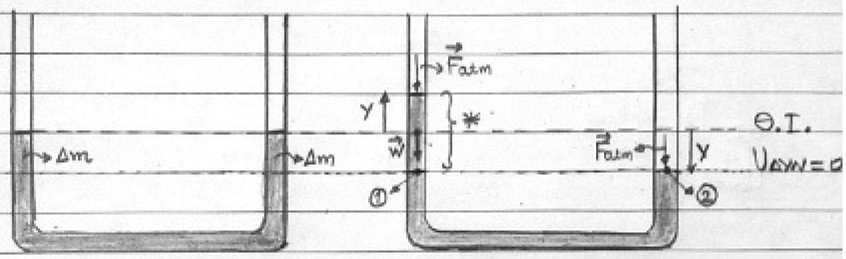


$m_{ολ}$, όταν αυτή εκτραπεί κατά y από τη θέση ισορροπίας και κατόπιν αφεθεί για να ταλαντωθεί .
Οι τριβές να θεωρηθούν αμελητέες .
***β.** Αν πιέσουμε κατά d προς τα κάτω την στήλη του υγρού στο δεξιό σκέλος να υπολογιστεί η ταχύτητα του υγρού όταν περνά από τη θέση ισορροπίας .*

Λύση

-1-

Ρευστό σε Ταλάντωση.



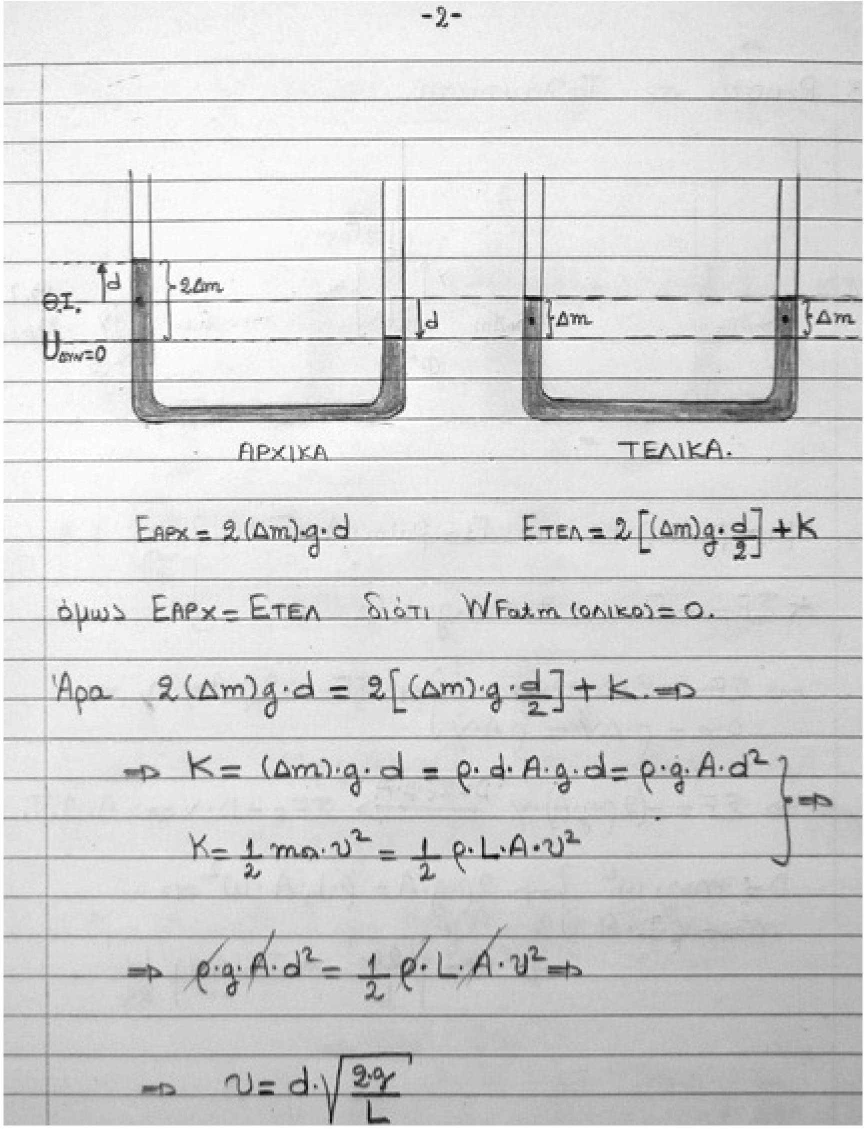
$$\left.\begin{aligned} &p_1 = p_2 = p_{atm} \Rightarrow F_1 = p_{atm}\cdot A = F_{atm} \\ &* \ \Sigma F = -F_{atm} - 2(\Delta m)\cdot g + F_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \Sigma F = -2(\Delta m)\cdot g \\ &\Delta m = \rho\cdot\Delta V = \rho A\cdot y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Sigma F = -2\rho\cdot A\cdot y\cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F = -(2\rho\cdot g\cdot A)\cdot y \xrightarrow{D=2\rho\cdot g\cdot A} \Sigma F = -D\cdot y \Leftrightarrow \text{Α.Α.Τ.}$$

$$\left.\begin{aligned} &D = m_{ολ}\cdot \omega^2 \\ &m_{ολ} = \rho\cdot L\cdot A \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\rho\cdot g\cdot A = \rho\cdot L\cdot A\cdot\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}} .$$


-2-

$\Theta.I.$, $U_{\beta\alpha\rho}=0$, d, $2\Delta m$, d, Δm, Δm

ΑΡΧΙΚΑ ΤΕΛΙΚΑ.

$E_{ΑΡΧ} = 2(\Delta m)\cdot g\cdot d \qquad E_{ΤΕΛ} = 2\left[(\Delta m) g\cdot \frac{d}{2}\right] + K$

όμως $E_{ΑΡΧ} = E_{ΤΕΛ}$ διότι $W_{F_{atm}\,(ολικο)} = 0.$

Άρα $2(\Delta m) g\cdot d = 2\left[(\Delta m)\cdot g\cdot \frac{d}{2}\right] + K. \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow K = (\Delta m)\cdot g\cdot d = \rho\cdot d\cdot A\cdot g\cdot d = \rho\cdot g\cdot A\cdot d^2 \\ K = \frac{1}{2} m_{ολ}\cdot \upsilon^2 = \frac{1}{2}\rho\cdot L\cdot A\cdot \upsilon^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\rho}\cdot g\cdot \cancel{A}\cdot d^2 = \frac{1}{2}\cancel{\rho}\cdot L\cdot \cancel{A}\cdot \upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = d\cdot\sqrt{\frac{2g}{L}}$$

άσκηση 44 Η μέση ισχύς της καρδιάς

Η ατμοσφαιρική πίεση 10^5 N / m (Pa) αντιστοιχεί σε 753 mmHg . Κάποιο άτομο έχει 80 σφυγμούς το λεπτό . Κάθε σφυγμός προκαλεί μετακίνηση 50 cm³ αίματος με διαφορά πίεσης 125,5 mmHg . Βρείτε την μέση ισχύ της καρδιάς .

Λύση

Την ισχύ την συμβολίζουμε P (Watt) .

Στην χρονική διάρκεια Δt του ενός σφυγμού έχουμε $\Delta V = 5\cdot 10^{-5}$ m³ αίματος που περνά από μια διατομή , επομένως η παροχή είναι ΔV / Δt .

Όπου :

$\Delta t = 1$ min / 80 σφυγμοί $\Rightarrow \Delta t = 60$ s / 80 σφυγμοί $\Rightarrow \Delta t = (3 / 4)$ s .

Η παροχή :

$\Pi = \Delta V / \Delta t \Rightarrow \Pi = 5\cdot 10^{-5}\cdot (4 / 3) \Rightarrow \Pi = (2 / 3)\cdot 10^{-4}$ m³ / s .

Η ισχύς P ορίζεται :

$P = F\cdot\upsilon$

Ισχύει (όπου ΔP η πίεση) :

$F = \Delta P\cdot A$,

άρα (συνδυάζουμε τις δύο παραπάνω σχέσεις)

P = ΔP·A·υ ⇒
η παροχή Π = A·υ ,
P = ΔP·Π .
Μετατρέπουμε την πίεση σε Pα , με την μέθοδο των τριών :
Τα 753 mmHg αντιστοιχούν σε 10^5 Pα (N / m²)
Τα 125,5 mmHg αντιστοιχούν σε x .
Άρα :
$x = 10^5\cdot(125{,}5 / 753) \Rightarrow x = 10^5 / 6$ Pα (N / m²) .
Η ισχύς :
$P = \Delta P\cdot\Pi \Rightarrow P = (10^5/6)\cdot(2/3)\cdot10^{-4} \Rightarrow P = 10/9$ Watt ⇒
P = 1,11 Watt .

άσκηση 45 Η ισχύς του χειμάρρου

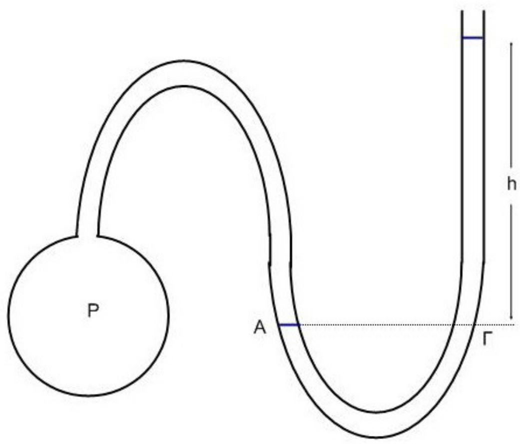
Το νερό σ' έναν οριζόντιο χείμαρρο ρέει με ταχύτητα υ = 2 m / s . Αν η παροχή του είναι Π = 2 m³ / s , να βρείτε την ισχύ του χειμάρρου .
Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho_{νερ} = 10^3$ kg / m³ .

Λύση

Ποσότητα Δm του νερού του χειμάρρου , μπορεί να προσφέρει ενέργεια , όση η κινητική της ενέργεια :
$\Delta E = ½\cdot\Delta m\cdot\upsilon^2$.
Η ισχύς ορίζεται : $P = \Delta E / \Delta t \Rightarrow$
$P = (½\cdot\Delta m\cdot\upsilon^2) / \Delta t$ … (I) .
Η πυκνότητα του νερού :
$\rho_{νερ} = \Delta m / \Delta V \Rightarrow \Delta m = \rho_{νερ}\cdot\Delta V$ … (II) .
Η σχέση (I) με την βοήθεια της σχέσης (II) :
$P = (½\cdot\Delta m\cdot\upsilon^2) / \Delta t \Rightarrow P = [½\cdot(\rho_{νερ}\cdot\Delta V)\cdot\upsilon^2] / \Delta t \Rightarrow$
$P = ½\cdot\rho_{νερ}\cdot\upsilon^2\cdot(\Delta V / \Delta t) \Rightarrow$ η παροχή $\Pi = \Delta V / \Delta t$,
$P = ½\cdot\rho_{νερ}\cdot\upsilon^2\cdot\Pi \Rightarrow P = ½\cdot10^3\cdot2^2\cdot2 \Rightarrow P = 4\cdot10^3$ J / s (ή Watt) .

άσκηση 46 Πίεση αέρα σε κλειστό δοχείο

Ένα μανόμετρο υδραργύρου Hg τύπου U συνδέεται με ένα κλειστό δοχείο που περιέχει αέρα αγνώστου πίεσης .
Η υψομετρική διαφορά h στο μανόμετρο είναι 20 cm .
Να υπολογιστεί η πίεση στο εσωτερικό του δοχείου .
Δίνονται g = 10 m / s² , $\rho_{Hg} = 13{,}6\cdot10^3$ kg / m³ *και*
$P_{at} = 10^5$ Pα (N / m²) .



Λύση

Το αέριο βρίσκεται σε ισορροπία σε κλειστό δοχείο , επομένως :
$P = P_A$,
επίσης ,
$P_A = P_\Gamma$
και
$P_\Gamma = P_{at} + \rho_{Hg}\cdot g\cdot h$.

Άρα ,

$P_A = P \Rightarrow P = P_{at} + \rho_{υγ} \cdot g \cdot h \Rightarrow P = 10^5 + 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow P = 10^5 + 27{,}2 \cdot 10^3 \Rightarrow$

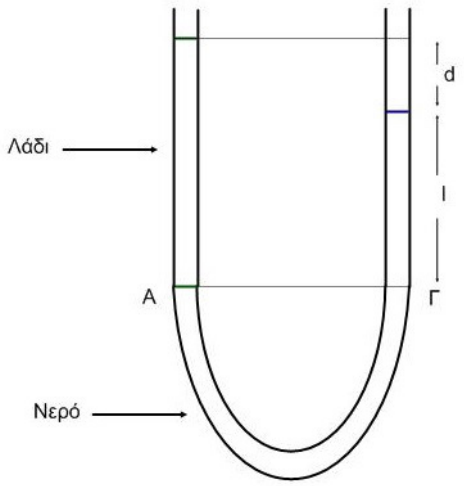
$P = 1{,}272 \cdot 10^5 \ (N / m^2)$.

άσκηση 47 Ρευστά σε ηρεμία

Σε γυάλινο σωλήνα τύπου U βρίσκονται δύο υγρά σε ισορροπία .

Στο αριστερό σκέλος υπάρχει λάδι με πυκνότητα ρ_λ και το άλλο υγρό είναι το νερό . Τα δύο υγρά ισορροπούν όπως φαίνεται στο σχήμα .

Να γραφεί η σχέση που συνδέει τις πυκνότητες των δύο υγρών ($\rho_\lambda < \rho_\nu$) .



Λύση

Στα σημεία Α και Γ έχουμε την ίδια πίεση :

$P_A = P_\Gamma \Rightarrow$

$P_{at} + \rho_\lambda \cdot g \cdot (l + d) = P_{at} + \rho_\nu \cdot g \cdot l \Rightarrow$

$\rho_\lambda \cdot g \cdot (l + d) = \rho_\nu \cdot g \cdot l \Rightarrow$

$\rho_\lambda \cdot (l + d) = \rho_\nu \cdot l \Rightarrow$

$\rho_\lambda = \rho_\nu \cdot [l / (l + d)]$.