

ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

6^ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1^ο ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ

To

27^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

• ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

• ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

• ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

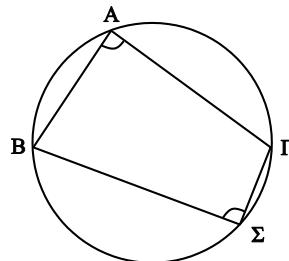
ΚΥΚΛΟΣ**Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»****Σωστό Λάθος**

1. Αν α είναι η απόσταση ευθείας ε από το κέντρο του κύκλου (O, ρ) τότε:
 - αν $\alpha > \rho$ η ε λέγεται εξωτερική του κύκλου
 - αν $\alpha = \rho$ η ε λέγεται τέμνουσα του κύκλου
 - αν $\alpha < \rho$ η ε λέγεται εφαπτομένη του κύκλου
2. Κάθε ευθεία κάθετη στο άκρο ακτίνας κύκλου είναι εφαπτομένη του.
3. Η διακεντρική ευθεία σημείου περνά από το κέντρο του κύκλου.
4. Τα εφαπτόμενα τμήματα προς κύκλο από σημείο εκτός αυτού μπορεί να είναι άνισα.
5. Για να συγκρίνουμε δύο τόξα πρέπει αναγκαστικά να ανήκουν στον ίδιο κύκλο.
6. Η κάθετη σε μια χορδή που περνά από το κέντρο του κύκλου περνά και από το μέσο της χορδής.
7. Σε δύο άνισες χορδές του ίδιου κύκλου αντιστοιχούν ομοίως άνισα αποστήματα.
8. Το σημείο επαφής δύο εφαπτομένων κύκλων ανήκει στη διάκεντρο τους.
9. Η διάκεντρος δύο κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.
10. Υπάρχει κύκλος που να περνά από ένα εσωτερικό και από ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου και να μην τέμνει αυτόν τον κύκλο.
11. Υπάρχει εγγεγραμμένη γωνία που δεν ισούται με το μισό μιας επίκεντρης.
12. Μια εγγεγραμμένη γωνία, που βαίνει σε τόξο διπλάσιο απ' το τόξο της αντίστοιχης επίκεντρης είναι ίση μ' αυτή.
13. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
14. Δυο εγγεγραμμένες γωνίες, που καθεμιά βαίνει στο τόξο που δέχεται την άλλη είναι ίσες.
15. Τα ύψη ενός οξυγωνίου τριγώνου διχοτομούν τις γωνίες του ορθικού του τριγώνου.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

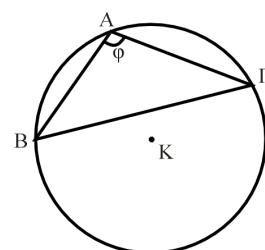
1. Δυο εγγεγραμμένες γωνίες, που καθεμιά βαίνει στο τόξο που δέχεται την άλλη, όπως οι γωνίες α και Σ είναι πάντοτε:

- A. ίσες B. συμπληρωματικές
 Γ. παραπληρωματικές Δ. αμβλείες
 Ε. κανένα από τα παραπάνω



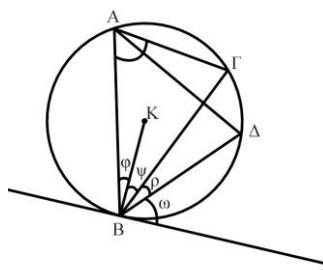
2. Στο διπλανό σχήμα η γωνία ϕ είναι:

- A. οξεία B. αμβλεία
 Γ. ορθή Δ. $\phi = B + \Gamma$
 Ε. $\phi = B\Gamma$



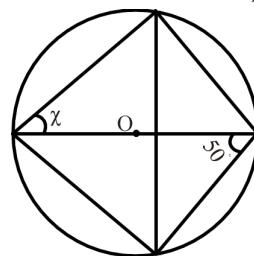
3. Στο διπλανό σχήμα το K είναι κέντρο του κύκλου και η Bx εφαπτομένη του. Η γωνία α ισούται με:

- A. ω B. ρ Γ. ψ
 Δ. ϕ Ε. $\omega + \rho$



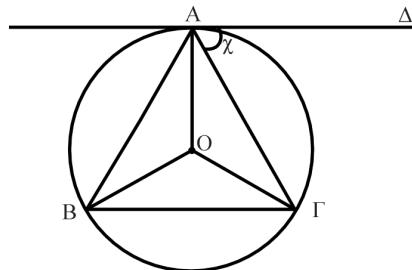
4. Στο διπλανό σχήμα O είναι το κέντρο του κύκλου και οι διαγώνιες του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα. Η γωνία x ισούται με:

- A. 10° B. 20° Γ. 30°
 Δ. 40° Ε. 50°



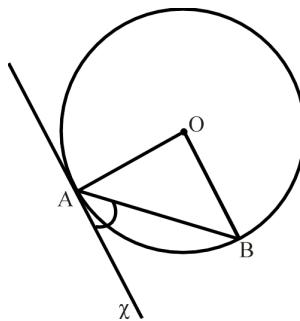
5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABG είναι ισόπλευρο, O είναι το κέντρο του κύκλου και η AD εφαπτομένη του κύκλου. Η γωνία χ ισούται με:

- A. 20° B. 30° Γ. 45°
 Δ. 60° Ε. 80°



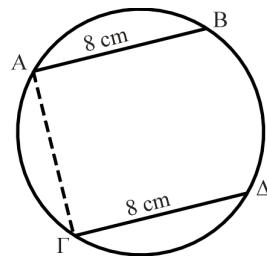
6. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και η εφαπτομένη Ax παράλληλη στην OB . Η γωνία $\angle \text{AB}$ ισούται με:

A. 20° B. 30° C. 45°
 D. 60° E. 80°



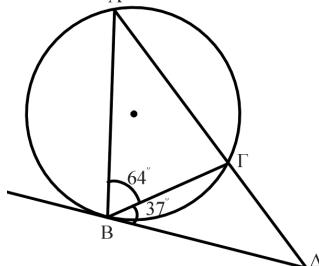
7. Στο διπλανό σχήμα είναι $\text{AB} = \text{ΓΔ} = 8 \text{ cm}$, $\text{AB} \parallel \text{ΓΔ}$ και η ακτίνα του κύκλου είναι 5 cm . Η απόσταση AG των AB και ΓΔ είναι:

A. 3 B. 4 C. 6
 D. 8 E. 10



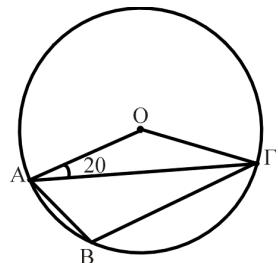
8. Στο διπλανό σχήμα $\angle \text{ABΓ} = 64^\circ$ και $\angle \text{ΓΒΔ} = 37^\circ$ και ΒΔ εφαπτομένη του κύκλου. Η γωνία $\angle \text{BΓΔ}$ ισούται με:

A. 143° B. 37° C. 79°
 D. 101° E. 64°



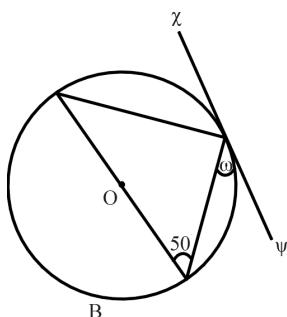
9. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και $\angle \text{OAG} = 20^\circ$. Η γωνία $\angle \text{ABΓ}$ ισούται με:

A. 70° B. 80° C. 100°
 D. 110° E. 140°



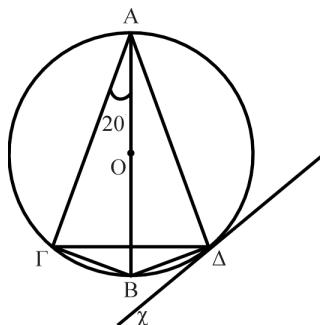
10. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και xy εφαπτομένη του. Η γωνία ω ισούται με:

A. 30° B. 40° C. 45°
 D. 50° E. 60°



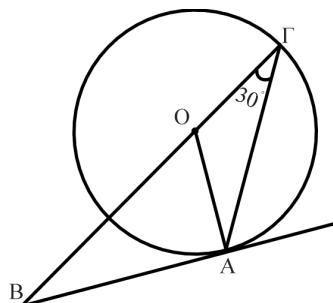
11. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και Δx εφαπτομένη του. Αν είναι $BA\Gamma = 20^\circ$ και AB κάθετη στη $\Gamma\Delta$. Οι εμφανιζόμενες (σε αριθμό) στο σχήμα γωνίες που είναι ίσες με 20° είναι:

- A. 4 B. 5 C. 6
D. 7 E. 8



12. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου, BA εφαπτομένη του και $\Gamma = 30^\circ$.

- α) Η γωνία B ισούται με:
A. 15° B. 30° C. 45°
D. 60° E. 75°
- β) Το ευθύγραμμό τμήμα BO ισούται με:
A. AB B. AO C. AG
D. $2AB$ E. $2AO$



Ερώτηση συμπλήρωσης

1. Να συμπληρωθούν οι στήλες (B) και (Γ) για κάθε περίπτωση της στήλης (A).

στήλη (Α)	στήλη (Β) Αριθμός κοινών εξωτερικών εφαπτομένων	στήλη (Γ) Αριθμός κοινών εσωτερικών εφαπτομένων
<ul style="list-style-type: none"> Ο ένας κύκλος βρίσκεται εκτός του άλλου. Οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. Οι δύο κύκλοι τέμνονται. Οι δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. 		

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. Αν α είναι η απόσταση του κέντρου Ο ενός κύκλου (O, ρ) από μια ευθεία ϵ , τότε να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε σχέση της πρώτης στήλης με το αντίστοιχο συμπέρασμα της δεύτερης στήλης.

στήλη (A)	στήλη (B)
$\alpha > \rho$	<ul style="list-style-type: none"> Η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.
$\alpha < \rho$	<ul style="list-style-type: none"> Η ευθεία και ο κύκλος έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.
$\alpha = \rho$	<ul style="list-style-type: none"> Η ευθεία και ο κύκλος έχουν άπειρα κοινά σημεία. Η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία. Η ευθεία και ο κύκλος έχουν τουλάχιστον δύο κοινά σημεία.

2. Αν (K, R) και (Λ, ρ) είναι δύο κύκλοι που έχουν διαφορετικά κέντρα και $R > \rho$, $K\Lambda = \delta$ συνδέστε με μια γραμμή κάθε σχέση της πρώτης στήλης με το αντίστοιχο συμπέρασμα της δεύτερης.

στήλη (A)	στήλη (B)
$\delta = R + \rho$	<ul style="list-style-type: none"> Καθένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλουν.
$\delta > R + \rho$	<ul style="list-style-type: none"> Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
$\delta = R - \rho$	<ul style="list-style-type: none"> Οι κύκλοι τέμνονται. Ο κύκλος (Λ, ρ) είναι εσωτερικός του (K, R) χωρίς να έχουν κοινά σημεία.

3. Να αντιστοιχίσετε τις φράσεις της στήλης Α με τις φράσεις της στήλης Β ώστε να δημιουργηθούν σωστές προτάσεις:

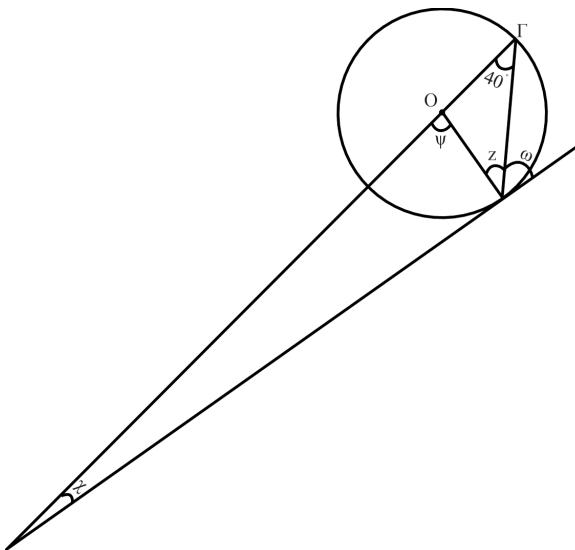
στήλη (Α)	στήλη (Β)
• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα ενός τμήματος AB είναι:	διάμετρος του κύκλου (O, a)
• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ε_1 και ε_2 είναι:	ο κύκλος (O, a)
• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν ίση απόσταση α από ένα σημείο O είναι:	η διχοτόμος της γωνίας
• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας είναι:	η μεσοκάθετη
	η μεσοπαράλληλη
	το τόξο κύκλου

4. Να αντιστοιχίσετε τις φράσεις της στήλης Α με τις φράσεις της στήλης Β:

στήλη (Α)	στήλη (Β)
<ul style="list-style-type: none"> Δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα Ευθεία εφάπτεται σε κύκλο Δυο γωνίες είναι ίσες Μια γωνία είναι ορθή 	<ul style="list-style-type: none"> Δυο γωνίες είναι εγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο και βαίνουν σε ίσα τόξα Δυο ευθύγραμμα τμήματα είναι αποστήματα δυο ίσων χορδών του ίδιου κύκλου Ευθεία κάθετη στο άκρο μιας ακτίνας κύκλου Μια γωνία είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο Χορδές του ίδιου κύκλου Η απόσταση της ευθείας από το κέντρο του κύκλου είναι μικρότερη από την ακτίνα του κύκλου

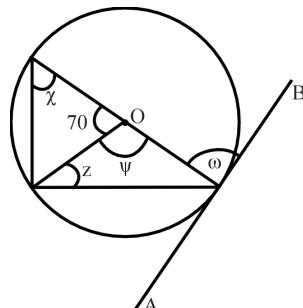
Ερωτήσεις διάταξης

1. Στο παρακάτω σχήμα, Ο είναι το κέντρο του κύκλου.

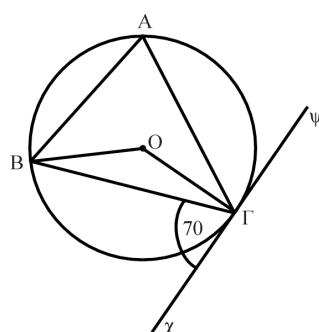


Να γράψετε σε μια σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες: x, y, z, ω .

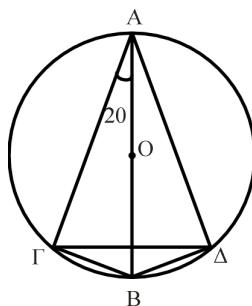
2. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και ΑΒ εφαπτομένη του. Να γράψετε σε μια σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες: x, y, z, ω .



3. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου, xy εφαπτομένη και $BΓx = 70^\circ$. Να γράψετε σε μια σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες: $ΒΟΓ, ΟΒΓ, ΒΑΓ, ΟΓy$.



4. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και $AΓ = AΔ$. Να γράψετε σε μια σειρά απ' τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες: $ΒΓΔ, ΓΒΔ, ΒΔΟ, ΟΔΓ, ΓΑΔ, ΑΓΒ$.

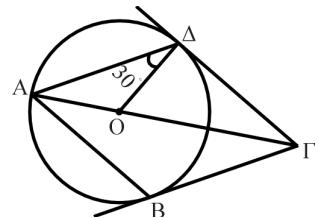


Ερωτήσεις συνδυασμού διαφόρων τύπων

Ερώτηση συμπλήρωσης κενού και διάταξης

1. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, το Ο είναι το κέντρο του κύκλου και $\angle ADO = 30^\circ$:

- α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας με τα μέτρα των αντίστοιχων γωνιών.



Γωνία	ΟΑΔ	ΟΓΒ	ΓΟΔ	ΟΔΓ	ΑΔΓ
μέτρο γωνίας					

- β) Να γράψετε σε μια σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες: ΒΑΔ, ΑΔΟ, ΑΔΓ, ΟΔΓ.

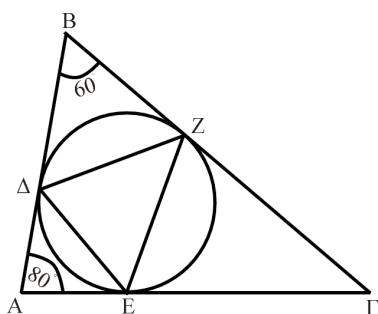
Ερώτηση πολλαπλής επιλογής και αντιστοίχισης

2. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο ABG και $B = 60^\circ$, $A = 80^\circ$.

α) Η γωνία ΔEZ ισούται με:

- A. 40° B. 50° C. 60°
D. 70° E. 80°

- β) Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης μ' ένα μόνο στοιχείο της δευτερης στήλης.

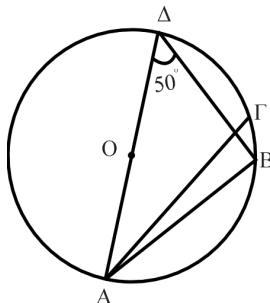


στήλη (Α) γωνία	στήλη (Β) μέτρο γωνίας σε μοίρες
ΔZE	40°
ΔGB	50°
$\Delta BZ\Delta$	60°
	70°
	80°

Ερώτηση αντιστοίχισης και διάταξης

3. Στο διπλανό σχήμα η AD είναι διάμετρος, $\angle ADB = 50^\circ$ και $\angle DAG = 3\angle GAB$.

- α) Να αντιστοιχίσετε κάθε κυρτογώνιο τόξο της στήλης A στο αντίστοιχο μέτρο που βρίσκεται στη στήλη B .



στήλη (Α) τόξο	στήλη (Β) μέτρο τόξου
AB	20°
BG	40°
$\Gamma\Delta$	50°
$B\Delta$	60°
	80°
	100°

- β) Να γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα παρακάτω ευθύγραμμα τμήματα: AB , AG , AD , $B\Delta$, $\Gamma\Delta$.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

- Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο του κοινού εξωτερικού εφαπτόμενου τμήματος δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά είναι ίσο με το γινόμενο των διαμέτρων των δύο κύκλων.
- Στο εσωτερικό κύκλου (O, R) παίρνουμε ένα σημείο M . Αν AB και $\Gamma\Delta$ είναι δύο μεταβλητές κάθετες χορδές που περνούν από το σημείο M , να αποδείξετε ότι: $AB^2 + \Gamma\Delta^2 = 8R^2 - 4MO^2$.
- Δίνεται κύκλος (K, R) στον οποίο η διάμετρος του AB είναι παράλληλη προς τη χορδή $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι: $AB^2 = BG^2 + B\Delta^2$.

4. Ένα τρίγωνο ABC είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Αν είναι $B = 90^\circ + \Gamma$, να αποδείξετε ότι: $AB^2 + AG^2 = 4R^2$.
5. Δίνεται κύκλος με κέντρο O . Γράφουμε μια διάμετρο AB και μια χορδή AG . Αν οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία B και G κόβονται στο σημείο Σ , να αποδείξετε ότι:
 α) $BOG = 2BGS$
 β) $OS // AG$
6. Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα K και Λ . Από το μέσο M της KL φέρνουμε μια ευθεία η οποία τέμνει τον ένα κύκλο στα σημεία A, B και τον άλλο στα G και Δ . Αποδείξτε ότι: $AB = \Gamma\Delta$.
7. Δίνεται κύκλος (O, R) και σε σημείο του M γράφουμε την εφαπτόμενη του. Αν δύο άλλες παράλληλες εφαπτόμενες τέμνουν την προηγούμενη εφαπτομένη στα σημεία A, B :
 α) Αποδείξτε ότι: $AOB = 90^\circ$.
 β) Να βρεθεί η θέση του M ώστε να ισχύει $OM = \frac{AB}{2}$.

Θέματα συνδυασμού ερωτήσεων ανάπτυξης και πολλαπλής επιλογής

1. Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται στα σημεία A, B . Μια ευθεία παράλληλη της KL που διέρχεται από το A τέμνει τους κύκλους στα σημεία G και Δ αντίστοιχα.
 α) Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή:
 A. $K\Lambda = R + \rho$ B. $K\Lambda = R - \rho$ Γ. $K\Lambda < R - \rho$
 Δ. $K\Lambda < R + \rho$ Ε. $K\Lambda > R + \rho$
 β) Αποδείξτε ότι: $\Gamma\Delta = 2K\Lambda$.
2. Θεωρούμε κύκλο (O, R) , διάμετρο AB και την ακτίνα $OG \perp AB$. Έστω M το μέσο της ακτίνας OB και Δ το σημείο που η GM τέμνει τον κύκλο. Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει την ευθεία OB στο σημείο E ,
 α) Η γωνία $\Gamma\Delta E$ είναι ίση με την:
 A. $\Gamma O\Delta$ B. $\Gamma M B$ Γ. $\frac{\Gamma O\Delta}{2}$ Δ. $\frac{O\Delta E}{2}$ Ε. $\Gamma O M$
 β) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο $EM\Delta$ είναι ισοσκελές.
3. Δύο κύκλοι $(K, 3\rho), (\Lambda, \rho)$ εφάπτονται εξωτερικά. Αν $A A'$ είναι κοινό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων:
 α) Αποδείξτε ότι οι κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες σχηματίζουν γωνία 60° .
 β) Η γωνία που σχηματίζουν η $K\Lambda$ και η ακτίνα KA , όπου A σημείο του κύκλου $(K, 3\rho)$ είναι:
 A. 30° B. 45° Γ. 60° Δ. 90° Ε. 100°
 γ) Να υπολογίσετε το AA' συναρτήσει του ρ .

Εγγράψιμα και περιγράψιμα τετράπλευρα**Ερωτήσεις τύπου «Σωστό - Λάθος»****Σωστό Λάθος**

1. Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν είναι παραλληλόγραμμο.
2. Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν είναι ορθογώνιο.
3. Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν είναι ορθογώνιο.
4. Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν είναι ρόμβος.
5. Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν είναι τραπέζιο.
6. Αν η διάμεσος ενός τραπεζίου το χωρίζει σε δύο εγγράψιμα τραπέζια τότε το αρχικό τραπέζιο είναι εγγράψιμο.
7. Υπάρχουν τετράπλευρα που είναι συγχρόνως εγγράψιμα και περιγράψιμα σε κύκλο.
8. Κάθε παραλληλόγραμμο που είναι εγγράψιμο σε κύκλο είναι τετράγωνο.
9. Κάθε παραλληλόγραμμο που είναι περιγράψιμο σε κύκλο είναι τετράγωνο.
10. Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο τότε οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται απ' το ίδιο σημείο.
11. Αν ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο τότε οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα.
12. Αν ένα τραπέζιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο τότε η διάμεσός του τριχοτομείται από τις διαγώνιές του.
13. Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο τότε οι διαγώνιές του διέρχονται από το κέντρο του κύκλου.

Ερώτηση συμπλήρωσης

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, θέτοντας κατάλληλα σε κάθε τετραγωνάκι των στηλών (B) και (Γ) μια απ' τις λέξεις: πάντα, όχι πάντα, ποτέ.

στήλη (Α) τετράπλευρο	στήλη (Β) το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο	στήλη (Γ) το τετράπλευρο είναι περιγράψιμο
παραλληλόγραμμο		
ορθογώνιο		
τετράγωνο		
ρόμβος		
ισοσκελές τραπέζιο		

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγράψιμο σε κύκλο και έχει διάμεσο ίση με a . Η περίμετρός του ισούται με:

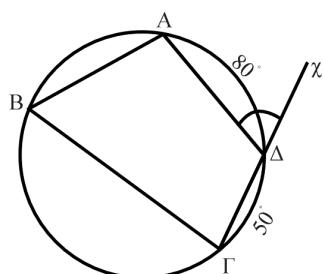
A. $3a$ B. $4a$ C. $5a$ D. $6a$ E. $7a$

2. Κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι σε κύκλο:

A. εγγράψιμο και όχι περιγράψιμο
 B. περιγράψιμο και όχι εγγράψιμο
 C. ούτε εγγράψιμο, ούτε περιγράψιμο
 D. εγγράψιμο και συγχρόνως περιγράψιμο
 E. τίποτα από τα παραπάνω

3. Στο διπλανό σχήμα είναι τόξο $\text{ΑΔ} = 80^\circ$ και τόξο $\text{ΓΔ} = 50^\circ$. Η γωνία ΑΔχ ισούται με:

A. 80° B. 90° C. 105°
 D. 115° E. 130°

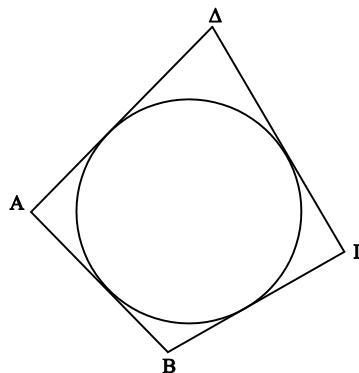


4. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο και η Α γωνία του είναι τετραπλάσια της Γ. Η γωνία Α ισούται με:

A. 36° B. 45° C. 72° D. 90° E. 144°

5. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι 25 cm και $A\Delta = 8$ cm. Το μήκος της $B\Gamma$ σε cm είναι:

- A. $\frac{17}{2}$ B. 6 C. 5,5
 D. 5 E. 4,5



6. Ένα οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ABG είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία B και G κόβονται στο Δ . Είναι $ABG = BGA = 2\Delta$ και χ το μέτρο της A σε ακτίνια. Ή χ ισούται με:

- A. $\frac{3}{7}\pi$ B. $\frac{4}{9}\pi$ C. $\frac{5}{11}\pi$ D. $\frac{6}{13}\pi$ E. $\frac{7}{15}\pi$

(Δόθηκε σε διαγωνισμό EME - Θαλής 1992)

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζεται με κορυφές τα σημεία τομής των διχοτόμων ενός τετραπλεύρου είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
2. Να αποδείξετε ότι:
 - α) Τέσσερις εφαπτόμενες ευθείες ενός κύκλου, παράλληλες ανά δύο, σχηματίζουν ένα ρόμβο περιγεγραμμένο στον κύκλο.
 - β) Το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο είναι ορθογώνιο.
3. Από το μέσο Γ ενός τόξου AB κύκλου με κέντρο O γράφουμε δύο χορδές $\Gamma\Delta$ και ΓE που τέμνουν τη χορδή AB στα σημεία Z και H . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EHZ\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
4. Από σημείο P του ύψους $A\Delta$ οξυγωνίου ABG φέρνουμε $PE \perp AB$ και $PZ \perp AG$.
 - α) Να αντιστοιχήσετε κάθε γωνία της στήλης (A) με την ίση γωνία της στήλης (B).

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
AZE	AΓΔ
APZ	ΑΡΕ
PEZ	EΑΡ
	ΑΕΖ
	PAΖ

- β) Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο $BEZ\Gamma$ είναι εγγράψιμο.

γ) Τα εγγράψιμα τετράπλευρα του σχήματος σε αριθμό είναι:

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

5. Η διχοτόμος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
 - α) $AB \cdot AG = AD \cdot AE$
 - β) $EB^2 = EA \cdot ED$
6. Στα άκρα της χορδής ΑΒ ενός κύκλου φέρνουμε τις κάθετες χορδές του κύκλου. Να αποδείξετε ότι οι χορδές αυτές είναι απέναντι πλευρές ενός ορθογωνίου, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.
7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) περιγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Αν Ε, Δ, Θ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ με τον κύκλο και η διακεντρική ευθεία από το Α κόβει τον κύκλο στα σημεία Ζ και Δ, να δείξετε ότι η γωνία ΑΒΓ ισούται με τη γωνία ΑΟΘ.
8. Δίνεται πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ που έχει $AB = BG = GD = DE$ και $B = G = D$. Να αποδείξετε ότι το πεντάγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
9. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα να αποδειχθεί ότι:
 - α) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι περί τα τρίγωνα ΑΖΕ, ΒΔΖ και ΓΕΔ είναι ίσοι.
 - β) Οι τρεις παραπάνω κύκλοι του ερωτήματος (α) διέρχονται από το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.
10. Δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Ο' τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το Α γράφουμε τυχαία ευθεία που κόβει τον κύκλο Ο στο Γ και τον Ο' στο Δ. Από το Β γράφουμε άλλη τυχαία ευθεία που κόβει τον κύκλο Ο στο Ε και τον Ο' στο Ζ. Να αποδείξετε ότι $EΓ // ZΔ$.
11. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει $A = 90^\circ$ και $B = 30^\circ$, το AH ύψος και την AM διάμεσο. Από το σημείο Β φέρνουμε τη BE κάθετη στην προέκταση της AM . Να αποδειχθεί ότι:
 - α) Το τετράπλευρο $ABEH$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
 - β) $BE = EH = AH$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Με τη χρήση αβαθμολόγητου χάρακα και διαβήτη

1. Αν α, β, γ είναι δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα, να κατασκευασθεί το ευθύγραμμο τμήμα x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 - α) $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
 - β) $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$
 - γ) $x = \sqrt{\alpha\beta}$

$$\delta) \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$$

2. Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) και τόξο AB του (O, ρ) . Να κατασκευασθεί τόξο MN του (K, ρ) ώστε να είναι $MN = \frac{1}{2} AB$.
3. Να χωριστεί μια γωνία σε τέσσερις ίσες γωνίες.
4. Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα κ , λ και η γωνία ω . Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$ με δοσμένα: $AB = \kappa$, $A\Gamma = \lambda$ και $A = \omega$.
5. Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$ αν γνωρίζουμε:
- α) Την πλευρά α , τη γωνία B και τη διάμεσο μ_γ .
 - β) Τις πλευρές β , γ και το ύψος v_α .
 - γ) Τις πλευρές α , γ και τη διάμεσο μ_α .
- Να γίνει διερεύνηση.
6. Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ που θα έχει υποτείνουσα $B\Gamma = \kappa$ και ύψος $A\Delta = \lambda$, όπου κ και λ δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα. Να γίνει διερεύνηση.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Ερωτήσεις σύντομης απάντησης

Μπορούν να θεωρηθούν όλες όσες περιλαμβάνονται στο Σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας, έκδοσης 1998, στις σελίδες 103, 150, 151.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Γράφουμε δύο χορδές κύκλου, τις AB και GD που τέμνονται στο E . Οι εφαπτόμενες ευθείες του κύκλου στα σημεία A και G τέμνονται στο Z και οι εφαπτόμενες στα B και D τέμνονται στο H .
 - Να αποδείξετε ότι: $AZG + BHΔ = 2AEΔ$.
 - Να υπολογίσετε τη γωνία GEB , όταν είναι εγγράψιμο το τετράπλευρο, που έχει κορυφές τα σημεία Z, H, G , το σημείο τομής των εφαπτομένων ZG και HB και το σημείο τομής των ZA και HD .

2. Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι $AB = AG$. Αν η κάθετη ευθεία από το σημείο B προς την AD τέμνει τη $ΓΔ$ στο σημείο E , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΔBE$ είναι ισοσκελές.

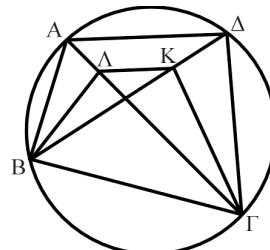
3. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $AB < AG$. Φέρνουμε το ύψος του AD και από την κορυφή B ευθεία κάθετη στη διχοτόμη Ax της A που τέμνει την Ax στο E και την AG στο Z . Αν M είναι το μέσο της BG και H η προβολή του $Γ$ στην Ax να αποδείξετε ότι:
 - Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.
 - $EM // AG$.
 - Το τετράπλευρο $AΔΗΓ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
 - Το τετράπλευρο $ΔEMH$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

4. Σε εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABΓΔ$ η διχοτόμης της γωνίας $ΔΓA$ τέμνει τη διαγώνιο $BΔ$ στο K , ενώ η διχοτόμης της γωνίας $ABΔ$ τέμνει τη διαγώνιο AG στο L . Να αποδείξετε ότι:
 - Το τετράπλευρο $KΛΒΓ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
 - Οι KL και AD είναι παράλληλες.
(Δόθηκε σε διαγωνισμό EME - Απρίλιος 1997).

5. Σ' ένα κύκλο είναι εγγεγραμμένο ένα πεντάγωνο $ABΓΔE$, τέτοιο ώστε η AB να είναι παράλληλη προς τη $ΔE$ και η AE προς τη $BΓ$. Δείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο A είναι παράλληλη προς τη $ΓΔ$.
(Δόθηκε σε διαγωνισμό EME - Θαλής 1996).

6. Δίνονται δύο ορθογώνια τρίγωνα που είναι όμοια. Αποδείξτε ότι το γινόμενο των υποτεινουσών είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομολόγων κάθετων πλευρών τους.

7. Δίνεται κύκλος (O, R) . Γράφουμε μια διάμετρο του EZ και πάρνουμε δύο σημεία A, B πάνω σ'



Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών.
<http://blogs.sch.gr/iraidos/>

E-mails:
raidosi@yahoo.gr
iraidos@gmail.com

αυτή συμμετρικά ως προς το κέντρο O, έτσι ώστε $AB = R\sqrt{2}$. Αν $\Gamma\Delta$ είναι χορδή του κύκλου που περνά από το B και είναι κάθετη στην EZ, να αποδείξετε ότι: $A\Gamma^2 + A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = 7R^2$.

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με $B = 2\Gamma$. Να αποδείξετε ότι: $\frac{A\Gamma^2}{AB^2} = 3$.
9. Δίνονται τρεις κύκλοι ώστε να είναι εγγεγραμμένοι στην ίδια γωνία και ο μεσαίος να εφάπτεται των δύο άλλων. Αποδείξτε ότι η ακτίνα του μεσαίου κύκλου είναι μέση ανάλογη των ακτίνων των δύο άλλων.
ή αλλιώς:
Τρεις κύκλοι (O, r_1), (K, r_2), (Λ, r_3) εφάπτονται εξωτερικά ανά δυο και τα κέντρα τους βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Αν είναι $r_1 < r_2 < r_3$ να αποδείξετε ότι: $r_2^2 = r_1r_3$.
10. Δίνεται κύκλος (O, r), μια διάμετρος $ΒΓ$ αυτού και μια χορδή του $ΑΔ$ παράλληλη στη $ΒΓ$. Αν η απόσταση των $ΒΓ$ και $ΑΔ$ είναι $\frac{R}{2}$, να υπολογισθούν συναρτήσει του R οι πλευρές του τριγώνου $ΑΒΓ$.
11. Δίνεται η εφαπτομένη ε σ' ένα σημείο A ενός κύκλου. Αν μια ευθεία ε' τέμνει τον κύκλο στα σημεία B, G και την ευθεία ε στο σημείο M , να αποδείξετε ότι: $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{MB}{MG}$.
12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($A = 90^\circ$). Με διάμετρο την $ΑΓ$ γράφουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα $ΒΓ$ στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία του κύκλου στο σημείο Δ διέρχεται από το μέσον της $ΑΒ$.
13. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ($A = 90^\circ$) εγγράφουμε ένα τετράγωνο, ώστε η μια πλευρά του τετραγώνου να βρίσκεται πάνω στην υποτείνουσα $ΒΓ$. Αν O είναι το κέντρο του τετραγώνου, να αποδείξετε ότι η AO διχοτομεί την ορθή γωνία A .
14. Σε κύκλο κέντρου O γράφουμε την επίκεντρη γωνία AOB , φέρνουμε τη διχοτόμο OG αυτής και στην OG χορδή κάθετη που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Z και H . Αν η ZH τέμνει την OA στο Δ και την OB στο E , να δείξετε ότι:
 - $Z\Delta = EH$ και
 - $AD = BE$
15. Από σημείο G εκτός κύκλου κέντρου O γράφουμε τα εφαπτόμενα τμήματα GA και GB . Φέρνουμε τη διάμετρο AD και στην προέκταση του AG προς το μέρος του σημείου G παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $GE = AG$. Να αποδείξετε ότι:
 - Η γωνία ABE είναι ορθή.
 - Τα σημεία Δ, B, E είναι συνευθειακά.
16. Ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους λ κινείται, έτσι ώστε τα άκρα του να βρίσκονται σε δύο κάθετους άξονες Ox, Oy . Σχηματίζουμε το ορθογώνιο $BOAG$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής G .

17. Δίνεται μια ευθεία xy και ένα σημείο A αυτής. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται της xy στο σημείο A .

18. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι είναι ίσοι και εφάπτονται σε δοσμένο κύκλο.

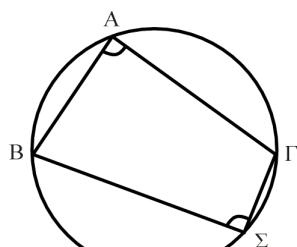
19. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι διέρχονται από σταθερό σημείο A και έχουν δοσμένη ακτίνα.

20. Δίνεται κύκλος κέντρου O , ο οποίος εφάπτεται μιας δοσμένης ευθείας xy σ' ένα σημείο A . Δίνεται ακόμα ένα άλλο σημείο B της xy . Να γραφεί κύκλος, ο οποίος να εφάπτεται στην ευθεία xy στο σημείο B και στον κύκλο κέντρου O .

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

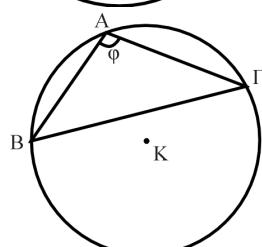
1. Δυο εγγεγραμμένες γωνίες, που καθεμιά βαίνει στο τόξο που δέχεται την άλλη, όπως οι γωνίες A και Σ είναι πάντοτε:

- A.** ίσες **B.** συμπληρωματικές
Γ. παραπληρωματικές **Δ.** αμβλείες
E. κανένα από τα παραπάνω



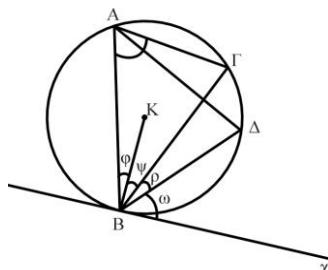
2. Στο διπλανό σχήμα η γωνία ϕ είναι:

- A.** οξεία **B.** αμβλεία
Γ. ορθή **D.** $\phi = B + \Gamma$
E. $\phi = BK\Gamma$



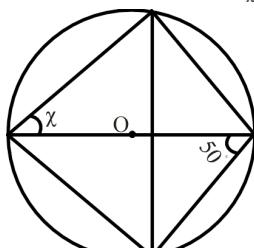
3. Στο διπλανό σχήμα το K είναι κέντρο του κύκλου και η Bx εφαπτομένη του. Η γωνία A ισούται με:

- A.** ω **B.** ρ **C.** ψ
Δ. ϕ **E.** $\omega + \rho$



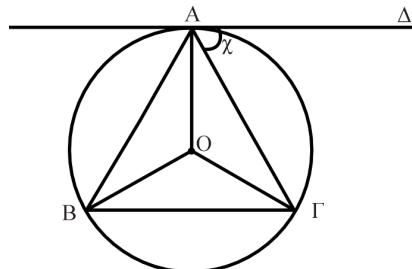
4. Στο διπλανό σχήμα O είναι το κέντρο του κύκλου και οι διαγώνιες του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα. Η γωνία x ισούται με:

- A.** 10° **B.** 20° **C.** 30°
Δ. 40° **E.** 50°



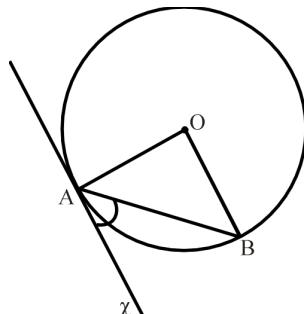
5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισόπλευρο, Ο είναι το κέντρο του κύκλου και η $ΑΔ$ εφαπτομένη του κύκλου. Η γωνία $χ$ ισούται με:

A. 20° B. 30° C. 45°
 Δ. 60° E. 80°



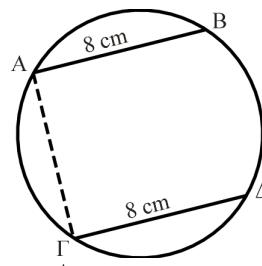
6. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και η εφαπτομένη Ax παράλληλη στην OB . Η γωνία xAB ισούται με:

A. 20° B. 30° C. 45°
 Δ. 60° E. 80°



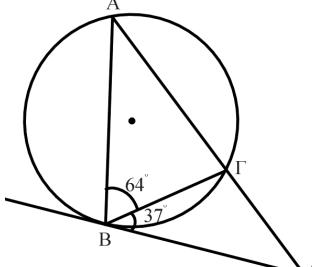
7. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = ΓΔ = 8 \text{ cm}$, $AB // ΓΔ$ και η ακτίνα του κύκλου είναι 5 cm . Η απόσταση $ΑΓ$ των AB και $ΓΔ$ είναι:

A. 3 B. 4 C. 6
 Δ. 8 E. 10



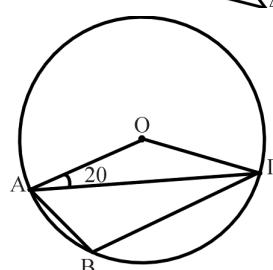
8. Στο διπλανό σχήμα $ABΓ = 64^\circ$ και $ΓΒΔ = 37^\circ$ και $BΔ$ εφαπτομένη του κύκλου. Η γωνία $BΓΔ$ ισούται με:

A. 143° B. 37° C. 79°
 Δ. 101° E. 64°



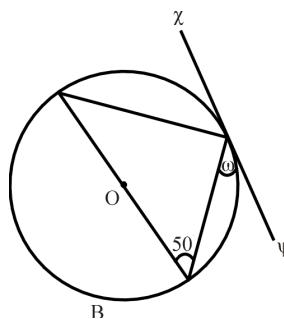
9. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και $OΑΓ = 20^\circ$. Η γωνία $ABΓ$ ισούται με:

A. 70° B. 80° C. 100°
 Δ. 110° E. 140°



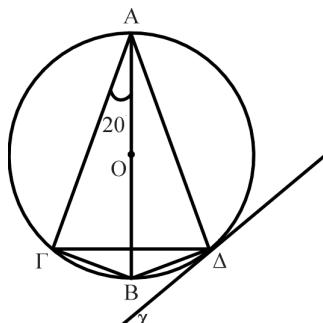
10. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και χυ εφαπτομένη του. Η γωνία ω ισούται με:

- A. 30° B. 40° C. 45°
 D. 50° E. 60°



11. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και Δχ εφαπτομένη του. Αν είναι $BA\Gamma = 20^\circ$ και AB κάθετη στη $\Gamma\Delta$. Οι εμφανιζόμενες (σε αριθμό) στο σχήμα γωνίες που είναι ίσες με 20° είναι:

- A. 4 B. 5 C. 6
 D. 7 E. 8



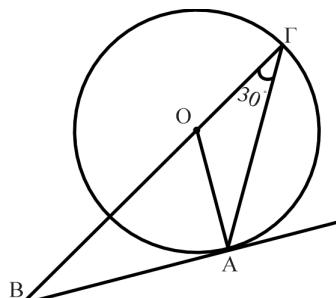
12. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου, BA εφαπτομένη του και $\Gamma = 30^\circ$.

α) Η γωνία B ισούται με:

- A. 15° B. 30° C. 45°
 D. 60° E. 75°

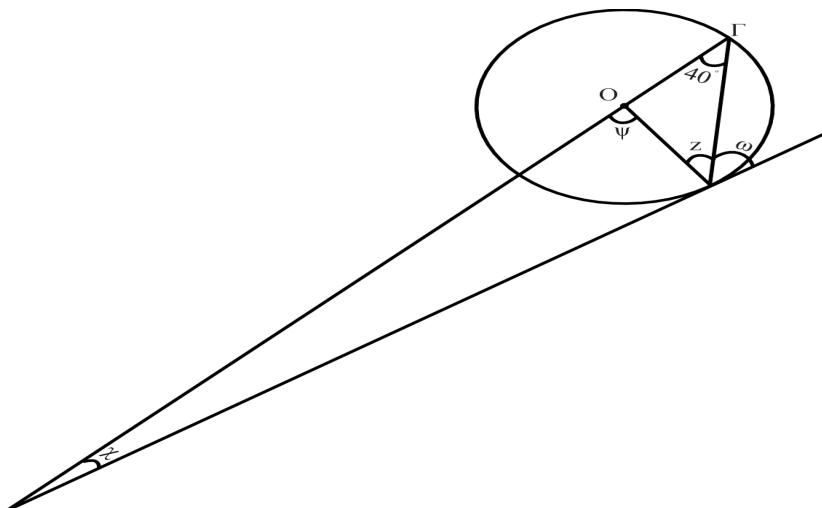
β) Το ευθύγραμμο τμήμα BO ισούται με:

- A. AB B. AO C. AG
 D. 2AB E. 2AO



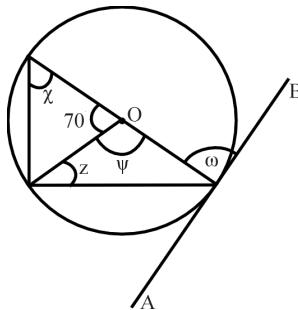
Ερωτήσεις διάταξης

1. Στο παρακάτω σχήμα, Ο είναι το κέντρο του κύκλου.

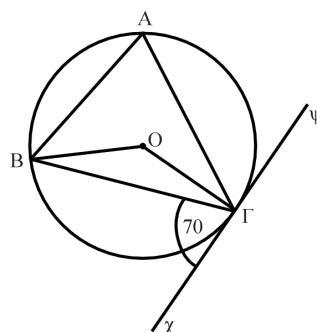


Να γράψετε σε μια σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες: x, y, z, ω.

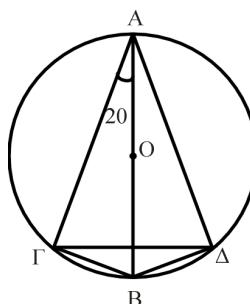
2. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και AB εφαπτομένη του. Να γράψετε σε μια σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες: x, y, z, ω .



3. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου, xy εφαπτομένη και $B\Gamma x = 70^\circ$. Να γράψετε σε μια σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες: $BO\Gamma, OB\Gamma, BA\Gamma, OGy$.



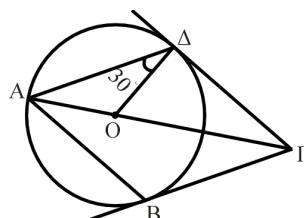
4. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και $AG = AD$. Να γράψετε σε μια σειρά απ' τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες: $B\Gamma\Delta, GB\Delta, B\Delta O, O\Delta\Gamma, \Gamma\Delta A, A\Gamma B$.



Ερωτήσεις συνδυασμού διαφόρων τύπων

Ερώτηση συμπλήρωσης κενού και διάταξης

1. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, το Ο είναι το κέντρο του κύκλου και $\angle ADO = 30^\circ$:



- α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας με τα μέτρα των αντίστοιχων γωνιών.

Γωνία	$\angle OAD$	$\angle OGB$	$\angle GO\Delta$	$\angle O\Delta\Gamma$	$\angle A\Delta\Gamma$
μέτρο γωνίας					

- β) Να γράψετε σε μια σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες: $BA\Delta, A\Delta O, A\Delta\Gamma, O\Delta\Gamma$.

Ερώτηση πολλαπλής επιλογής και αντιστοίχισης

2. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος είναι

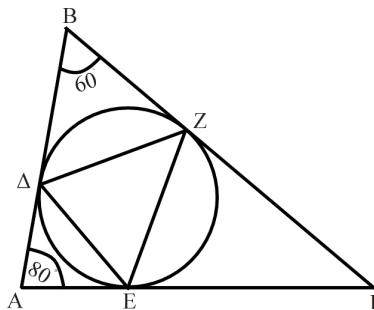
εγγεγραμμένος στο τρίγωνο ABG και $B = 60^\circ$, $A = 80^\circ$.

α) Η γωνία ΔEZ ισούται με:

A. 40° **B.** 50° **Γ.** 60°

Δ. 70° **Ε.** 80°

β) Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης μ' ένα μόνο στοιχείο της δεύτερης στήλης.

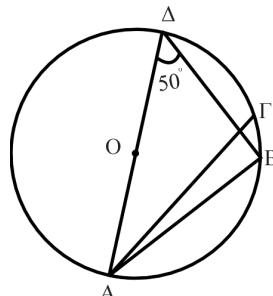


στήλη (Α) γωνία	στήλη (Β) μέτρο γωνίας σε μοίρες
ΔZE	40°
ΔGB	50°
$\Delta BZ\Delta$	60°
	70°
	80°

Ερώτηση αντιστοίχισης και διάταξης

3. Στο διπλανό σχήμα η AD είναι διάμετρος, $A\Delta B = 50^\circ$ και $\Delta A\Gamma = 3\Gamma AB$.

α) Να αντιστοιχίσετε κάθε κυρτογώνιο τόξο της στήλης A στο αντίστοιχο μέτρο που βρίσκεται στη στήλη B .



στήλη (Α) τόξο	στήλη (Β) μέτρο τόξου
AB	20°
$B\Gamma$	40°
$\Gamma\Delta$	50°
$B\Delta$	60°
	80°
	100°

β) Να γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα παρακάτω ευθύγραμμα τμήματα: AB , $A\Gamma$, $A\Delta$, $B\Delta$, $\Gamma\Delta$.