

**1ο ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ****ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ****ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ****ΣΤΑ****ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ****Γ' ΤΑΞΗΣ**

Ονομάζεται "**ΔΙΑΒΑΣΜΑ**".  
Είναι ο τρόπος με τον οποίο οι άνθρωποι  
εγκαθιστούν νέο λογισμικό στον  
εγκέφαλό τους.

**ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ****ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2018 – 2019**

1<sup>ο</sup> ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 1

- A. Να αποδείξετε ότι:  $(x^2)' = 2x$ ,  $x \in \mathcal{R}$   
 B. Πότε μία μεταβλητή ονομάζεται ποιοτική και πότε ποσοτική;  
 Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος:  
 α.  $(x^2)' = 2x$   
 β.  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$   
 γ.  $(\ln x)' = x$   
 δ.  $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$   
 ε.  $(e^x)' = xe^x - 1$  για τις κατάλληλες τιμές του  $x$ .

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + ax^2 - x - 2$ ,  $x \in \mathcal{R}$ .

Γ1. Να βρείτε το  $a$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(2,12)$

Γ2. Αν  $a=2$  να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(2,12)$

## ΘΕΜΑ 3

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$  μιας μεταβλητής  $X$ , και κάποιες από τις αντίστοιχες συχνότητες. Η σχετική συχνότητα της τιμής  $x_4$  είναι  $f_4=0,4$ .

Η συχνότητα  $v_i$  είναι το τοπικό ελάχιστο και η μέση τιμή  $\bar{x}$ , των παραπάνω τιμών  $x_i$  το τοπικό μέγιστο της συνάρτησης:  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$ .

- α. Να αποδείξετε ότι το μέγεθος  $n$  του δείγματος, είναι:  $n=15$ .  
 β. Να αποδείξετε ότι  $v_1=2$  και  $\bar{x}=3$ .  
 γ. Να αποδείξετε ότι η συχνότητα  $v_3$  είναι  $v_3=5$ .  
 δ. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

$x_i$	$v_i$
1	
2	2
3	
4	6
Σύνολο	$v$

## ΘΕΜΑ 4

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ' τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [ - )	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i$
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

- α) Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.  
 β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.  
 γ) Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.  
 γ<sub>1</sub>) Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.  
 γ<sub>2</sub>) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.

2<sup>ο</sup> ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 1

- A. Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x)=x$  είναι  $f'(x)=1$ .
- B. Πότε μία συνάρτηση  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε φθίνουσα;
- Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις προτάσεις:
- Το εύρος είναι μέτρο θέσης
  - Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.
  - Ισχύει  $f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$  όπου  $f, g$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
  - Δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  του ίδιου δειγματικού χώρου λέγονται ασυμβίβαστα όταν  $A\cap B=\emptyset$ .
  - Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για την γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$  με τύπο:  $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$ ,  $a, b, c\in\mathbb{R}$ .

B1. Να υπολογίσετε το  $c$ , αν είναι γνωστό ότι  $\gamma=\lim_{x\rightarrow 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3}$ .

B2. Να υπολογίσετε τα  $a, b\in\mathbb{R}$  αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της  $f$ , στα σημεία με τετμημένες 1 και  $1/3$  είναι παράλληλες στον άξονα  $x'x$ .

B3. Για  $a=2$ ,  $b=1$  και  $c=36$  να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

## ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = 10sx^2 + \bar{x}x + 11$ ,  $x\in\mathbb{R}$ , όπου  $\bar{x}$  η μέση τιμή  $x$  και  $s$  η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ενός δείγματος.

Αν η εφαπτόμενη της καμπύλης της  $f$  στο σημείο  $A(-1, f(-1))$  είναι παράλληλη στην  $\varepsilon: y=2019$  τότε :

A) Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης  $f$ .

B) Να δείξετε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές.

Γ) Να δείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο.

Δ) Αν η ελαχίστη τιμή της  $f$  είναι ίση με 1 τότε:

i) Να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων του δείγματος.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της  $f$  στο σημείο  $A$

## ΘΕΜΑ 4

Στον παρακάτω πίνακα περιγράφονται οι βαθμολογίες 100 φοιτητών του Μαθηματικού τμήματος του Α.Π.Θ στο μάθημα της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Βαθμολογία	Πλήθος Φοιτητών $v_i$	Ποσοστό Φοιτητών $f_i\%$	Αθροιστικές Συχνότητες $N_i$	Αθροιστικές Σχετικές Συχνότητες $F_i\%$
2	12			
3	8			
4	35			
5	20			
6	5			
7	10			
8	6			
9	4			
Σύνολα	100			

Δ1. Αφού μεταφέρετε τον πίνακα στο φύλλο των απαντήσεών σας, να τον συμπληρώσετε.

Δ2. Να βρείτε το πλήθος των φοιτητών που κόπηκε στο μάθημα (δηλαδή που έγραψε βαθμό κάτω από 5).

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των φοιτητών που αρίστευσε (δηλαδή που έγραψε τουλάχιστον 8)

Δ4. Ποιο το ποσοστό των φοιτητών που έγραψε βαθμό τουλάχιστον 5 και το πολύ 7;

Δ5. Να βρείτε τον μέσο όρο των βαθμολογιών των γραπτών των 100 φοιτητών.

3<sup>ο</sup> ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 1

A1. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , να δείξετε ότι:  $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

A2. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ ή Λ.

α)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x_0$ .

β)  $(cf(x))' = cf'(x)$

γ) Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων.

δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής  $X$  χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.

ε) Για τις σχετικές συχνότητες  $f_i$ , όπου  $i=1,2,\dots,k$  των τιμών  $x$  μιας μεταβλητής  $X$ , ισχύει:  $f_1+f_2+\dots+f_k=1$ .

## ΘΕΜΑ 2

Για την περιφραξη ενός ορθογωνίου οικοπέδου με εμβαδόν  $400 \text{ m}^2$  και διαστάσεις  $x, y$  δαπανήθηκαν  $48 \text{ €}$  ανά μέτρο για τις πλευρές  $x$  και  $12 \text{ €}$  ανά μέτρο για τις  $y$ .

i) Να δείξετε ότι το συνολικό κόστος δίνεται από την σχέση  $k(x) = 96x + \frac{9600}{x}$

ii) Να βρείτε τα  $x, y$  όταν το κόστος είναι ελάχιστο.

iii) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος.

## ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων ενός δείγματος, μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$ .

Τιμές $x_i$	Συχνότητες $v_i$	$x_i v_i$	Αθροιστικές Συχνότητες $N_i$	Σχετικές Συχνότητες $f_i$	Σχετικές Συχνότητες $f_i \%$
1	36				
2	60				
3					
4	30				
Σύνολο	200				

Γ1. Να υπολογίσετε τη συχνότητα  $v_3$  της τιμής  $x_3=3$ .

Γ2. Να μεταφέρετε συμπληρωμένο τον παραπάνω πίνακα στην κόλλα σας.

Γ3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο του παραπάνω δείγματος.

Γ4. Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του 2.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$  και ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  που αποτελείται από απλά ισοπίθανα

ενδεχόμενα. Θεωρούμε  $A$  και  $B$  δυο ενδεχόμενα του  $\Omega$  για τα οποία ισχύουν

$$P(A \cup B) = \frac{1}{12}, \quad P(A) = 8 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{7}{12}$$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

Δ2. Να αποδείξετε ότι  $P(A) = \frac{1}{3}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ .

Δ3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να συμβεί ένα μόνο από τα  $A$  και  $B$ .

4<sup>ο</sup> ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

**ΘΕΜΑ 1**

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x)=c$  είναι  $f'(x)=0$ .

B. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με Σ ή Λ.

α. Για το πηλίκο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f, g$  ισχύει  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ .

β. Αν για τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ , όπου  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ , τότε ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2$ .

γ. Το διάγραμμα συχνότητας χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

δ. Το εύρος ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων είναι μέτρο διασποράς.

ε. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $(x_0, f(x_0))$  είναι ο αριθμός  $f'(x_0)$ .

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^3-4x^2-3x+5$ , για  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να υπολογίσετε τις τιμές  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(2)$ .

β. Βρείτε την παράγωγο της  $f$ .

γ. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονotonία.

δ. Να βρεθούν τα ακρότατα της  $f$ .

**ΘΕΜΑ 3**

Ρωτήσαμε τους 40 μαθητές μιας τάξης για τον αριθμό των αδελφών τους. Οι απαντήσεις που πήραμε φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συχνότητων.

Αριθμός αδελφών $x_i$	Συχνότητα $n_i$	Αθροιστική Συχν. $N_i$	Σχετική Συχν. $f_i$	Σχετική Συχν. $f_i\%$	Αθρ. Σχετ. Συχν. $F_i$	Αθρ. Σχετ. Συχν. $F_i\%$
0	8					
1	12					
2	10					
3	8					
4	2					
Σύνολο		-			-	-

B1. Να αντιγράψετε τον πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε.

B2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή  $\bar{x}$  του παραπάνω δείγματος.

B3. Να βρείτε το πλήθος και το ποσοστό των μαθητών που έχουν τουλάχιστον ένα αλλά το πολύ τρία αδέρφια.

**ΘΕΜΑ 4**

Έστω  $X$  μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  και  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι

παρατηρήσεις με μέση τιμή  $\bar{x}$  και τυπική απόκλιση  $s$ . Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=2x^3-sx^2-3x$  στο σημείο της  $A(2,-3)$  είναι παράλληλη στον  $x'x$

1. Να βρείτε την μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $s$

2. Έστω  $\bar{x}=4$  και  $s=3$

2.1. Αν  $y_1, y_2, \dots, y_n$  είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις  $x_1, x_2, \dots, x_n$  με το  $-2$  και μετά προσθέσουμε το  $1$ , να εξετάσετε αν το καινούριο δείγμα είναι ομοιογενές

2.2. Αν η κατανομή είναι περίπου κανονική και 20 παρατηρήσεις έχουν τιμή τουλάχιστον 10, να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων

**ΘΕΜΑ 1**

A1. Έστω  $t_1, t_2, \dots, t_n$  οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$ ,

που έχουν μέση τιμή  $\bar{x}$ . Σχηματίζουμε τις διαφορές  $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_n - \bar{x}$ . Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

A2. Αν  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$  και  $w_1, w_2, \dots, w_n$  είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής  $X$ .

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ ή Λ.

α) Αν για τις συναρτήσεις  $f, g$  υπάρχουν τα όρια στο  $x_0$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

β) Για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

γ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση  $x=f(t)$ , τη χρονική στιγμή  $t_0$  είναι  $v(t_0)=f'(t_0)$

δ) Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

ε) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x e^x$ .

α. Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της  $f$ .

β. Να δείξετε ότι:  $f''(x)-2f'(x)+f(x)=0$ .

γ. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της  $f$  στο  $x_0=0$ .

**ΘΕΜΑ 3**

Εξετάστηκε ένα δείγμα 80 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός παιδιών ( $x_i$ )	Αριθμός ( $n_i$ ) οικογενειών	$f_i$	$f_i \%$	$v_{ix_i}$	$N_i$
0	12				
1	20				
2	32				
3	12				
4	4				
Σύνολο	80				

A. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας.

B. Να υπολογίσετε:

i) Τη μέση τιμή.

ii) Τη διάμεσο της κατανομής.

**ΘΕΜΑ 4**

Θεωρούμε το δείγμα των παρατηρήσεων  $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$  και τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ .

Γ1. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του παραπάνω δείγματος.

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

Γ4. Αν  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $A \cup B = \Omega$ ,  $P(A) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  και  $P(B')$  η τιμή της διαμέσου που υπολογίσατε στο Γ1, να υπολογίσετε την  $P(A \cap B)$ .

## 6° ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 1

- A. Να αποδειχθεί ότι για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- B. α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές;  
 β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ ή Λ  
 α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .  
 β. Ισχύει  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$  όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.  
 γ. Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης.  
 δ. Αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(A) > P(B)$ .  
 ε. Για την σχετική συχνότητα  $f_i$  των τιμών  $x_i$  ενός δείγματος μεγέθους n ισχύει  $0 \leq f_i \leq 1$ .

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 1$ , για  $x \in \mathbb{R}$ .

- B1. Να βρείτε την  $f'(x)$   
 B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα  
 B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο της  $M(-1, f(-1))$   
 B4. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x^2 - x}$

## ΘΕΜΑ 3

Οι αποστάσεις (σε km) των 25 κοινοτήτων ενός νομού από το πλησιέστερο νοσοκομείο είναι :

- 5, 10, 8, 8, 13, 10, 4, 2, 0, 16, 5, 15, 9, 6, 4, 7, 5, 4, 6, 7, 7, 5, 8, 10, 3
- 1) Να κατασκευάσετε πίνακα
- α) Απόλυτων συχνοτήτων  
 β) Αθροιστικών συχνοτήτων των αποστάσεων
- 2) Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο περισσότερο από 10 km;  
 3) Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο τουλάχιστον 5 km και το πολύ 8 km;  
 4) Να βρεθεί το ποσοστό των κοινοτήτων που απέχουν από το νοσοκομείο ακριβώς 8 km;

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :  $f(x) = \frac{(x^2 - 1)\lambda^2 - 4x^2 + 4}{x - 1}$

και το πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού με δειγματικό χώρο  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Αν  $\lambda \in \Omega$  τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2(\lambda^2 - 4)$ .  
 β. Να προσδιορίσετε τα στοιχεία των παρακάτω ενδεχομένων  $A = \{ \lambda \in \mathfrak{R} / \lim_{x \rightarrow 1} f(x) > 0 \}$ ,  $B = \{ \lambda \in \mathfrak{R} / \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6\lambda \}$ .
- Να βρείτε την πιθανότητα :
- i. Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B.  
 ii. Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A.



7<sup>ο</sup> ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 1

- A1. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και  $c \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι  $(cf(x))' = cf'(x)$ .  
 A2. Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού;  
 A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ ή Λ.

α) Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν κοινό πεδίο ορισμού το  $A$ , τότε η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  έχει πάντα πεδίο

ορισμού το  $A$ .

β) Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x) = \sin x_0$ .

γ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.

δ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος  $n$  του δείγματος.

ε) Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$ , είναι  $P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k)$

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^2 + 3x + 2$ , για  $x \in \mathbb{R}$ .

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B2. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$ .

B3. Να βρεθεί η  $f'(x)$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  $f(x) - x f'(x) = 2 - x^2$ .

B4. Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

## ΘΕΜΑ 3

Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  και κάποιες συχνότητες, αθροιστικές συχνότητες, σχετικές συχνότητες και αθροιστικές σχετικές συχνότητες.

Γ1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας

Γ2. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση

Γ3. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

$x_i$	$v_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
100				0,1		
200	15	20				
300			0,4			
400						
ΣΥΝ						

## ΘΕΜΑ 4

Σε ένα Λύκειο, το 61% των μαθητών χρησιμοποιεί για ηλεκτρονική αλληλογραφία το "Gmail", το 53% χρησιμοποιεί το "Yahoo" ενώ το 93% χρησιμοποιεί μία τουλάχιστον από τις δύο υπηρεσίες.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή αυτού του Λυκείου και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής χρησιμοποιεί το "Gmail".

B: ο μαθητής χρησιμοποιεί το "Yahoo".

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Δ1. Ο μαθητής να μην χρησιμοποιεί το "Yahoo".

Δ2. Ο μαθητής να χρησιμοποιεί και τις δύο αυτές υπηρεσίες ηλεκτρονικής αλληλογραφίας.

Δ3. Ο μαθητής να χρησιμοποιεί μόνο μία από τις δύο αυτές υπηρεσίες.

Δ4. Ο μαθητής να χρησιμοποιεί μία το πολύ από τις δύο αυτές υπηρεσίες ηλεκτρονικής αλληλογραφίας.



## 8° ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 1

- A.1. Δίνονται οι συναρτήσεις  $F(x)$ ,  $f(x)$  και  $g(x)$  με  $F(x)=f(x)+g(x)$ . Αν οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι:  $F'(x)=f'(x)+g'(x)$ .
- A.2. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής  $x$ , αν  $\bar{x} > 0$  και πώς, αν  $\bar{x} < 0$ ;
- B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με Σ ή Λ.
- Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.
  - Αν  $x > 0$ , τότε  $(\ln x)' = 1/x$ .
  - Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, εκτός από τις συχνότητες  $f_i$  και  $n_i$ , χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες  $F_i$ ,  $N_i$ .
  - Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς μιας μεταβλητής είναι η μέση τιμή και η διάμεσος
  - Αν για τα ενδεχόμενα  $A$ ,  $B$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει  $P(A)=P(B)$ , τότε είναι πάντοτε  $N(A)=N(B)$ .

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{x+3}{2-x}$ .

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .      2. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = \frac{-5}{(x+3)(x-2)}$ .
3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι δεν έχει ακρότατο.

## ΘΕΜΑ 3

Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών $\chi_i$	Οικογένειες $\nu_i$	Σχετικές συχνότητες $f_i\%$	Αθροιστικές σχετικές συχνότητες $F_i\%$
0			10
1	15		
2		50	
3			
4		8	
Αθροίσματα	50		

A) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

B) Να βρείτε το ποσοστό των οικογενειών που έχουν το πολύ 2 παιδιά.

Γ) Να βρείτε το ποσοστό των οικογενειών που έχουν τουλάχιστον 2 παιδιά.

Δ) Να βρείτε το ποσοστό των οικογενειών που έχουν ακριβώς 3 παιδιά.

## ΘΕΜΑ 4

Αν για τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματοχώρου  $\Omega$  έχουμε  $P(A)=1/2$ ,  $P(B)=1/3$  και  $P(A \cap B)=1/6$ , να βρείτε τις πιθανότητες :

- Να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα  $A$  και  $B$ .
- Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα  $A$  και  $B$ .
- Να πραγματοποιηθεί μόνο το  $A$ .
- Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα  $A$  και  $B$ .

9<sup>ο</sup> ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

**ΘΕΜΑ 1**

- A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x)=x$  είναι ίση με 1.  
 Δηλαδή  $(x)'=1$ .
- A2. Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής;
- A3. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις, να γράψετε στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη Σωστό ή τη λέξη Λάθος, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- Αν για τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ , όπου  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ , τότε ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2$ .
  - Η παράγωγος της  $f(x) = \eta\mu x$  είναι η  $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$ .
  - Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα  $\nu_i$  μίας μεταβλητής  $X$ , με το μέγεθος  $\nu$  του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ . Δηλαδή  $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$  με  $k \leq \nu$ .
  - Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) > f(x_2)$ .
  - Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες τότε ισχύει:  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=\alpha x^3 + \beta x^2 + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , η καμπύλη της οποίας διέρχεται από τα σημεία  $A(1,0)$  και  $B(2,5)$ .

- Να αποδείξετε ότι  $\alpha=2$  και  $\beta=-3$ .
- Για  $\alpha=2$  και  $\beta=-3$ , να βρείτε την  $f'(x)$ .
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0=-1$ .

**ΘΕΜΑ 3**

Ρωτήθηκαν 10 οικογένειες για τον αριθμό των παιδιών που έχουν και οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

Αριθμός παιδιών $x_i$	Συχνότητα $\nu_i$	Σχετ. Συχνότητα $f_i$	Σχετ. Συχνότητα $f_i \%$	Αθρ. Συχνότητα $N_i$
0	$\alpha$			
1	$\alpha+2$			
2	$\alpha+1$			
3	$\alpha-1$			
Σύνολο				

- Να δείξετε ότι  $\alpha = 2$ .
- Να συμπληρώσετε τον πίνακα αν  $\alpha = 2$ .
- Να βρείτε την μέση τιμή των παιδιών που έχουν οι 10 οικογένειες.

**ΘΕΜΑ 4**

Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:

11    3    7    5    16    14    11    10    11    12

Να βρείτε:

- τη διάμεσο,
- τη μέση τιμή
- το εύρος και
- τη διακύμανση της παραπάνω βαθμολογίας

10° ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

**ΘΕΜΑ 1**

- A1. Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_1 \in A$ ;
- A2. Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα  $v_i$  της τιμής  $x_i$  μιας μεταβλητής  $X$ ;
- A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ ή Λ.  
 α) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα  $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ , όπου  $\bar{x}$  η μέση τιμή και  $s$  η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.  
 β) Σε ομαδοποιημένα δεδομένα το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι πάντοτε ίσο με ένα.  
 γ) Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$ . Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $(x_0, f(x_0))$  είναι  $f'(x_0)$ .  
 δ) Το ενδεχόμενο  $A-B$  πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το  $A$  αλλά όχι το  $B$ .  
 ε) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι ένα μέτρο διασποράς.

**ΘΕΜΑ 2**

- Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται σε κατακόρυφο άξονα δίνεται από τον τύπο  $y(t) = 3\eta\mu 2t$ ,  $t \in [0, 2\pi)$
- α) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου ως συνάρτηση του  $t$ .  
 β) Να δείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης  $y$ .  
 γ) Να δείξετε ότι όταν η επιτάχυνση είναι 0, το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο.

**ΘΕΜΑ 3**

- Το μέσο ύψος ενός δείγματος 40 μαθητών της Γ' τάξης ενός λυκείου είναι  $\bar{x} = 170\text{cm}$ . Η κατανομή των μαθητών ως προς το ύψος είναι κανονική και το 34% των μαθητών έχουν ύψος από 170cm έως 175cm.
- Γ1. Να αποδείξετε ότι τυπική απόκλιση  $s$  του ύψους των μαθητών είναι 5.  
 Γ2. Να υπολογίσετε το ποσοστό και το πλήθος των μαθητών που έχουν ύψος από 160cm έως 180cm.  
 Γ3. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του ύψους των μαθητών και να χαρακτηρίσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

**ΘΕΜΑ 4**

A1 Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής  $X$  σωστά συμπληρωμένο.

Τιμές Μεταβλητής	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστική Συχνότητα			
$X_i$	$V_i$	$f_i$	$fi\%$	$N_i$	$X_i V_i$	$X_i^2$	$X_i^2 V_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
ΣΥΝΟΛΟ	$v=50$	1	100				

A2 Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\}$$

A3 Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι  $s^2=0,49$ . Δίνεται ότι:

- B. Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε € :  
 8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.
- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο .  
 β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.  
 γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

11° ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

**ΘΕΜΑ 1**

A1) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x)=x$  είναι  $f'(x)=1, x \in \mathbb{R}$ .

A2) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.

i) Μια συνάρτηση  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in A$  όταν υπάρχει το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ .

ii) Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα  $\Delta$  με  $g(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \Delta$  τότε και η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  με  $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ .

iii) Έστω ένα δείγμα μεγέθους  $n$  και μια ποσοτική μεταβλητή  $X$  με τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Αν  $v_1, v_2, \dots, v_k$  είναι οι αντίστοιχες συχνότητες τους, τότε η μέση τιμή του συνόλου των  $n$  παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k}{v_1 + v_2 + \dots + v_k}$$

iv) Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Τότε για οποιαδήποτε ενδεχόμενα του  $A$  και  $B$  ισχύει ότι  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

v) Αν  $A' \subseteq B$  τότε  $P(A) + P(B) < 1$ .

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$  και η παράγωγός της
2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της
3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  έχει ολικά ακρότατα

**ΘΕΜΑ 3**

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων που παριστάνει την κατανομή του αριθμού των μαθημάτων που άριστewσαν ενός δείγματος φοιτητών.

$x_i$	$v_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
1	8					
2			14			
3	4	0,2				
4						
Σύνολα			////////////////	////////////////		////////////////

- G1. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε (με αιτιολόγηση) τον παραπάνω πίνακα.
- G2. Να βρείτε τον αριθμό και το ποσοστό των φοιτητών που άριστewσαν σε περισσότερα από δύο μαθήματα.

**ΘΕΜΑ 4**

Σε μία στατιστική έρευνα παίρνουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις που αφορούν σε μία μεταβλητή  $X$ :  
 $1, \alpha, 5, 2, \beta, 7, 5, \gamma, 2, 1$

Δίνεται επιπλέον η πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 8$ .

- A) Να βρεθούν τα  $\alpha, \beta, \gamma$  αν γνωρίζουμε ότι  $\alpha = f(2), \beta = f'(1)$  και το  $\gamma = \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + 12]$ .
- B) Για  $\alpha=0$  και  $\beta=3$  και  $\gamma=4$  να βρείτε:
  - 1) Τη μέση τιμή του παραπάνω δείγματος των 10 παρατηρήσεων
  - 2) Τη διάμεσό του

## 12° ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 1

A. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

B. Αν  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$  ( $k \leq n$ ), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ .

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ ή Λ.

α. Ισχύει ότι  $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g'(x)$

β. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ισχύει ότι  $A - B = A \cap B'$

γ. Για τη συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu x$  ισχύει ότι  $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x$

δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ε. Η μέση τιμή ενός συνόλου  $n$  παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$  στο σημείο  $\Lambda(1, 1)$ .

β. Από τυχαίο σημείο  $M(x, y)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες  $x'$  και  $y'$  οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες  $Ox$ ,  $Oy$  ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου  $M$ , ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

## ΘΕΜΑ 3

Οι τιμές μιας μεταβλητής X και οι αντίστοιχες συχνότητες δίνονται στον παρακάτω ελλιπή πίνακα :

$x_i$	$v_i$
2	3
6	$v_2$
10	$v_3$
14	6
18	2
Σύνολο	20

1. Αν είναι γνωστό ότι  $\bar{x} = 9,8$  να υπολογίσετε τις συχνότητες  $v_2$  και  $v_3$ .
2. Να υπολογίσετε την διάμεσο  $\delta$ .
3. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.

## ΘΕΜΑ 4

Έστω A το ενδεχόμενο ο μαθητής να είναι άριστος στα Μαθηματικά και B το ενδεχόμενο να είναι άριστος στα Αρχαία, με  $P(A), P(B)$  οι αντίστοιχες πιθανότητες των παραπάνω ενδεχομένων.

Αν η πιθανότητα να είναι άριστος μόνο στα Μαθηματικά είναι  $\frac{3}{10}$  και οι πιθανότητες  $P(B), P(A \cap B)$ ,

βρίσκονται στο σύνολο  $y = \left\{ \frac{1}{2}, \alpha, \frac{4}{3} \right\}$ , όπου  $\alpha = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}$ .

1. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = \frac{2}{5}$ .
2. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου A.
3. Την πιθανότητα να είναι καλός μόνο σε ένα από τα 2 μαθήματα.
4. Την πιθανότητα να είναι καλός το πολύ σε ένα από τα 2 μαθήματα.
5. Να μην είναι καλός σε κανένα από τα παραπάνω μαθήματα.

## 13° ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 1

- A) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x) = c$  είναι  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- B) Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε στο γραπτό σας αν είναι Σωστή (Σ) ή λάθος (Λ).
- 1) Ισχύει ότι  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - 2) Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μόνο ποσοτικών μεταβλητών.
  - 3) Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  και  $x_0 \in A$ , είναι συνεχής στο  $x_0$  όταν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
  - 4) Δύο ενδεχόμενα  $A, B$  λέγονται ασυμβίβαστα όταν δεν περιέχουν κανένα κοινό στοιχείο.
  - 5) Ισχύει ο τύπος  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ .

## ΘΕΜΑ 2

Ένα αερόστατο αρχίζει να ανεβαίνει με αρχική ταχύτητα  $1,28 \text{ m/sec}$ . Λόγω βλάβης στην τροφοδοσία αρχίζει να χάνει αέρα, έτσι ώστε το ύψος του μετά από  $t$  min να δίνεται από την συνάρτηση  $g(t) = 6t - t^2 \text{ m}$ .

- α) Ποια είναι η μέση ταχύτητα του αερόστατου στο χρονικό διάστημα  $[3,5]$
- β) Ποια είναι η στιγμιαία ταχύτητα του αερόστατου την χρονική στιγμή  $t = 3 \text{ min}$ .
- γ) Ποια είναι η στιγμιαία ταχύτητα του αερόστατου την χρονική στιγμή  $t = 5 \text{ min}$ ;

Εκείνη την στιγμή το αερόστατο ανεβαίνει ή πέφτει;

Δ) Μετά από πόσο χρόνο το αερόστατο θα πέσει στο έδαφος;

## ΘΕΜΑ 3

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν  $n \in \mathbb{N}$  με  $n \geq 3$ , τότε η

πιθανότητα του ενδεχομένου να μαθαίνει ο μαθητής Γαλλικά είναι  $\frac{3n}{n^2 + 1}$ , να μαθαίνει Ισπανικά είναι

$\frac{n+2}{n^2 + 1}$  και να μαθαίνει και τις δύο γλώσσες είναι  $\frac{n+1}{n^2 + 1}$

1. Αν γνωρίζουμε ότι οι μαθητές του σχολείου μαθαίνουν υποχρεωτικά τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες να αποδείξετε ότι  $n = 3$
2. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μια από τις δύο γλώσσες
3. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες είναι 32 να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται δείγμα με συντελεστή μεταβλητότητας  $0,3$ , μέση τιμή  $10$  και τυπική απόκλιση  $S$  καθώς και η

συνάρτηση  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + Sx^2 - 8x + 1$ , όπου  $S$  η παραπάνω τυπική απόκλιση. Να βρείτε :

- α. την τυπική απόκλιση
- β. την μονοτονία της  $f$
- γ. τα ακρότατα της  $f$ .

14° ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

**ΘΕΜΑ 1**

- A. Να δείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου, ισχύει  $P(A')=1-P(A)$ .
- B. α. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_1 \in A$ ;  
 β. Αν  $t_1, t_2, \dots, t_v$  είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X σε δείγμα μεγέθους v, να ορίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ ή Λ.  
 α. Αν για την συνάρτηση f ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  τότε για κάθε φυσικό αριθμό n μεγαλύτερο του 1 θα ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = l^n$ .  
 β. Για τη συνάρτηση  $f(x)=e^x, x \in \mathbb{R}$ , ισχύει  $f'(x)=e^x$ .  
 γ. Η διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.  
 δ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων για ένα χαρακτηριστικό είναι κανονική ή περίπου κανονική με τυπική απόκλιση s και εύρος R, τότε ισχύει  $s \approx 6R$ .  
 ε. Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

- A) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης.  
 B) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.  
 Γ) Να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα.  
 Δ) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης στο σημείο  $x = 0$ .

**ΘΕΜΑ 3**

Εξετάσαμε ένα δείγμα 20 φοιτητών ως προς τη βαθμολογία τους στο μάθημα της Αστρονομίας και τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα

Βαθμολογία	Αριθμός φοιτητών	f_i%	N_i	x_i v_i	x_i^2	x_i^2 v_i
$x_i$	$v_i$					
2	6					
3	7					
5	3					
8	4					
ΣΥΝΟΛΟ			////////		////	

- A) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε  
 B) Να δειχθεί ότι η μέση βαθμολογία των φοιτητών είναι  $\bar{x} = 4$   
 Γ) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση s του δείγματος

(Δίνεται  $s^2 = \frac{1}{v} \cdot \left\{ \sum x_i^2 \cdot v_i - \frac{(\sum x_i \cdot v_i)^2}{v} \right\}$ )

**ΘΕΜΑ 4**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x-2}$ .

- Ποιο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f;
- Ποια η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων f(2), f(6), f(27), f(11), f(3).
- Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f(x), δηλαδή η f'(x).
- Να υπολογιστεί το  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3}$ .



## Τελευταίες συμβουλές

### 1<sup>η</sup> Συμβουλή

Μην πανηγυρίζετε την ώρα που δίνονται τα θέματα. Ενδεχόμενα να κρύβουν κάποιες παγίδες που με την πρώτη ματιά δεν φαίνονται.

### 2η Συμβουλή

Να είστε ψύχραιμοι κατά την διάρκεια των εξετάσεων για να αποδώσετε στο μέγιστο της προετοιμασίας σας.

### 3η Συμβουλή

Μην απογοητεύεστε αν τυχόν σας φαίνονται άγνωστα τα θέματα. Θα ακολουθήσουν 2 ώρες που μπορείτε να κάνετε τα πάντα. Σίγουρα είναι θέματα που κάπου, κάποτε τα έχετε διδαχθεί.

### 4η Συμβουλή

Μην συζητάτε με άλλους συνυποψήφιούς σας για τις λύσεις των θεμάτων μετά το τέλος της εξέτασης. Το μόνο που θα σας προσφέρει μια τέτοια κουβέντα είναι προβληματισμός. Αν θέλετε να συμβουλευτείτε κάποιον, μιλήστε με τον υπεύθυνο καθηγητή.

### 5η Συμβουλή

Μην επηρεάζεστε από ενδεχόμενη αποτυχία σε κάποιο μάθημα. Σκεφθείτε ότι είναι καλύτερα να έχετε αποτύχει σε ένα μάθημα παρά σε δύο ή περισσότερα.

.....και μετά ,



**Εύχομαι επιτυχία στους στόχους σας!!!!!!!!!!!!!!**