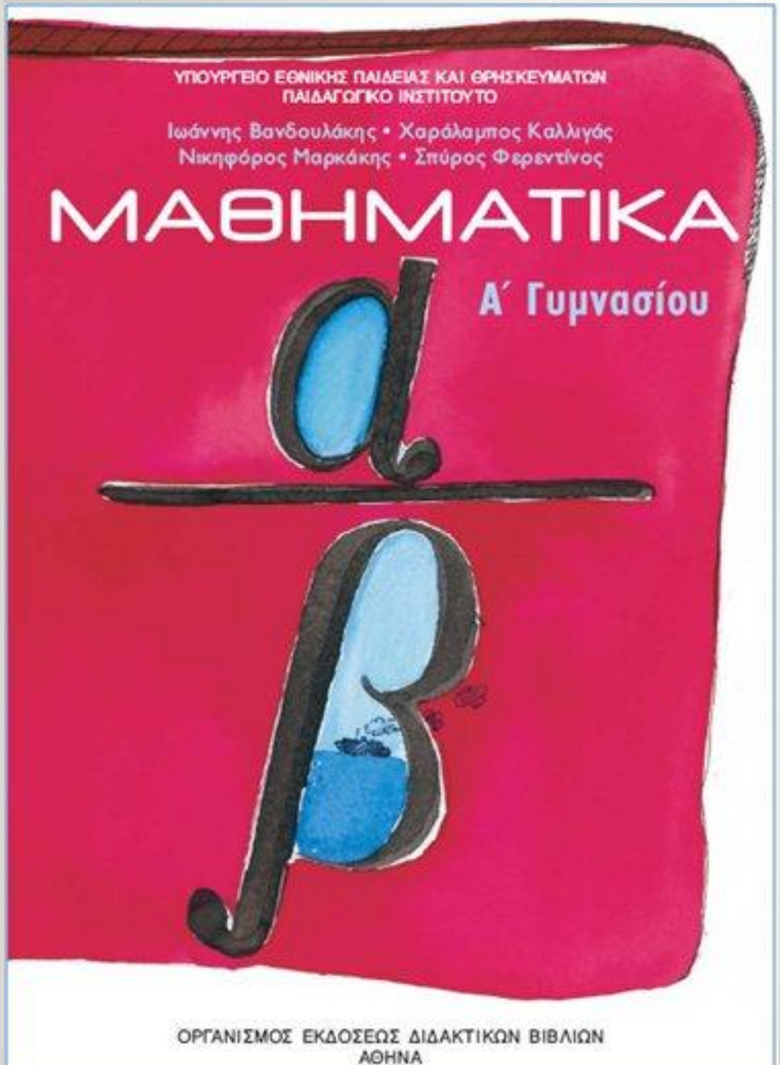
Τα Μαθηματικά στην Καθημερινή Ζωή

του Ν. Καστάνη

Αφορμή



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

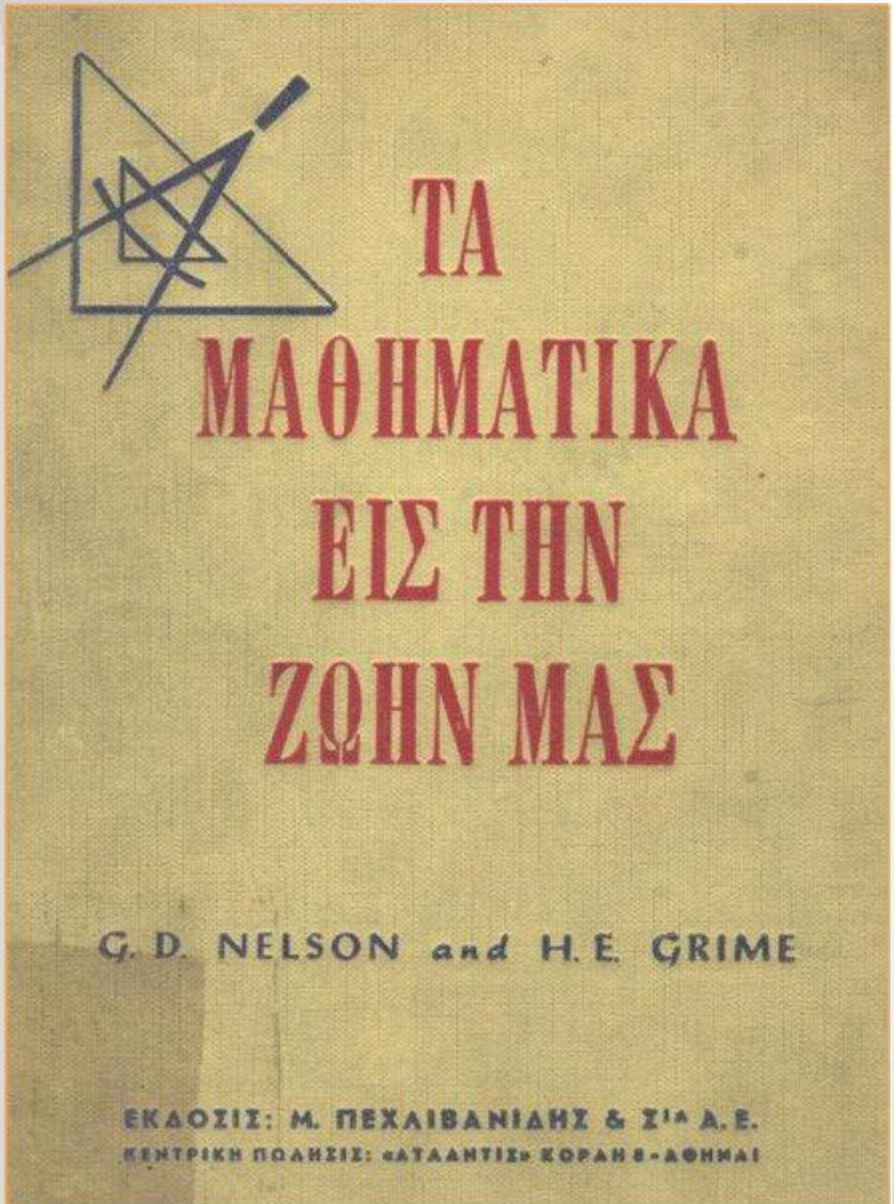
Στο Δημοτικό σχολείο ολοκληρώθηκε ο πρώτος κύκλος της βασικής εκπαίδευσης. Στο Γυμνάσιο, θα στηριχτούμε στις γνώσεις που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, θα τις αξιοποιήσουμε και θα προσπαθήσουμε να τις αναπτύξουμε και να τις διευρύνουμε.

Στην πορεία αυτή, ίσως διαπιστώσουμε ότι οι γνώσεις που διαθέτουμε δεν επαρκούν πάντα. Πρέπει, λοιπόν, να συμπληρωθούν κατάλληλα και μετά να προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα, στο νέο προβληματισμό και τέλος στην καινούρια γνώση. Έτσι, με τη δική μας προσπάθεια και παράλληλα με τη βοήθεια και την καθοδήγηση του καθηγητή μας, θα καταφέρουμε, όλοι μαζί μέσα στην τάξη, να αναπτύξουμε τις δυνατότητές μας, προσθέτοντας, όχι μόνο γνώσεις αλλά και νέους τρόπους να τις αποκτούμε.

Τα Μαθηματικά τα γνωρίζουμε ως ένα σχολικό μάθημα. Δεν πρέπει όμως να μείνουμε μόνο σ' αυτό. Όσα περισσότερα Μαθηματικά ξέρουμε και χρησιμοποιούμε, τόσο καλύτερα ερμηνεύουμε τον κόσμο μας και τελικά τον κατανοούμε. Είναι ένας κώδικας απαραίτητος για την κατανόηση του κόσμου μας, που λειτουργεί όπως η "γλώσσα" προγραμματισμού στους υπολογιστές. Όσες περισσότερες "λέξεις" ξέρει κανείς από αυτή τη "γλώσσα", δηλαδή τα Μαθηματικά, τόσο καλύτερα αξιοποιεί τις δυνατότητες του μυαλού του. Επίσης, τα Μαθηματικά δεν είναι απλά ένα εργαλείο για τη βελτίωση των ατομικών επιδόσεων, αλλά ένας βασικός μοχλός που βοηθάει την κοινωνική ανάπτυξη.

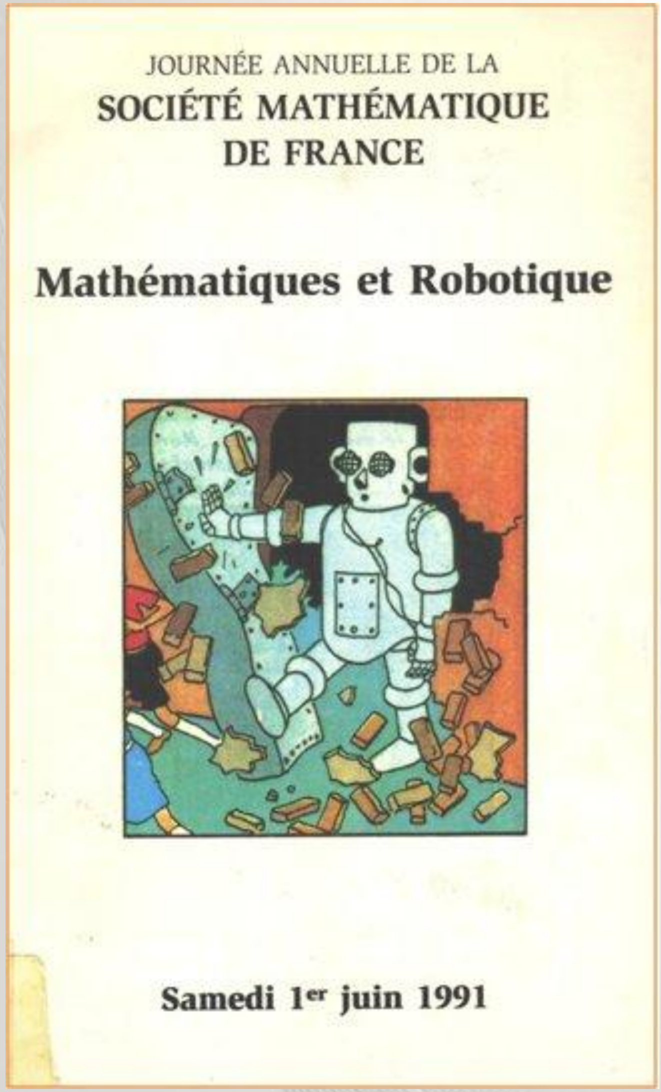
Το βιβλίο αυτό φιλοδοξεί να αποτελέσει ένα βήμα προς τις κατευθύνσεις αυτές. Είναι γραμμένο σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου, καθώς και τις συγκεκριμένες προδιαγραφές και οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Σημαντικό χαρακτηριστικό του βιβλίου αυτού είναι ότι η παρουσίαση της θεωρίας περιορίζεται συχνά, για να αφήσει στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν, με τη βοήθεια των καθηγητών τους, τη διαίσθηση, τη δοκιμή, την έρευνα και τέλος την αναγκαία σύνθεση.

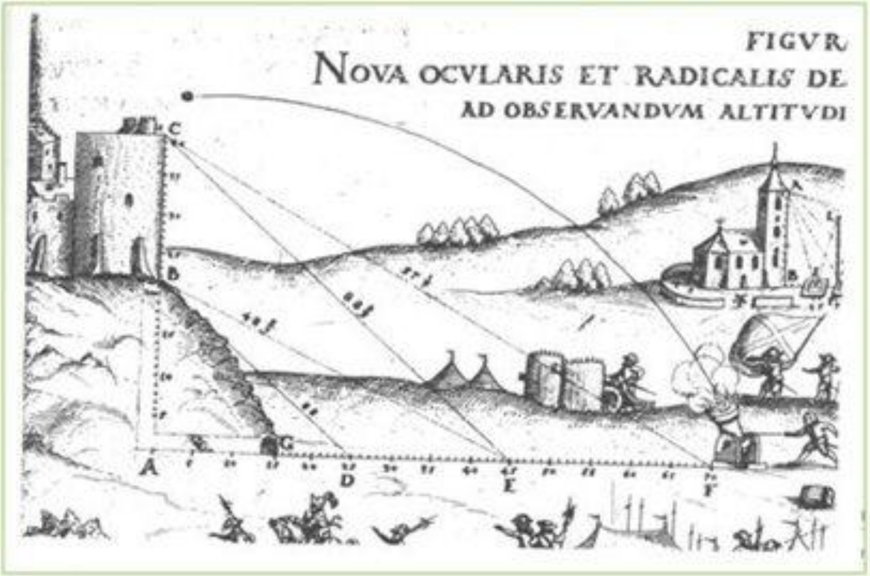

ΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΙΣ ΤΗΝ
ΖΩΗΝ ΜΑΣ
G. D. NELSON and H. E. GRIME
ΕΚΔΟΣΙΣ: Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & Σ^{ΙΑ} Α.Ε.
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΩΛΗΣΙΣ: «ΑΤΛΑΝΤΙΣ» ΚΟΡΑΗ 8 - ΑΘΗΝΑΙ


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΓΕΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΑΤΕΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΕΝΗΛΙΚΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΔΙΑΡΚΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΕΝΗΛΙΚΩΝ
βασικές γνώσεις μαθηματικών-στατιστικής
Μαθηματικά: Εφαρμογές στην καθημερινή ζωή

Κάποιες εφαρμογές των Μαθηματικών



Μαθηματικά και Ρομποτική



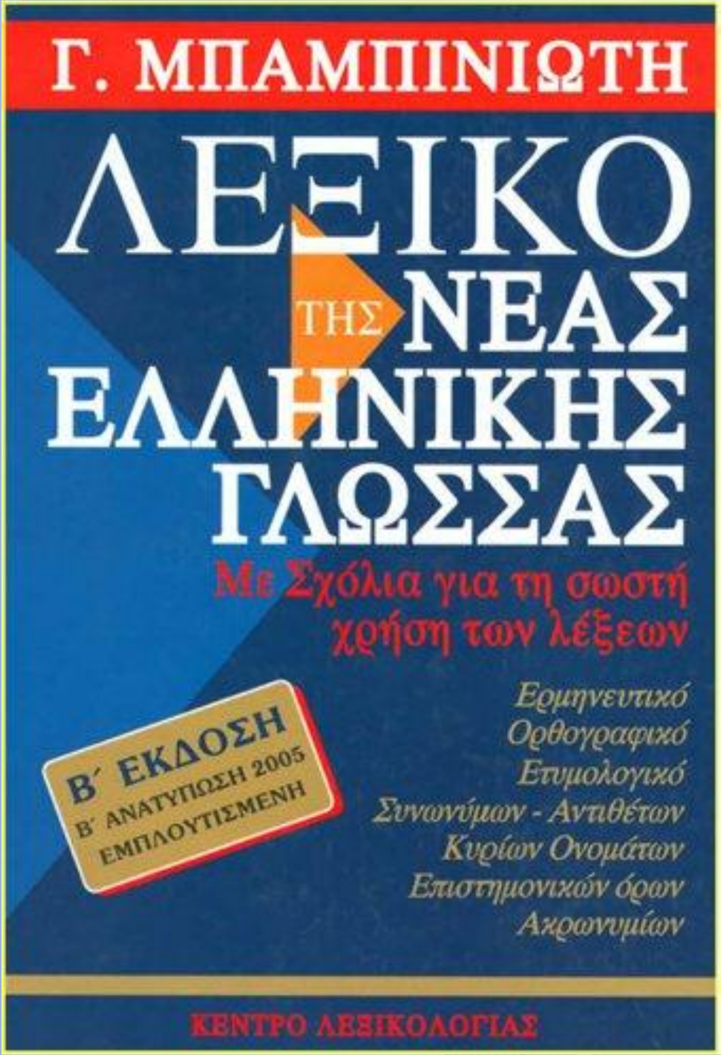
ΕΝΑ ΓΕΓΟΝΟΣ ΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΕΙ ΜΙΑ ΠΑΡΑΚΙΝΗΣΗ

Σε μια συνέντευξη για **πρόσληψη** στην IBM

έγινε η εξής ερώτηση:

Γιατί τα φρεάτια που βρίσκονται στους δρόμους των πόλεων έχουν, κατά κανόνα, <u>κυκλικά</u> σκέπαστρα;

Τι είναι φρεάτιο; Διευκρίνιση



φρέαρ (το) {φρέ-ατος | -ατα, -άτων} **1.** (αρχαιοπρ.) το πηγάδι **2.** κάθε τεχνητό όρυγμα που οδηγεί σε κοίτασμα μετάλλου ή ορυκτού· ΦΡ. **αρτεσιανό φρέαρ** βλ. λ. *αρτεσιανός*.

φρεάτιο (το) {φρεατί-ου | -ων} **1.** τεχνητή κάθετη δίοδος, που οδηγεί σε υπονόμους ή σε δίκτυο ύδρευσης ή υπόγειων ηλεκτρικών καλωδιώσεων **2.** ο χώρος μέσα στον οποίο κινείται ανελκυστήρας. [ΕΤΥΜ. < μτγν. *φρεάτιον*, υποκ. τού αρχ. *φρέαρ*, *-ατος* (βλ.λ.)].

Μια απάντηση στην ερώτηση της συνέντευξής είναι η εξής:

Αν το σκέπαστρο ήταν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ή τετράγωνο,

τότε θα κινδύνευε να πέσει μέσα στο φρεάτιο,
π.χ. στις περιπτώσεις που θα τοποθετηθεί κατακόρυφα
και κατά τη διαγώνιο του ανοίγματος

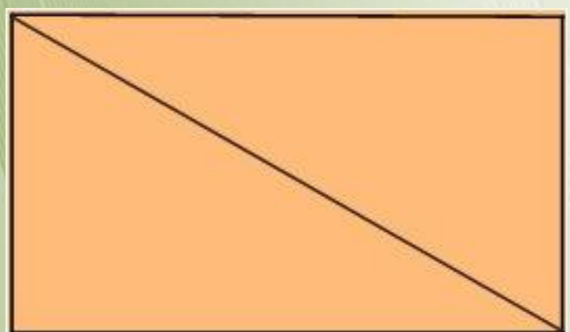
Όταν είναι κυκλικά τα σκέπαστρα, τότε **δεν** υπάρχει αυτός ο κίνδυνος, δεν μπορούν να πέσουν μέσα στο άνοιγμα.

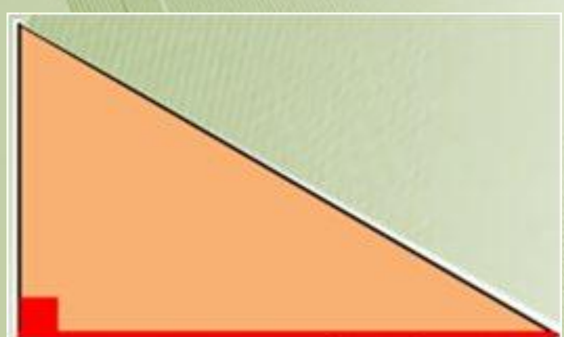
Η σκέψη αυτή φαίνεται, **διαισθητικά** τουλάχιστον, σωστή.
Αλλά και η **εμπειρία**, την επιβεβαιώνει.

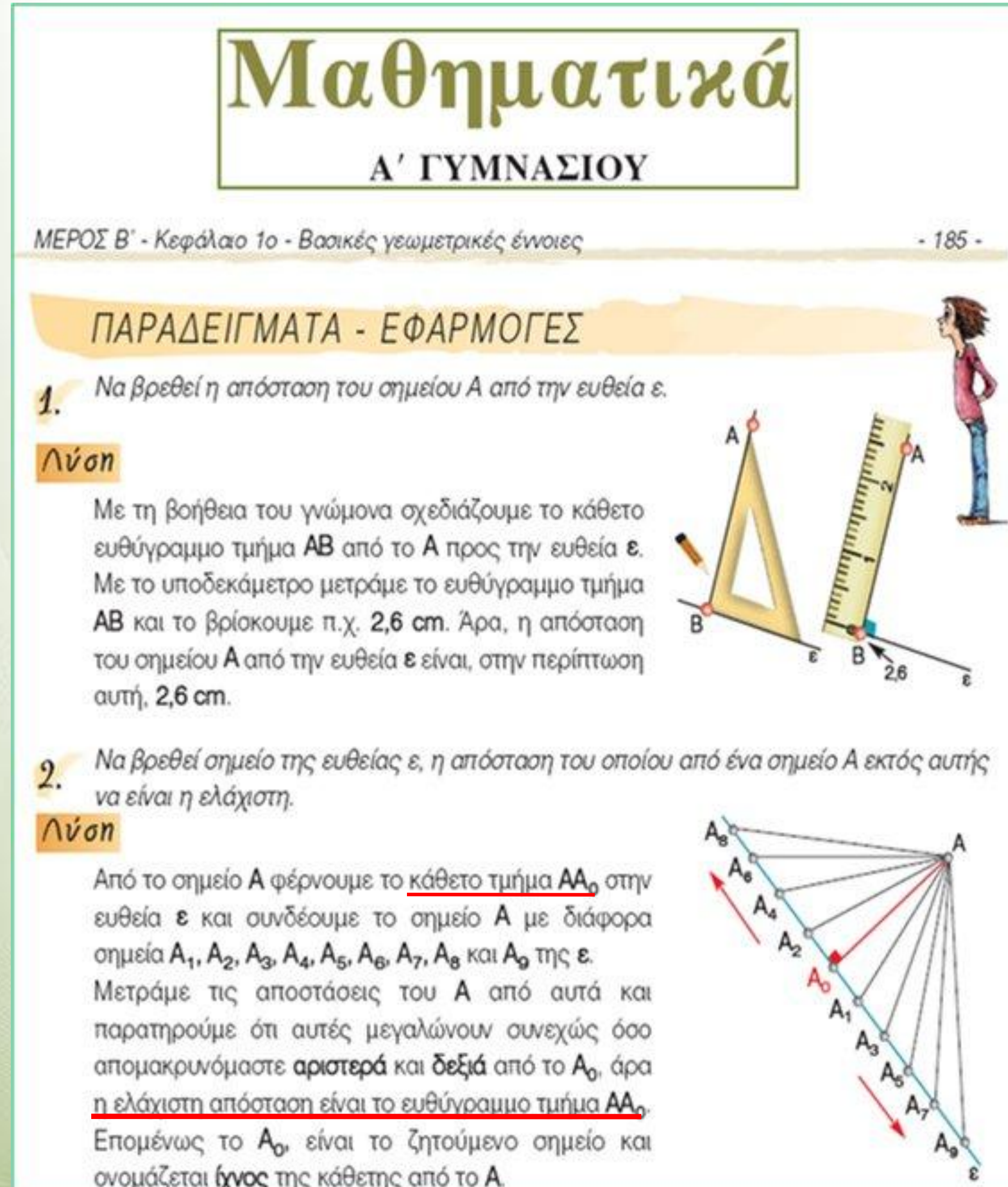
Ωστόσο, έτσι μοιάζει ότι αυτή η επιλογή έγινε στην τύχη.

Δηλαδή, έπρεπε να προϋπάρχει μια **γεωμετρική** κατανόηση (και μια σχετική πρόβλεψη), πριν την επιλογή.

Η πρώτη γεωμετρική ιδιότητα, που παίζει ρόλο στο προηγούμενο σκεπτικό είναι ότι η διαγώνιος, οποιουδήποτε ορθογωνίου παραλληλογράμμου, έχει μήκος μεγαλύτερο από τις πλευρές του.







Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Β΄ - Κεφάλαιο 1ο - Βασικές γεωμετρικές έννοιες - 185 -

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.*

Λύση

Με τη βοήθεια του γνώμονα σχεδιάζουμε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** από το **Α** προς την ευθεία **ε**. Με το υποδεκάμετρο μετράμε το ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** και το βρίσκουμε π.χ. **2,6 cm**. Άρα, η απόσταση του σημείου **Α** από την ευθεία **ε** είναι, στην περίπτωση αυτή, **2,6 cm**.

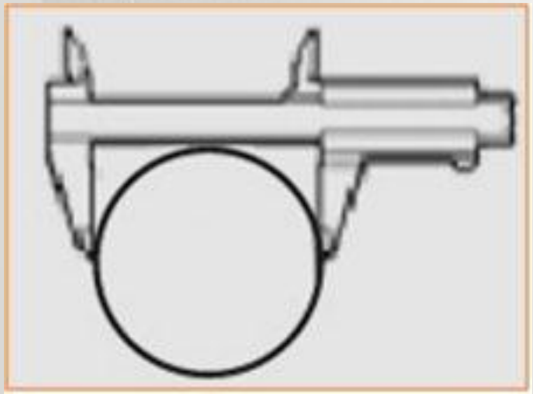
2. *Να βρεθεί σημείο της ευθείας ε, η απόσταση του οποίου από ένα σημείο Α εκτός αυτής να είναι η ελάχιστη.*

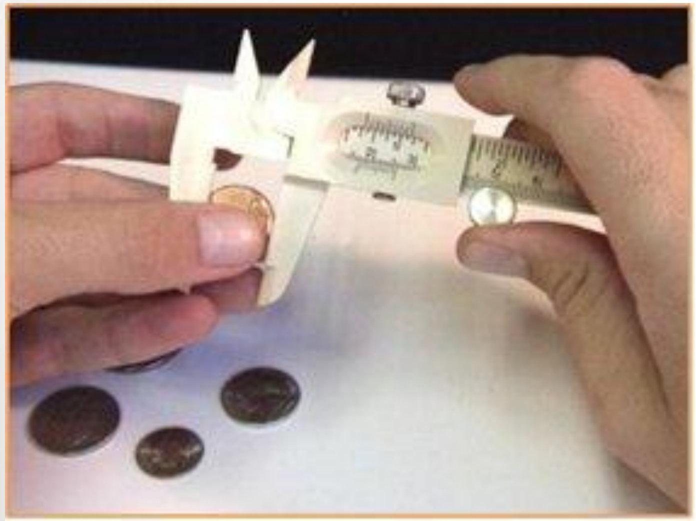
Λύση

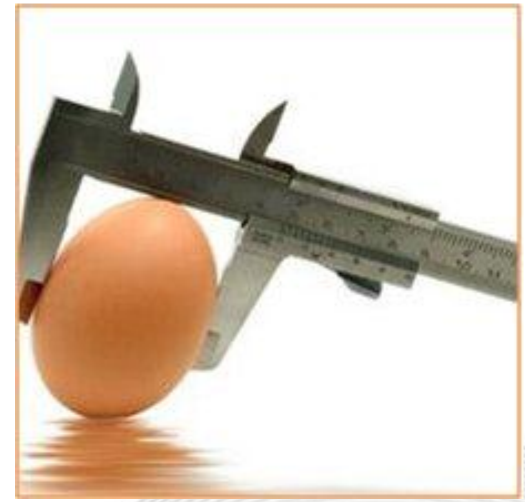
Από το σημείο **Α** φέρνουμε το κάθετο τμήμα **AA_0** στην ευθεία **ε** και συνδέουμε το σημείο **Α** με διάφορα σημεία **A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8** και **A_9** της **ε**. Μετράμε τις αποστάσεις του **Α** από αυτά και παρατηρούμε ότι αυτές μεγαλώνουν συνεχώς όσο απομακρυνόμαστε **αριστερά** και **δεξιά** από το **A_0**, άρα η ελάχιστη απόσταση είναι το ευθύγραμμο τμήμα **AA_0**. Επομένως το **A_0**, είναι το ζητούμενο σημείο και ονομάζεται **ίχνος** της κάθετης από το **Α**.

Η δεύτερη γεωμετρική ιδιότητα, που είναι κρυμμένη πίσω από την απάντηση, έχει να κάνει με τη ισο-"πλατύτητα" του κύκλου. Δηλαδή ότι το φάρδος κάθε κύκλου είναι το ίδιο σ' όλα τα σημεία της περιφέρειας του.

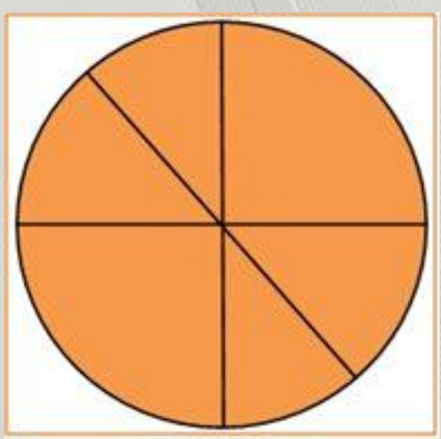
Πως το ξέρουμε;





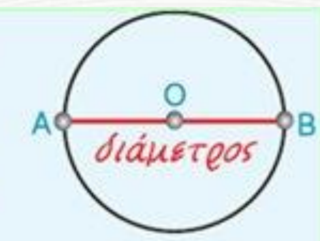


Το μεγαλύτερο φάρδος του κύκλου είναι η διάμετρος του. Και είναι γνωστό ότι όλοι οι διάμετροι του κύκλου είναι ίσοι.



Ειδικά **η χορδή** που περνάει **από το κέντρο** του κύκλου λέγεται **διάμετρος** του κύκλου.

► Η **διάμετρος** είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου, είναι διπλάσια από την ακτίνα του κύκλου και **χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη** (ημικύκλια).



Μια δεύτερη απάντηση στην ερώτηση της συνέντευξης είναι η εξής:

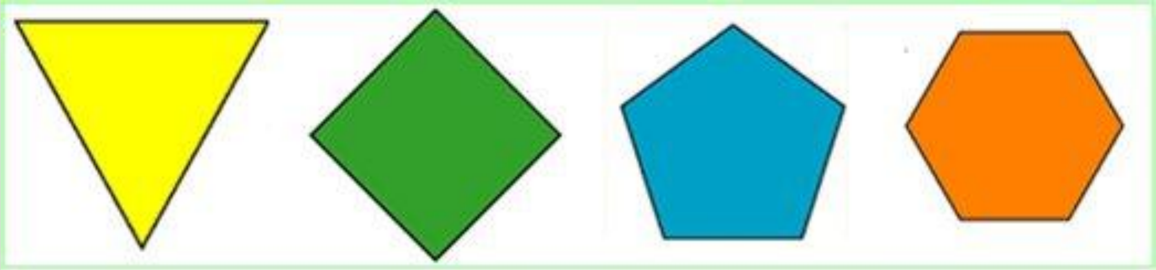
Για να βάλει ο εργολάβος του φρεατίου τα λιγότερα υλικά και να δημιουργήσει το μεγαλύτερο άνοιγμα, πρέπει να το κάνει κυκλικό κι όχι τετραγωνισμένο.

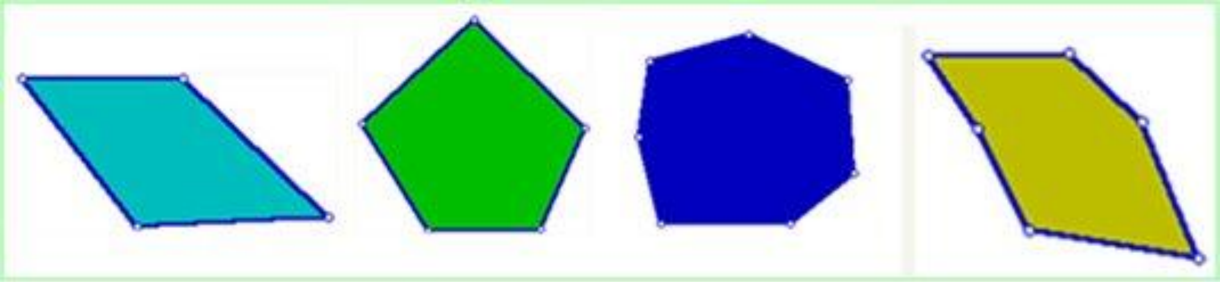
Κι αυτό γιατί οι πολιτικοί μηχανικοί γνωρίζουν, από τα Μαθηματικά, ότι απ' όλα τα κλειστά σχήματα (όπως τα πολύγωνα) του επιπέδου, που έχουν την ίδια περίμετρο, ο κύκλος έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

Η συγκεκριμένη ιδιότητα, ονομάζεται στα Μαθηματικά, ισοπεριμετρικό θεώρημα.

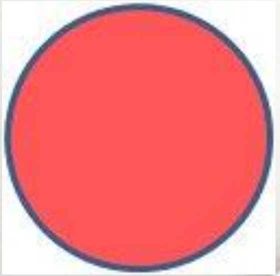
ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Απ' όλα τα επίπεδα κλειστά σχήματα (ή πολύγωνα) με την ίδια περίμετρο

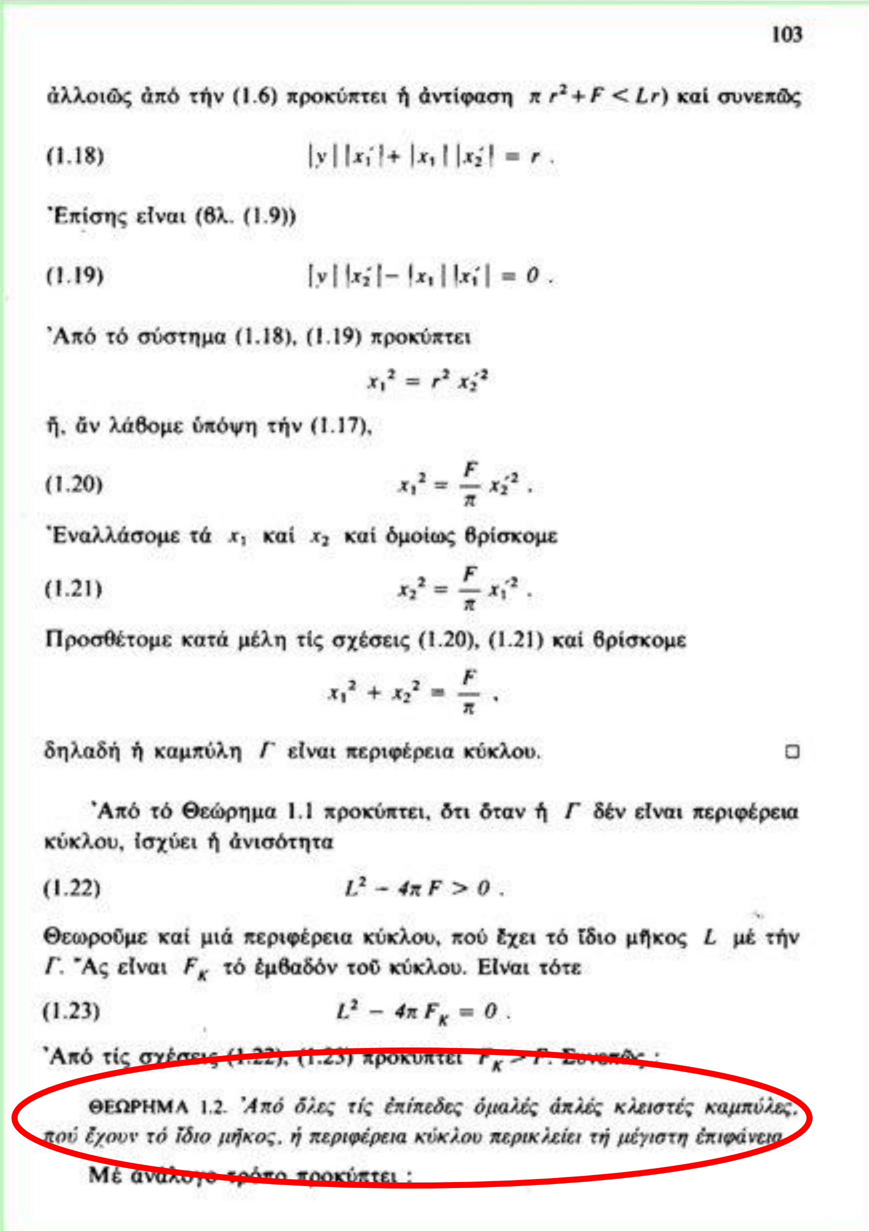




ο κύκλος έχει το <u>μεγαλύτερο εμβαδόν</u>.



Το ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ στις Μαθηματικές Σπουδές



103

ἀλλοιῶς ἀπό τήν (1.6) προκύπτει ἡ ἀντίφαση $\pi r^2 + F < Lr$) καί συνεπῶς

(1.18) $$|y|\,|x_1'| + |x_1|\,|x_2'| = r\,.$$

Ἐπίσης εἶναι (βλ. (1.9))

(1.19) $$|y|\,|x_2'| - |x_1|\,|x_1'| = 0\,.$$

Ἀπό τό σύστημα (1.18), (1.19) προκύπτει

$$x_1^2 = r^2 x_2'^2$$

ἤ, ἄν λάβομε ὑπόψη τήν (1.17),

(1.20) $$x_1^2 = \frac{F}{\pi} x_2'^2\,.$$

Ἐναλλάσομε τά x_1 καί x_2 καί ὁμοίως βρίσκομε

(1.21) $$x_2^2 = \frac{F}{\pi} x_1'^2\,.$$

Προσθέτομε κατά μέλη τίς σχέσεις (1.20), (1.21) καί βρίσκομε

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{F}{\pi}\,,$$

δηλαδή ἡ καμπύλη Γ εἶναι περιφέρεια κύκλου. □

Ἀπό τό Θεώρημα 1.1 προκύπτει, ὅτι ὅταν ἡ Γ δέν εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἰσχύει ἡ ἀνισότητα

(1.22) $$L^2 - 4\pi F > 0\,.$$

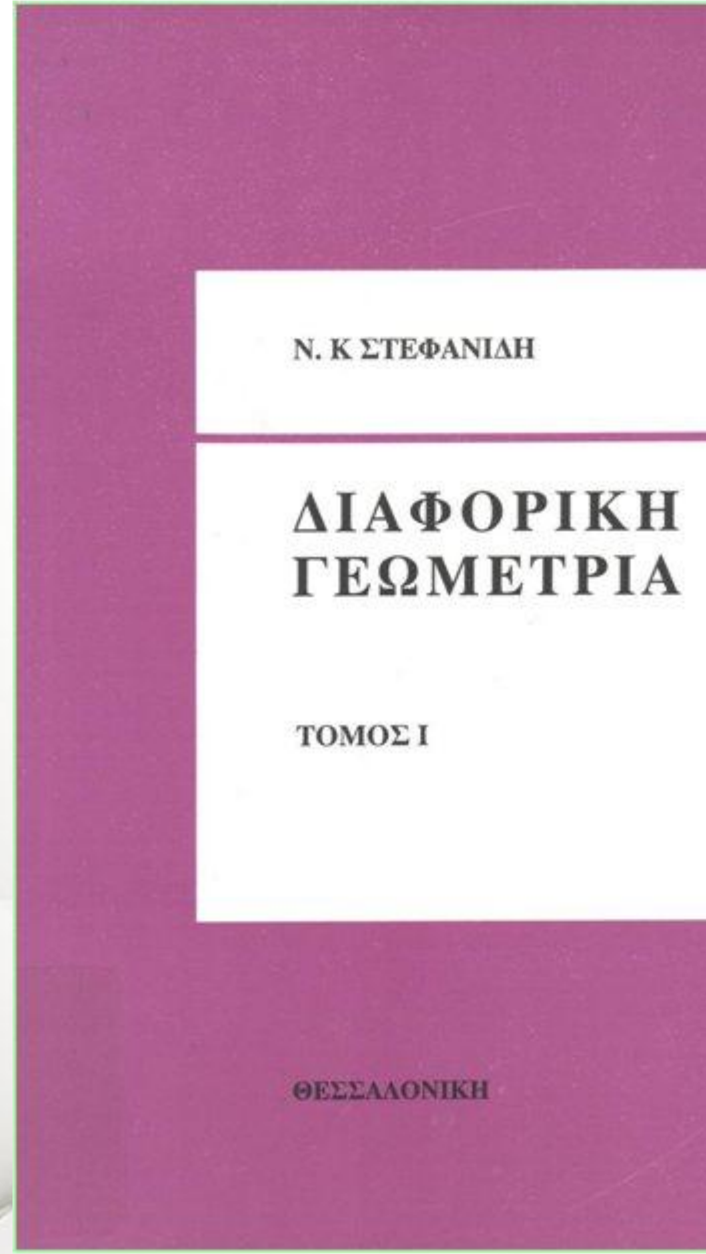
Θεωροῦμε καί μιά περιφέρεια κύκλου, πού ἔχει τό ἴδιο μῆκος L μέ τήν Γ. Ἄς εἶναι F_K τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου. Εἶναι τότε

(1.23) $$L^2 - 4\pi F_K = 0\,.$$

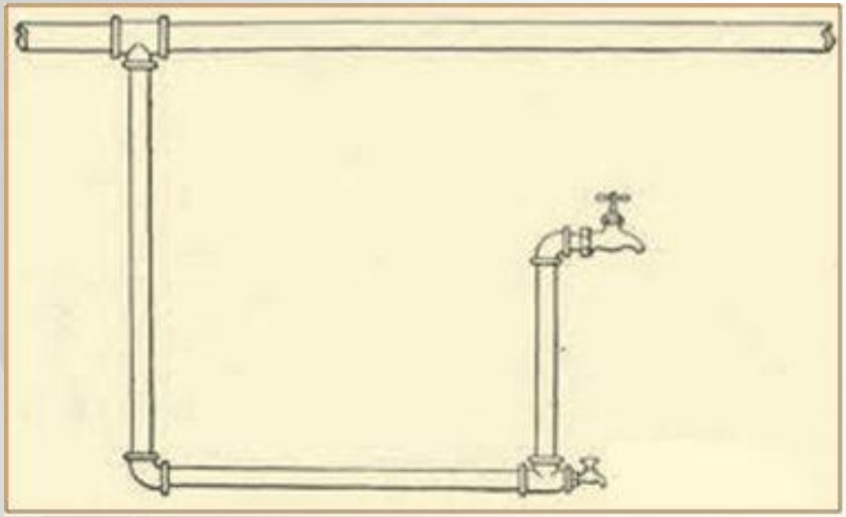
Ἀπό τίς σχέσεις (1.22), (1.23) προκύπτει $F_K > F$. Συνεπῶς :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2. *Ἀπό ὅλες τίς ἐπίπεδες ὁμαλές ἁπλές κλειστές καμπύλες, πού ἔχουν τό ἴδιο μῆκος, ἡ περιφέρεια κύκλου περικλείει τή μέγιστη ἐπιφάνεια.*

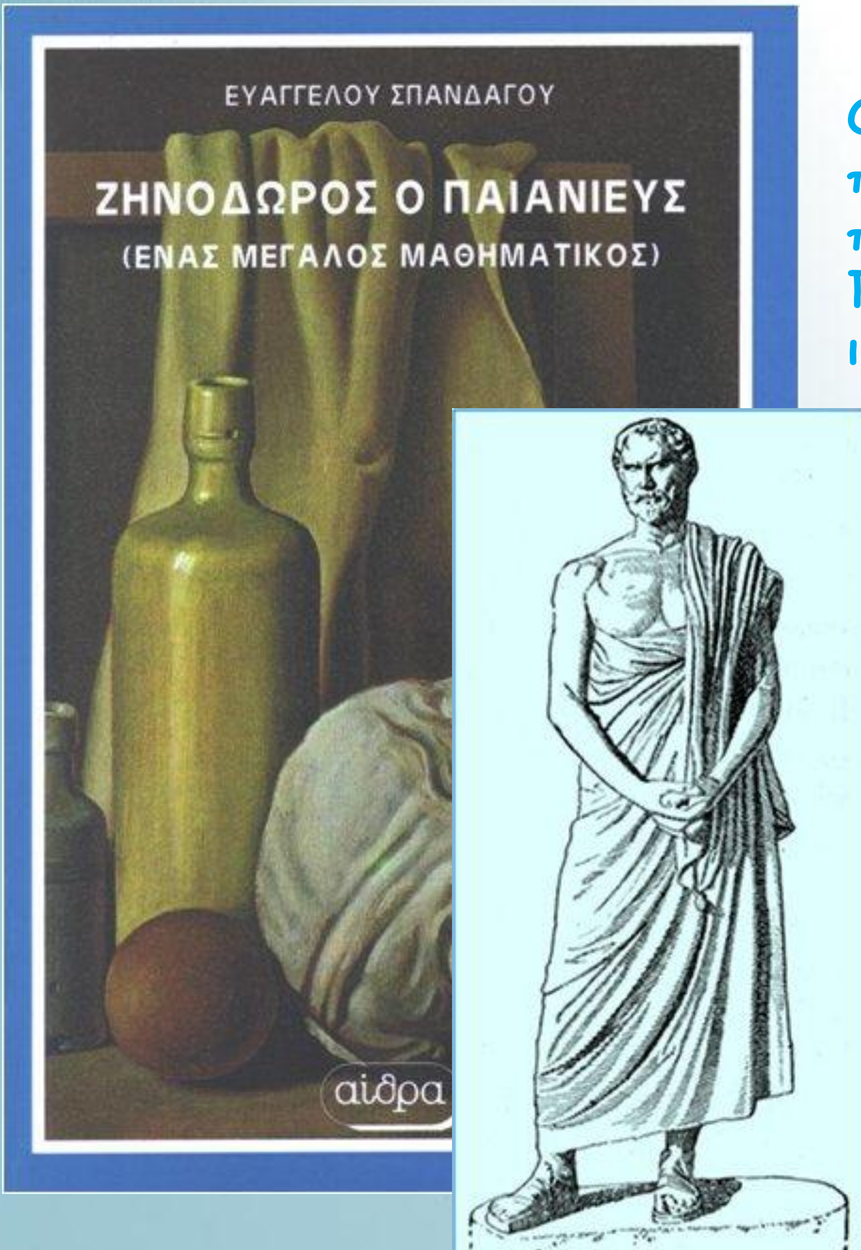
Μέ ἀνάλογο τρόπο προκύπτει :



Το ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ στην Καθημερινή Ζωή



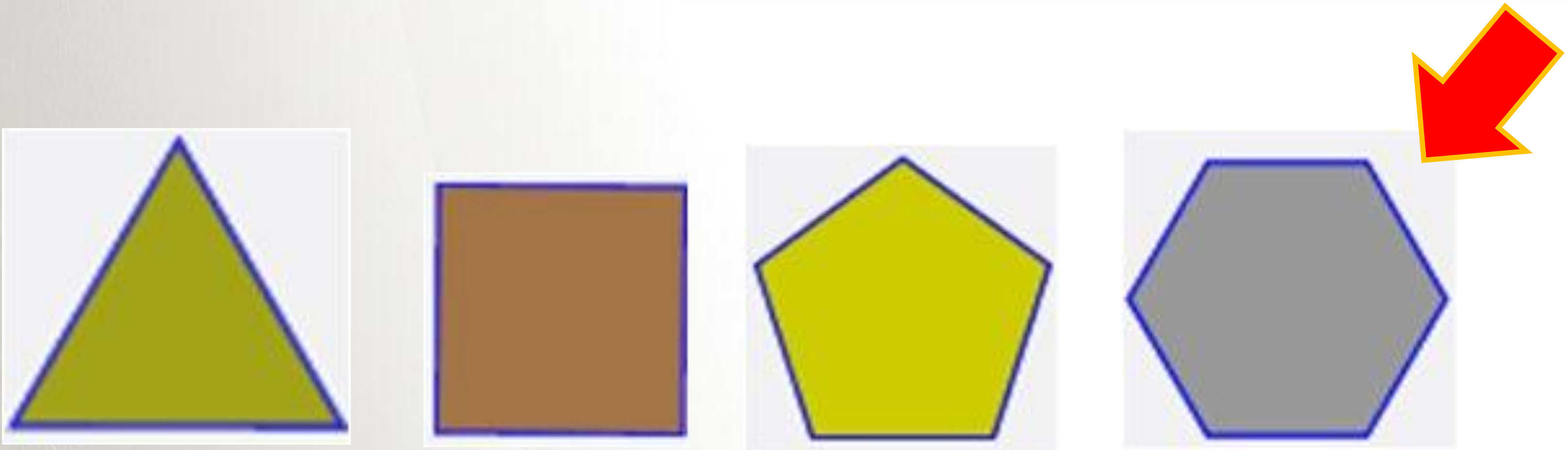

Το ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ στην Ιστορία των Μαθηματικών



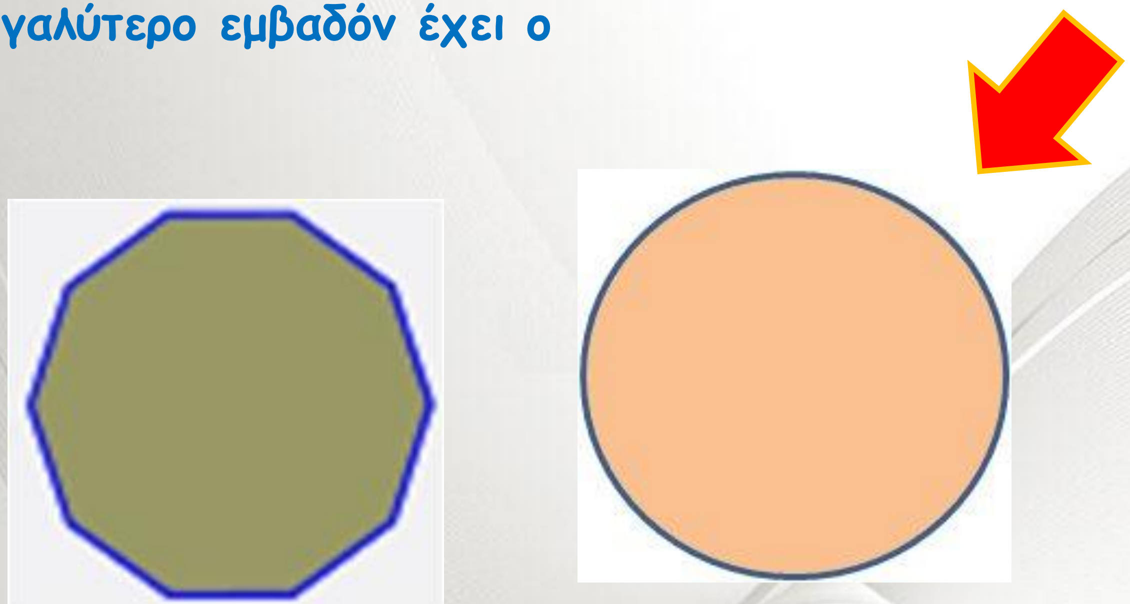
Ο **Ζηνόδωρος** από την Παιανία της Αττικής, που έζησε τον $2^{ο}$ αιώνα π.Χ., ήταν ο πρώτος γεωμέτρης του Αρχαίου Ελληνικού Πολιτισμού ο οποίος ανάπτυξε τις ισοπεριμετρικές ιδιότητες στο έργο του "Περί ισομέτρων σχημάτων".

Στο έργο του αυτό έδειξε:

- Δύο κανονικά πολύγωνα με ίσες περιμέτρους, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει εκείνο με τις περισσότερες γωνίες.



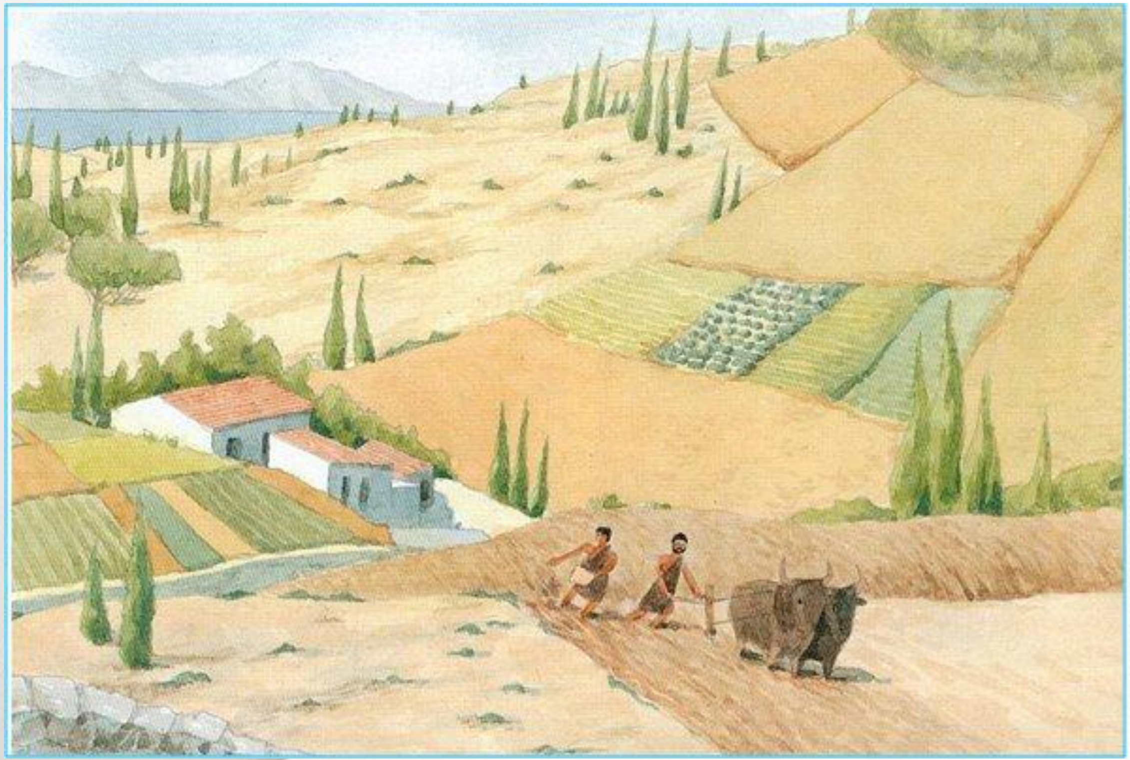
- *Αν ένας κύκλος κι ένα κανονικό πολύγωνο έχουν ίσες περιμέτρους, τότε μεγαλύτερο εμβαδόν έχει ο κύκλος.*



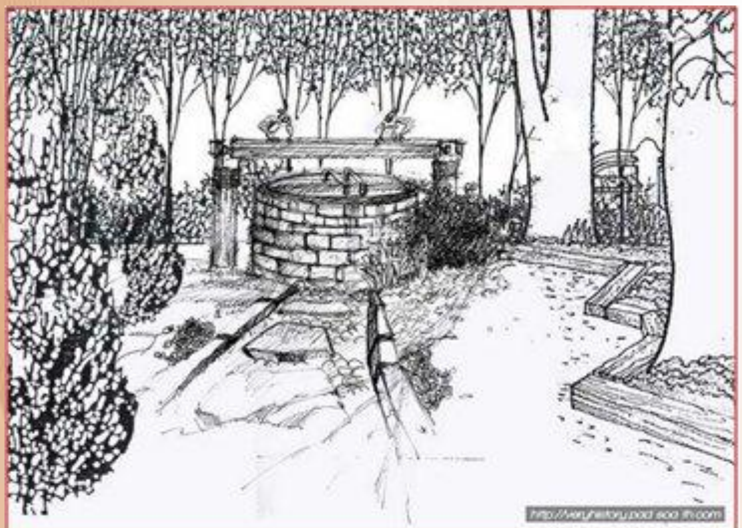
Το ενδιαφέρον και η προσπάθεια του αυτή ήταν μόνο για θεωρητική ευχαρίστηση;

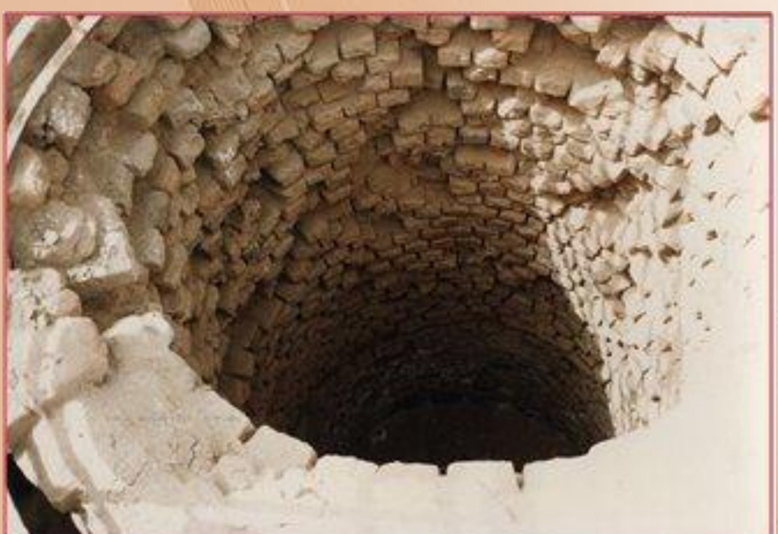
Ή είχαν κάποια σχέση και με την τότε **Καθημερινή Ζωή**;

Οι Αρχαίοι Έλληνες γαιοκτήμονες είχαν τη συνήθεια να μετρούν τα **οικόπεδα** και τα **χωράφια** με την **περίμετρό** τους. Κι αυτό δημιουργούσε απάτες και προβλήματα.

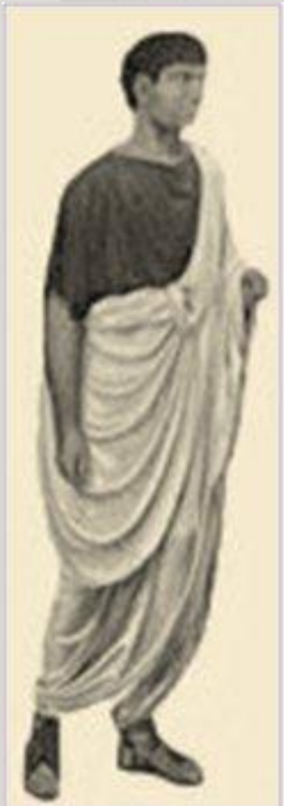


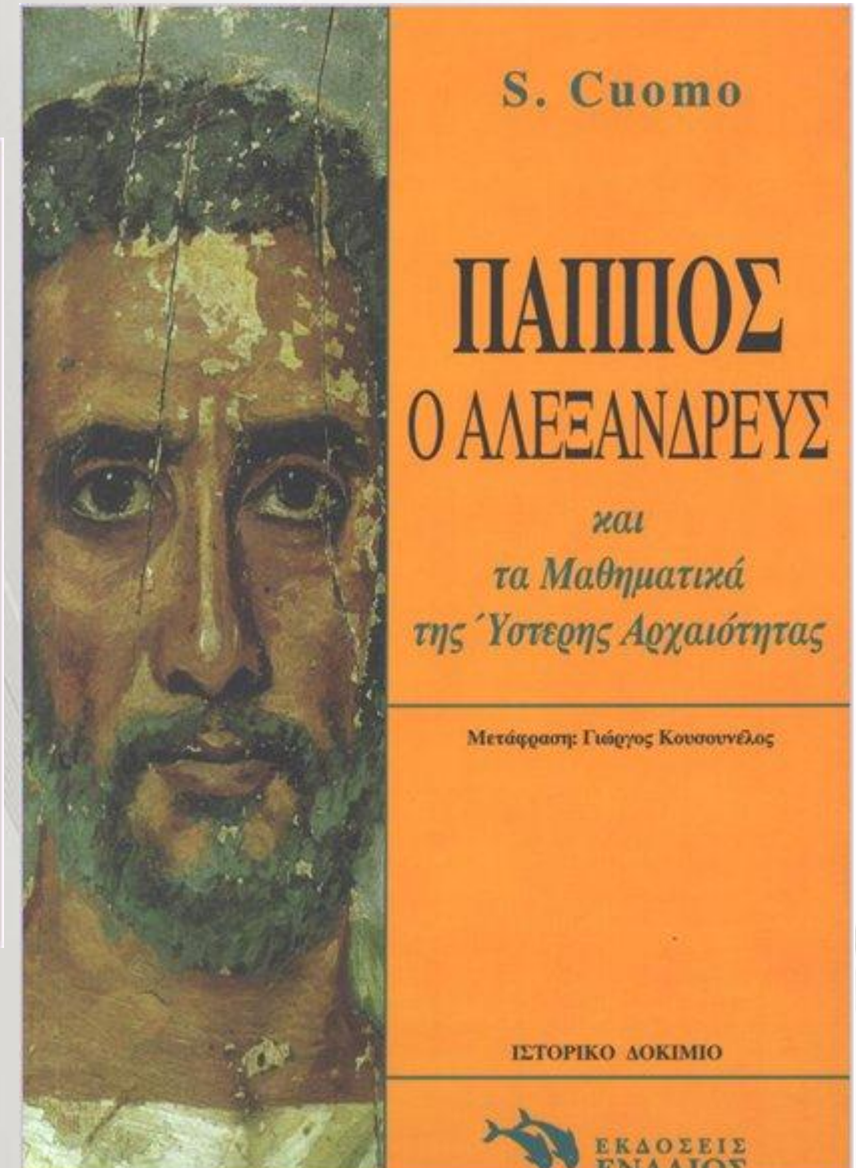
Στην Αρχαία Ελλάδα, όπως και στους άλλους πολιτισμούς της αρχαιότητας, οι άνθρωποι κατασκεύαζαν **πηγάδια**. Δεν αποκλείεται κάποιοι να σκέφτηκαν να χρησιμοποιούν τα **λιγότερα τούβλα** και να πετυχαίνουν τη **μεγαλύτερη διατομή**.

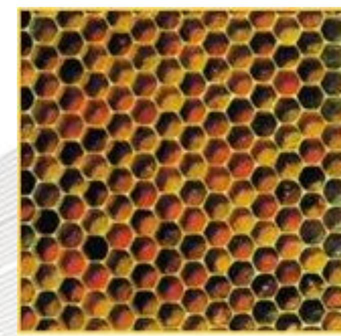


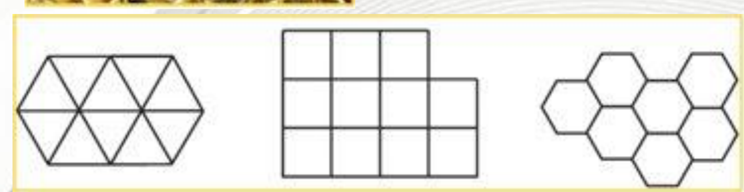


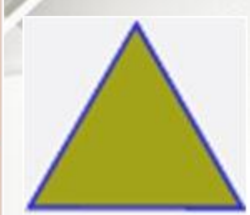
Τις ισοπεριμετρικές ιδιότητες του Ζηνόδωρου σχολίασε και πραγματεύτηκε ο Πάππος ο Αλεξανδρινός, στην αρχή του 4ου αιώνα μ.Χ.

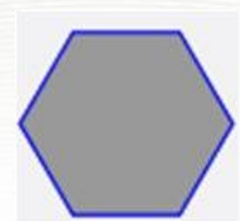










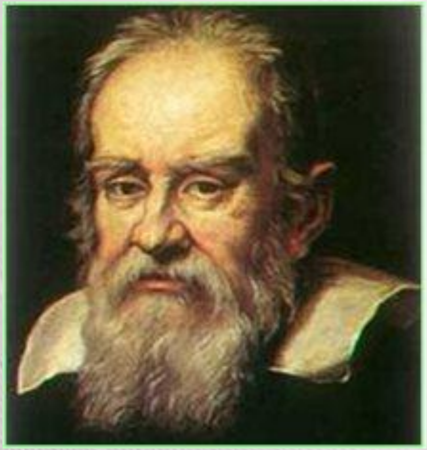


Όμοια, σχολίασε και διάσωσε ένα μέρος από το συγκεκριμένο έργο του Ζηνόδωρου, στα τέλη του $4^{ου}$ αιώνα μ.Χ., ο Θέωνας ο Αλεξανδρινός, ο πατέρας της Υπατίας.

Η γεωμετρική αυτή γνώση, διαδόθηκε στους Άραβες τον 9ο αιώνα μ.Χ., οι οποίοι ασχολήθηκαν **περιστασιακά** με το ισοπεριμετρικό θέμα.

Μια ανάλογη **υποτονική** στάση, στο συγκεκριμένο ζήτημα, παρατηρείται και στη Δυτική Ευρώπη, από τον 12ο μέχρι τον 15ο αιώνα μ.Χ.

Τον 16ο και το 17ο αιώνα, την εποχή της **επιστημονικής επανάστασης**, το ενδιαφέρον για το ισοπεριμετρικό θεώρημα **αναζωπυρώθηκε**. Αξιοσημείωτοι μαθηματικοί-επιστήμονες, όπως ο Γαλιλαίος και ο Καρτέσιος, ασχολήθηκαν με το συγκεκριμένο θέμα.

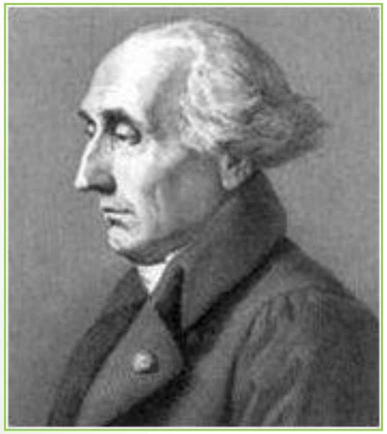


Galileo Galilei
(1564-1642)

René Descartes
(1596-1650)

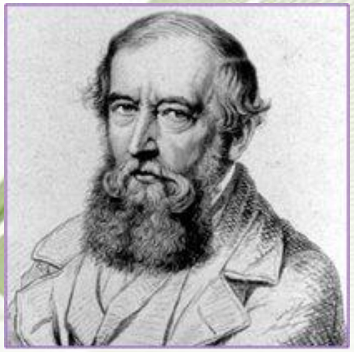
Στη συνέχεια, αναπτύχθηκε ένας νέος τρόπος σκέψης στα Μαθηματικά που προκάλεσε μια μεγάλη ανάπτυξη στις Θετικές Επιστήμες. Δύο από τους σημαντικούς μαθηματικούς που έδωσαν μια ισχυρή ώθηση στο ισοπεριμετρικό θεώρημα ήταν ο Όυλερ και ο Λαγκράνζ.

Leonhard Euler (1707-1783)



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

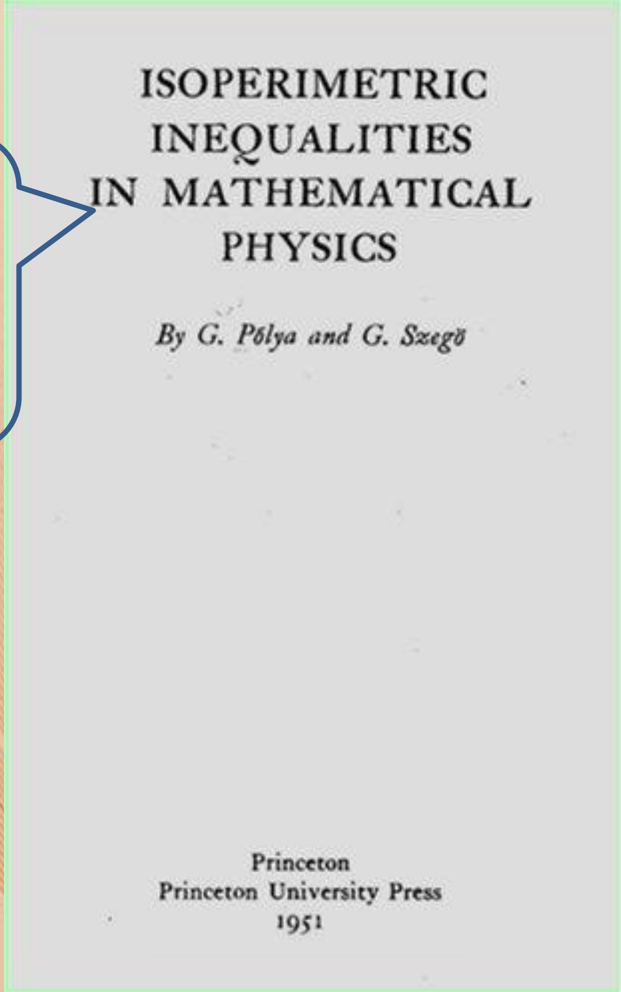
Και το 1838 ο Ελβετός μαθηματικός Γιάκοπ Στάινερ έδωσε μια **νέα** απόδειξη του ισοπεριμετρικού θεωρήματος, με τα **σύγχρονα κριτήρια** αυστηρότητας.



Jacob Steiner (1796-1863)

Τα τελευταία χρόνια, εκτός από τα Θεωρητικά Μαθηματικά, το **ενδιαφέρον** για το ισοπεριμετρικό θεώρημα αναπτύχθηκε σε διάφορους τομείς. Ξεπέρασε τα πηγάδια και τους σωλήνες, και βρήκε έδαφος στη **Φυσική**, την ***Αρχιτεκτονική*** και σ' άλλες εφαρμογές.

Ισοπεριμετρικές ανισότητες στη Μαθηματική Φυσική


ISOPERIMETRIC INEQUALITIES IN MATHEMATICAL PHYSICS

By G. Pólya and G. Szegö

Princeton
Princeton University Press
1951

London City Hall

Ένα σχετικό άρθρο για μαθητές

Από έναν ρωμαϊκό μύθο στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα...

Η πώς να πετύχετε μια συμφέρουσα αγορά

I.F. Sharygin

Στη ρωμαϊκή μυθολογία υπάρχει ένα θρύλος για τη Διδώ (ή Ελίσσα), την κόρη του Βήλου, του φοίνικα βασιλιά της Τύρου. Η Διδώ είχε παντρευτεί τον Συχαίο (ή Σιχάρμπα), τον ζάπλουτο ιερέα του Ηρακλή. Ο Πυγμαλίων, ο αδελφός της Διδώς, δολοφόνησε τον Συχαίο για να αρπάξει την περιουσία του, και η Διδώ υποχρεώθηκε να εγκαταλείψει την πατρίδα της παίρνοντας ένα μέρος από τα πλούτη του συζύγου της. Τελικά, μαζί με πολλούς συνοδοιπόρους έφτασε στην Αφρική, όπου αγόρασε μιαν έκταση γης από το βασιλιά του τόπου. Στη συμφωνία τους υπήρχε ο όρος ότι θα έπαιρνε τόση γη όση μπορούσε να χωρέσει μέσα στη δορά ενός ταύρου. Έτσι, η Διδώ έκοψε τη δορά σε λεπτές λουρίδες και περιέφραξε με αυτές μια μεγάλη περιοχή. Εκεί ίδρυσε την πόλη Καρχηδόνα με ακρόπολη τη Βύρσα (*βύρσα* στα αρχαία ελληνικά σήμαινε «γδαρμένο δέρμα ζώου, τομάρι»).

Αυτός είναι ο θρύλος. Ιδού και μια πασίγνωστη σπαζοκεφαλιά:

Είναι δυνατόν να ανοίξουμε μια τρύπα σε ένα φύλλο τετραδίου διαστάσεων 20 × 30 cm έτσι ώστε να μπορεί να περάσει ένας ενήλικος μέσα από αυτήν;

Είναι σαφής η ομοιότητα αυτής της σπαζοκεφαλιάς με το πρόβλημα που έλυσε η Διδώ. Παρά τον πρόσθετο περιορισμό ότι δεν μπορείτε να κόψετε το χαρτί σε κομμάτια, η μέθοδος της Διδώς εφαρμόζεται και σ' αυτή την περίπτωση. Παρεμπιπτόντως, είναι πολύ πιθανό ότι και η Διδώ έλυσε το ίδιο ακριβώς πρόβλημα, αλλά αργότερα η ιστορία παρανοήθηκε ή παρερμηνεύτηκε. Οι μυθογράφοι, οι ιστορικοί και οι μεταφραστές δίνουν συνήθως ελάχιστη προσοχή στην ακριβή διατύπωση των προβλημάτων. (Αν η σπαζοκεφαλιά σάς φάνηκε ιδιαίτερα δύσκολη, μπορείτε να ανατρέξετε στη σελ. 64 για μια από τις δυνατές λύσεις.)

Από μαθηματική άποψη, η σπαζοκεφαλιά είναι διατυπωμένη αυστηρότερα σε σχέση με την πρόκληση της Διδώς, αλλά εξακολουθεί να της λείπει η ακρίβεια που απαιτείται για να ονομαστεί «μαθηματική». Γενικά, η «διατύπωση προβλημάτων» είναι ο πρωταρχικός στόχος κατά τη δημιουργία μαθηματικών μοντέλων, το κύριο πρόβλημα που καλούνται να λύσουν τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Από μια άποψη, η ικανότητα σωστής διατύπωσης των προβλημάτων είναι σημαντικότερη από την ικανότητα επίλυσής τους.

Πριν συνεχίσουμε με το μαθηματικό μέρος του άρθρου, ας θυμηθούμε ένα ακόμη θέμα που το συναντάμε σε λαϊκούς θρύλους και στη λογοτεχνία. Το διήγημα «Πόση γη χρειάζεται ένας άνθρωπος;» του Λέοντος Τολστόι, το παρουσιάζει πολύ καλά: ο ήρωας της ιστορίας θα κερδίσει το κομμάτι γης γύρω από το οποίο θα περπατήσει σε μία μέρα.

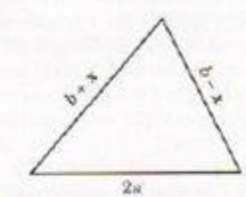
Με βάση αυτά τα μυθολογικά και λογοτεχνικά θέματα μπορούμε να επινοήσουμε μια ολόκληρη σειρά προβλημάτων. Ιδού ένα από τα απλούστερα.

Πρόβλημα 1. Βρείτε το τρίγωνο με το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ όλων των τριγώνων με σταθερό το μήκος της μίας πλευράς και σταθερό το άθροισμα των μηκών των δύο άλλων πλευρών.

Λύση. Έστω $2a$ το δεδομένο μήκος της μίας πλευράς και $2b$ το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών. (Παρατηρήστε ότι η τριγωνική ανισότητα μας εξασφαλίζει ότι $a < b$.) Θα συμβολίσουμε το ένα από τα άγνωστα μήκη ως $b + x$, οπότε το άλλο θα είναι ίσο με $b - x$ (Σχήμα 1). Ο τύπος του Ήρωνος μας δίνει

$$\begin{aligned} S^2 &= (a+b)(b-a)(a+x)(a-x) \\ &= (b^2-a^2)(a^2-x^2) \end{aligned}$$

(αφού η ημιπερίμετρος ισούται με a



Σχήμα 1