ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 1ο

Εκθετική συνάρτηση

Το

22ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

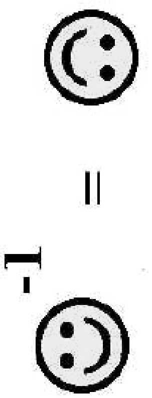
- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Δυνάμεις

Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της δύναμης ενός αριθμού $\alpha \in {}^{+}$ (πραγματικού & **θετικού**) ώστε να δέχεται ως εκθέτη οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Συνοπτικά, έχουμε:

Για εκθέτη φυσικό ($\nu \in$)

$\boxed{\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}$ (ν παράγοντες)



Για εκθέτη αρνητικό ακέραιο ($\kappa \in {}^{-}$)

$$\boxed{\alpha^\kappa = \frac{1}{\alpha^{-\kappa}}}$$

Για εκθέτη ρητό ($\mu,\nu \in$)

$$\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$$

Για εκθέτη άρρητο ($x \in {}'$)

Δεν απαιτείται από την ύλη μας να γνωρίζουμε το πώς και γιατί, αρκεί να γνωρίζουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση αυτή ορίζεται η δύναμη ενός θετικού, πραγματικού αριθμού.

Ορίζεται με τη βοήθεια μαθηματικών εννοιών , που ονομάζονται όρια , ως εξής:

$$\alpha^x = \lim_{\nu \to +\infty} \alpha^{\rho_\nu}$$

όπου ρ_ν η ακολουθία δεκαδικών προσεγγίσεων του x , με ν δεκαδικά ψηφία.

Αποδεικνύεται, επίσης, ότι και για τους πραγματικούς εκθέτες εξακολουθούν να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων:

Ιδιότητες δυνάμεων

$$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu} \qquad \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$$

ίδια βάση

$$(\alpha \cdot \beta)^{\mu} = \alpha^{\mu} \cdot \beta^{\mu} \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$$

$$\left(\alpha^{\mu}\right)^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$$

ίδιος εκθέτης

δύναμη δύναμης

Ισχύει ακόμα:

$\alpha^{1} = \alpha$ $\quad$ $\alpha^{0} = 1$ $\quad$ $0^{\nu} = 0$ $\quad$ 0^{0} = δεν ορίζεται

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$$

$1^{\nu} = 1$

$$(-1)^{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \nu = \text{άρτιος} \\ -1 & \text{αν } \nu = \text{περιττός} \end{cases}$$

2. Εκθετική Συνάρτηση

Με τον τρόπο αυτό, λοιπόν, μπορούμε για κάθε x∈ να ορίσουμε την παρακάτω συνάρτηση f: →(0, +∞), την οποία ονομάζουμε **εκθετική**:

$$f(x) = \alpha^{x}$$

α> 0

προϋποθέσεις περιορισμοί

Για την εκθετική συνάρτηση ισχύουν τα εξής:

1. Έχει πεδίο ορισμού **A =**
2. Έχει σύνολο τιμών το **f(A) = (0, +∞)**

3. Είναι **«1–1»**, δηλ. για κάθε $x_1 = x_2 \in A$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\mathbf{x_1 = x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} = \alpha^{x_2}}$$

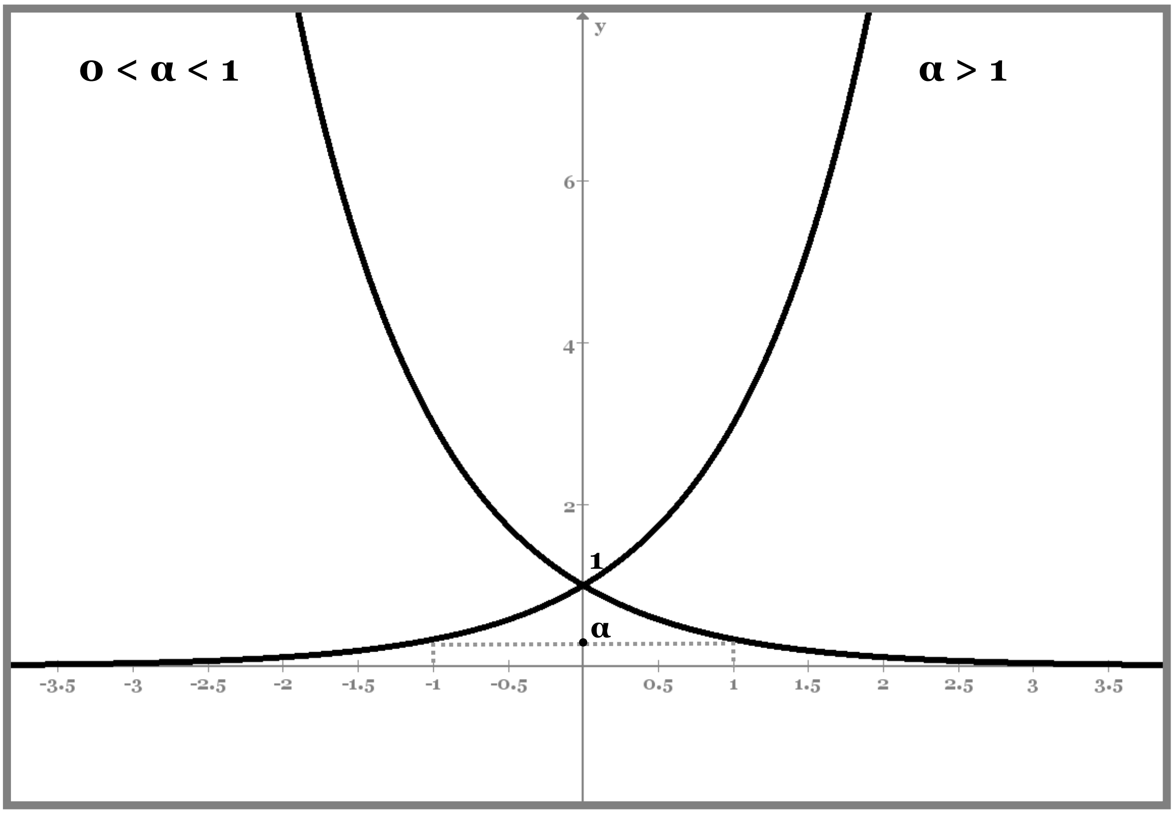
4. Αν **α > 1** είναι **αύξουσα (↑)**, δηλαδή $\forall\ x_1 < x_2 \in A$ ισχύει:

$$\mathbf{x_1 < x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}}$$

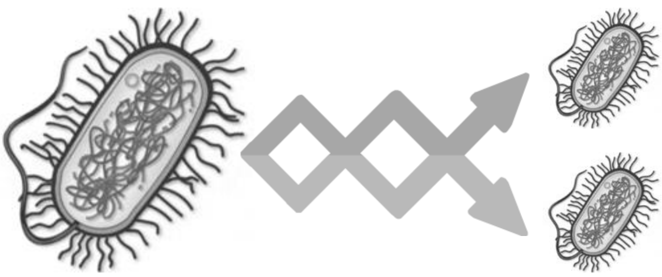
Αν **0 < α < 1** είναι **φθίνουσα (↓)**, δηλαδή $\forall\ x_1 < x_2 \in A$ ισχύει:

$$\mathbf{x_1 < x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}}$$

5. Για καθεμία απ' τις προηγούμενες περιπτώσεις, έχει γραφική παράσταση μια καμπύλη της μορφής:

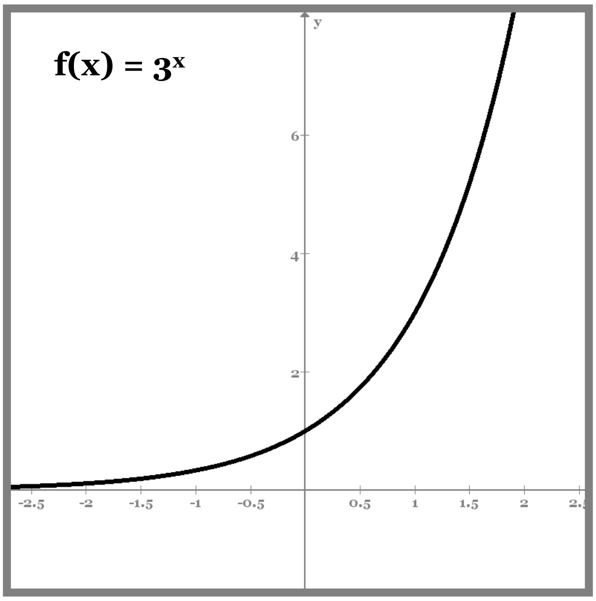


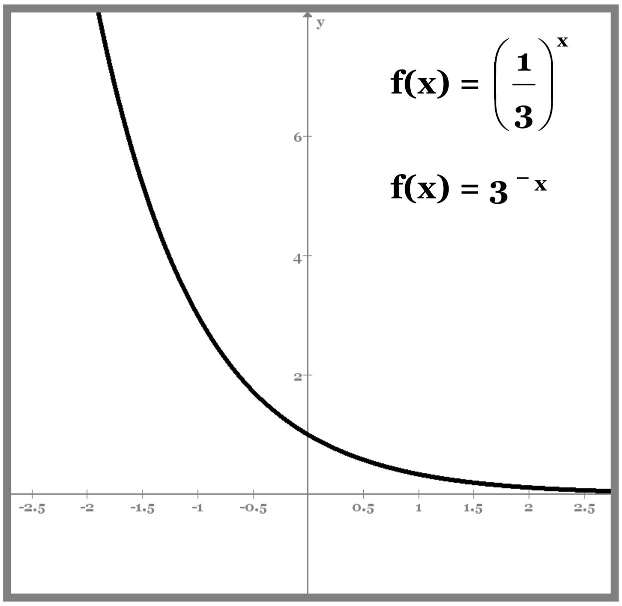
6. Λέμε ότι ο άξονας x΄x είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης, καθώς η γραφικής παράσταση της εκθετικής συνάρτησης τον πλησιάζει απεριόριστα, δίχως ποτέ να τον τέμνει.

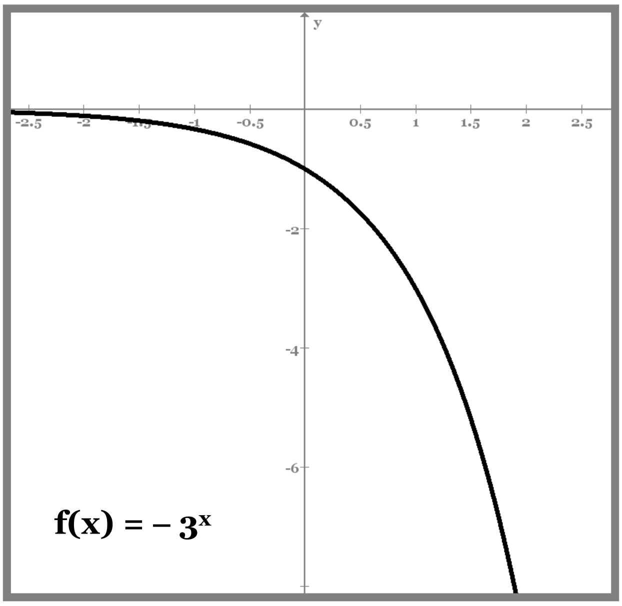


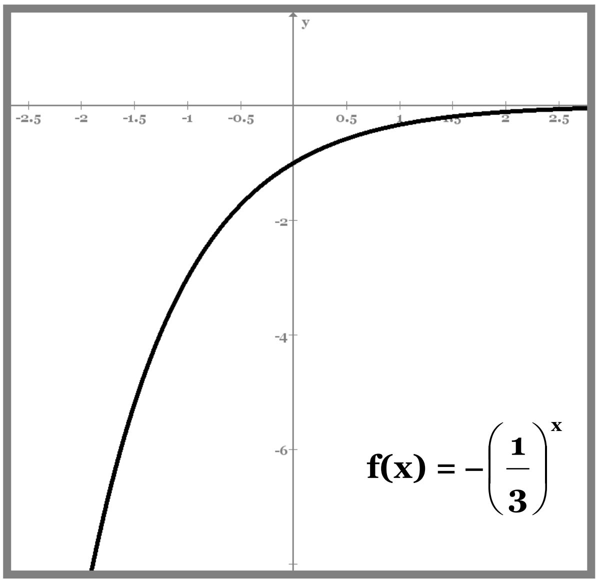
3. Παραδείγματα Γραφικών Παραστάσεων

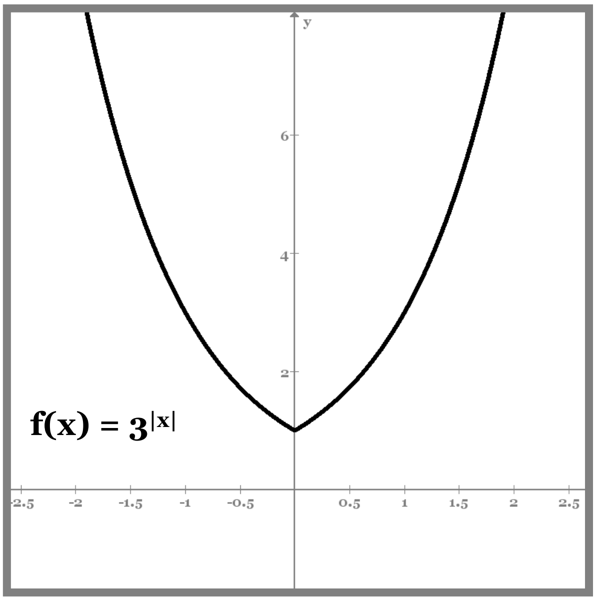
Εδώ παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις από διάφορες παραλλαγές της $f(x) = 3^x$, ώστε να γίνει καλύτερα κατανοητή η συμπεριφορά της εκθετικής συνάρτησης (αλλά και γενικότερα των συναρτήσεων).

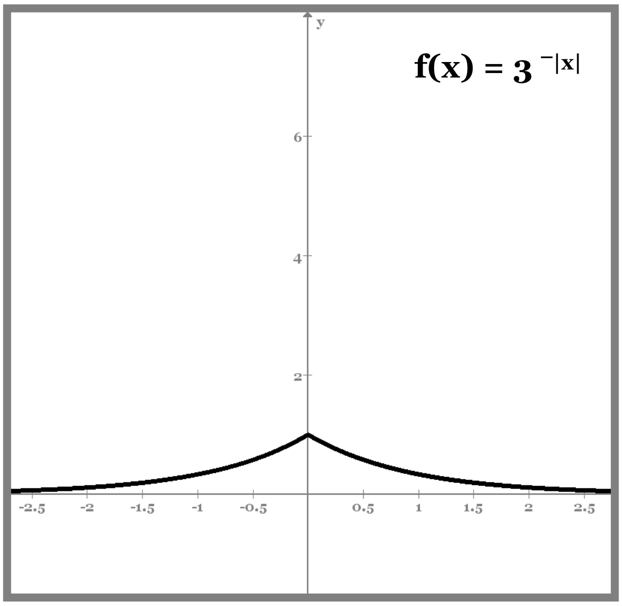


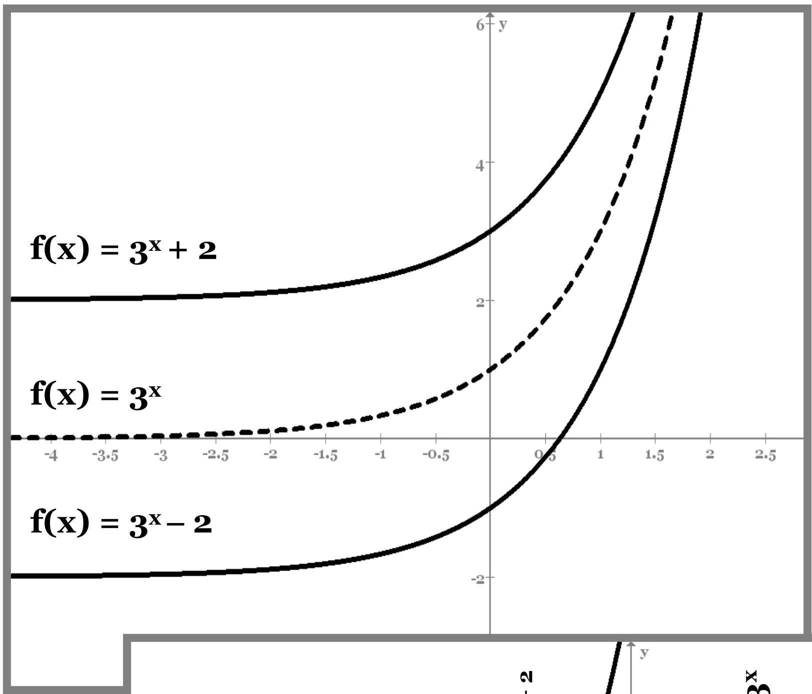


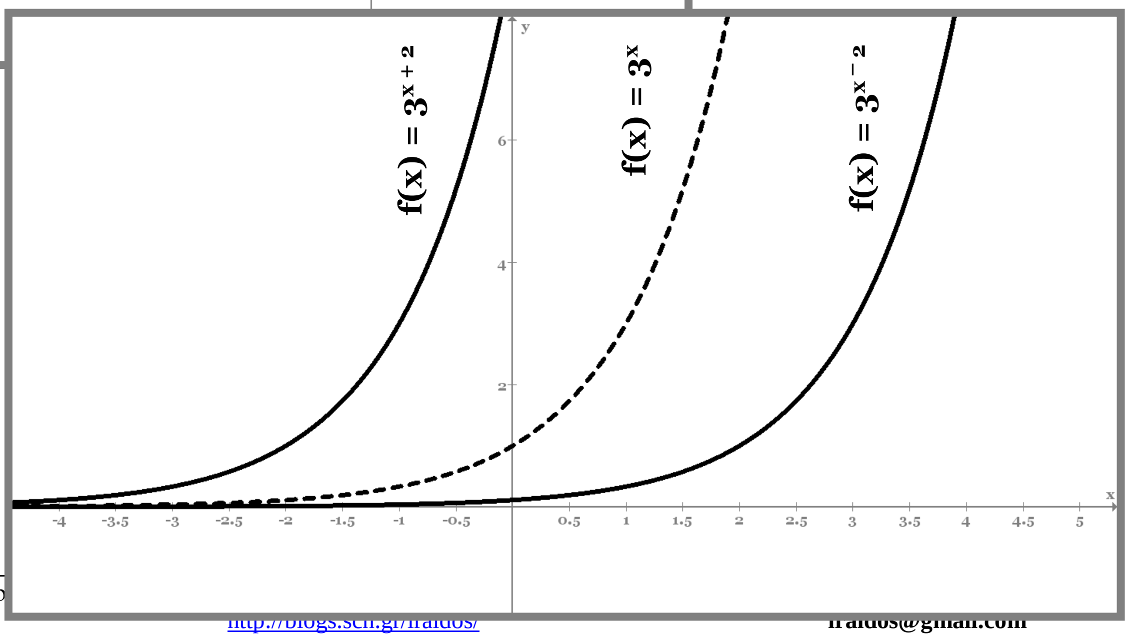





f(x) = 3^|x|


f(x) = 3^−|x|

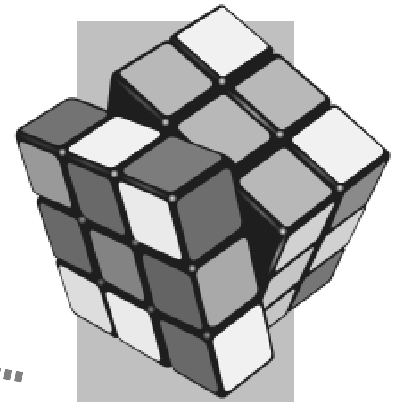

f(x) = 3^x + 2
f(x) = 3^x
f(x) = 3^x − 2


f(x) = 3^(x + 2)
f(x) = 3^x
f(x) = 3^(x − 2)

Μεθοδολογία

Εκθετική Συνάρτηση

και άλλα όμορφα...



1. Εκθετικές Συναρτήσεις

1. Όταν μας ζητείται να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης λαμβάνουμε υπόψιν τις διάφορες περιπτώσεις που αναλύθηκαν στις προηγούμενες σελίδες ή συνδυασμό αυτών.

Εξάσκηση : Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x) = 3^{x-2} + 1$

2. Αν για μια συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \alpha^x}$ μας ζητείται να εξετάσουμε :

α. πότε είναι **εκθετική**, θα πρέπει:

$$\alpha > 0 \text{ και } \alpha \neq 1$$

β. πότε **ορίζεται** για κάθε $x \in$, θα πρέπει:

$$\alpha > 0$$

γ. πότε είναι **γνησίως αύξουσα**, θα πρέπει:

$$\alpha > 1$$

δ. πότε είναι **γνησίως φθίνουσα**, θα πρέπει:

$$0 < \alpha < 1$$

2. Εκθετικές Εξισώσεις

1. Προσπαθούμε να γράψουμε και τα δύο μέλη ως δυνάμεις με την ίδια βάση, με τη βοήθεια των γνωστών ιδιοτήτων των δυνάμεων. Στη συνέχεια, επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι «1–1», θα ισχύει:

$$\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση: $4^{3x} = 2^{4} \cdot 16^{\frac{x}{2}}$

2. Με κατάλληλη αντικατάσταση ανάγουμε την εξίσωση σε μια ισοδύναμη πολυωνυμική, πχ. 2ου βαθμού.

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση: $9^{x-1} + 3^{x} = 4$

3. Εκθετικές Ανισώσεις

Σκεφτόμαστε με παρόμοιο τρόπο, όπως στις εξισώσεις, ωστόσο φροντίζουμε στην περίπτωση που **$0 < \alpha < 1$** να **αλλάζουμε τη φορά** της ανίσωσης, αφού τότε η συνάρτηση θα είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε θα ισχύει: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Εξάσκηση : Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$4^{2x-3} > 2^{2x+4} \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1}$$

4. Συστήματα

1. Με κατάλληλη αντικατάσταση ανάγουμε το σύστημα σε άλλο ισοδύναμο με δυο αγνώστους, το οποίο μπορούμε να λύσουμε με κάποια από τις γνωστές μας μεθόδους.

Εξάσκηση : Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 3^x + 2^y = 31 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases}$

2. Σε μερικές περιπτώσεις, όταν σε κάθε εξίσωση του συστήματος και τα δύο μέλη είναι γινόμενα, αρκεί να ακολουθήσουμε μια μέθοδο ανάλογη με αυτή που περιγράψαμε στις εξισώσεις: προσπαθούμε να γράψουμε και τα δύο μέλη, κάθε εξίσωσης, σαν δυνάμεις με την ίδια βάση.

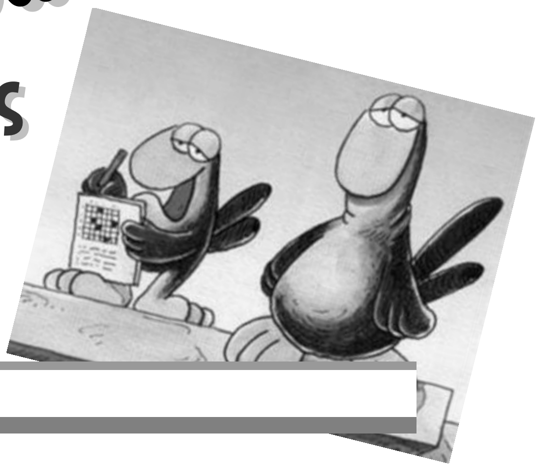
Εξάσκηση : Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 27^{3x+1} = 27 \cdot 81^{y-1} \\ 4 \cdot 16^{x-y} = 32^{2x+y+2} \end{cases}$

3. Όταν σε περιπτώσεις όπως η προηγούμενη, δεν είναι δυνατόν να γραφτούν και τα δύο μέλη με την ίδια βάση, τότε μια καλή ιδέα είναι να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε κατά μέλη, τις δυο εξισώσεις του συστήματος.

Εξάσκηση : Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2^{x} \cdot 5^{y} = 250 \\ 2^{y} \cdot 5^{x} = 40 \end{cases}$

Ασκήσεις Εκθετικές Εξισώσεις & Ανισώσεις

(και συναρτήσεις)
(και συστήματα)



1. Εκθετικές Συναρτήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\dfrac{\alpha+1}{3-\alpha}\right)^x$. Για ποιες τιμές του $\alpha \in$ η συνάρτηση:

- **α.** έχει πεδίο ορισμού το ;
- **β.** είναι γνησίως αύξουσα;
- **γ.** είναι γνησίως φθίνουσα;
- **δ.** είναι σταθερή;

2. Εκθετικές Εξισώσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

- **α.** $2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^{x+1} = 48$
- **β.** $2\cdot 9^x - 3^{x+1} - 135 = 0$
- **γ.** $2\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot 3^x + 3\cdot 3^{2x} = 0$
- **δ.** $3\cdot 9^x - 8\cdot 3^x\cdot 5^x + 5\cdot 5^{2x} = 0$
- **ε.** $3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x + 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 5$
- **στ.** $5\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^x + 6\cdot\left(\dfrac{6}{5}\right)^x = 11$
- **ζ.** $2^{x+1} + 7\cdot 2^{x+2} - \dfrac{24}{2^{x-1}} = \dfrac{468}{2^{x-2}}$
- **η.** $4^{2x} - 5\cdot 8^x - 7\cdot 2^{2x+1} + 5\cdot 2^x + 13 = 0$

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

θ. $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^{9}$ **ι.** $5^{2\eta\mu^2 x - \eta\mu 2x} = 1$

ια. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ **ιβ.** $3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 2 \cdot 5^{x-3}$

ιγ. $9^{x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$ **ιδ.** $3 \cdot 9^{x} - 5 \cdot 6^{x} + 2^{2x+1} = 0$

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α. $\sigma\upsilon\nu x + e^{-x} = 2$ στο $[0, \pi]$

β. $3^{x} + 4^{x} = 5^{x}$

γ. $10 + 10^{2} + 10^{3} + \ldots + 10^{x} = 1111110$ αν $x \in {}^{*}$

3. Να λυθεί στο $[0, \pi]$ η εξίσωση: $4^{\sigma\upsilon\nu 2x} + 4^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 3$

4. **α.** Να υπολογίσετε την παράσταση $(3+\sqrt{2})^{2}$

β. Να λυθεί η εξίσωση $7 \cdot (11 + 6\sqrt{2})^{x} = 3 - \sqrt{2}$

3. Εκθετικές Ανισώσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

α. $e^{2x} + 3 \geq e^{x} + e^{x+1}$

β. $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

γ. $9^{\frac{1}{x}} \leq \sqrt{3^{x}}$

δ. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2-3x}$

ε. $27^{x} + 12^{x} - 2 \cdot 8^{x} > 0$

στ. $9^{x+1} - 108 \cdot 3^{x} + 243 > 0$

4. Εκθετικά Συστήματα

1. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = -5 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} 5^x - 4^{y+1} = 9 \\ 5^{x-1} + 4^{y+2} = 69 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases}$

ε. $\begin{cases} 3\cdot 2^x - 2^{x+y} + 2 = 0 \\ 5\cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-1} - 16 = 0 \end{cases}$ **στ.** $\begin{cases} 4^x \cdot 2^{y-2} = 32 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27 \end{cases}$

η. $\begin{cases} 2^{x+2y} - 3^{2x-y} = 15 \\ 2^{\frac{x}{2}+y} + 3^{x-\frac{y}{2}} = 5 \end{cases}$ **θ.** $\begin{cases} x^y = y^x \\ x = y^2 \end{cases}$

5. Συνδυαστικές Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $2^{\,συνx} + 2\cdot 2^{-συνx} - 3 = 0$ στο $[0, 2\pi]$

β. $\dfrac{e^{συν^2 x}}{e} = e^{-2συν^3 x + 2συνx}$

γ. $e^{3\cdot \ln x} = 7e^{\ln x} + 6$