ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ 3Ο

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

Το

19ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

Μεθοδολογία

Πολυωνυμικές Εξισώσεις & Ανισώσεις

1. Πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού ν (ν∈)

θα λέγονται οι εξίσωσεις της μορφής:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \quad \text{με } \alpha_\nu \neq 0$$

Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης θα ονομάζουμε κάθε ρίζα του αντίστοιχου πολυωνύμου $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, δηλαδή κάθε ρ∈ , για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$.

Α. Προκειμένου να λύσουμε πολυωνυμικές εξισώσεις **1ου** ή **2ου βαθμού** ακολουθούμε τις γνωστές διαδικασίες επίλυσης, που μας βασανίζουν κοντά τρία χρόνια τώρα, αλλά μυαλό δε λέμε να βάλουμε.

Β. Για εξισώσεις, όμως, **μεγαλύτερου βαθμού** δεν υπάρχουν γενικές μέθοδοι επίλυσης (ίσως να υπάρχουν για εξισώσεις έως και 3ου ή 4ου βαθμού, αλλά είναι αβάσταχτα πολύπλοκες). Αυτό που προσπαθούμε να κάνουμε στις περιπτώσεις αυτές είναι **παραγοντοποίηση**, έτσι ώστε τελικά να καταλήξουμε σε παράγοντες το πολύ 1ου ή 2ου βαθμού. Αν καταφέρουμε να το επιτύχουμε αυτό, χωρίς να διαταράξουμε ανεπανόρθωτα την ψυχική μας γαλήνη, τα πράγματα θα έχουν γίνει πλέον εξαιρετικά εύκολα. Σύμφωνα με το παρακάτω γενικό σχήμα θα έχουμε:

$$P(x) = 0 \iff P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \ldots \cdot P_k(x) = 0$$

$$P_1(x) = 0 \qquad P_2(x) = 0 \qquad \ldots \qquad P_k(x) = 0$$

Για να το επιτύχουμε αυτό, πολύ χρήσιμο είναι το παρακάτω θεώρημα, γνωστό και ως **«Θεώρημα ακέραιων ριζών»**:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Σύμφωνα με όλα τα προηγούμενα, λοιπόν, μπορούμε να επιλύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x) = 0$ ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1. Αναζητούμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου. Αν η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ακέραια ρίζα τότε αυτή θα βρίσκεται ανάμεσα στους διαιρέτες αυτούς. Ξαναδιαβάστε το βήμα αυτό, μέχρι να καταλάβετε καλά τι εννοεί!

2. Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner, **διαδοχικά**, για καθένα από τους αριθμούς που βρήκαμε πριν, μέχρι να ανακαλύψουμε μια ρίζα της εξίσωσης. Θ' αναρωτιέστε, φυσικά, πως στην ευχή θα το καταλάβετε αυτό. **Το υπόλοιπο θα βγαίνει μηδέν!**

3. Στην περίπτωση αυτή, όπως έχουμε προαναφέρει, το πολυώνυμο $x - \rho$ θα είναι παράγοντας του $P(x)$. Άρα, σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης, θα είναι $\mathbf{P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)}$. Συνεπώς, θα έχουμε καταφέρει έτσι μια πρώτη παραγοντοποίηση. Τι δεν καταλαβαίνετε;;

4. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο στο πολυώνυμο $\pi(x)$, δηλαδή στο πηλίκο της προηγούμενης διαίρεσης, κι ούτω καθεξής, έως ότου καταλήξουμε σε ένα γινόμενο με παράγοντες, μονάχα, πολυώνυμα 1ου ή 2ου βαθμού. Στις περισσότερες ασκήσεις αρκούν 2 με 3 επαναλήψεις του σχήματος Horner, ώστε να φτάσουμε στο σημείο αυτό. Ούτε δυο γουλιές καφέ, δηλαδή!

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

Π Α Ρ Α Τ Η Ρ Η Σ Η

Συμβαίνει συχνά, μια πολυωνυμική εξίσωση να έχει για ρίζα δυο και τρεις (ή περισσότερες) φορές τον **ίδιο αριθμό!** Λέμε τότε ότι πρόκειται για **διπλή** ή **τριπλή** ρίζα. Ακόμα μπορεί ν' ακούσετε να μιλάμε για **ρίζα πολλαπλότητας** 2 ή 3, κλπ. Για παράδειγμα, αν παραγοντοποιώντας μία εξίσωση καταλήξουμε στο εξής:

$$(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-3)\cdot(x^2+x+1) \;=\; 0 \;\Leftrightarrow$$
$$(x-1)\cdot(x-3)^2\cdot(x^2+x+1) \;=\; 0$$

τότε λέμε ότι η εξίσωση έχει «*διπλή ρίζα το 3*» ή πως το 3 είναι «*ρίζα πολλαπλότητας 2*».

Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η ! ! !

Εξαιτίας της προηγούμενης παρατήρησης, θα πρέπει σε κάθε βήμα Horner να επανεξετάζουμε τη ρίζα που βρήκαμε από το προηγούμενο, καθώς είναι πολύ πιθανό ο ίδιος αριθμός να είναι πολλαπλή ρίζα. Ακούγεται βαρετό, αλλά μπορεί ν' αποδειχθεί σωτήριο!

2. Πολυωνυμικές ανισώσεις

Προκειμένου να λύσουμε μια πολυωνυμική ανίσωση, ακολουθούμε ακριβώς τα ίδια βήματα με μια πολυωνυμική εξίσωση. Ποια είναι αυτά; Μόλις πριν λίγο τα διαβάσατε! Στο τέλος, όμως, δεν αρκεί απλά η εύρεση των ριζών κάθε παράγοντα. Αυτό που μας ενδιαφέρει, κυρίως, είναι **το πρόσημο** της παράστασης. Για το σκοπό αυτό, κατασκευάζουμε ένα πίνακα προσήμων, όπως γνωρίζουμε πολύ καλά από την 1η Λυκείου, και κατόπιν επιλέγουμε το κατάλληλο διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

4. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

1. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ακέραιες λύσεις των εξισώσεων:

α. $x^3 - 8x + 7 = 0$

β. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$

γ. $(x^3 - 2x)\,x + x + 2 = 0$

δ. $(x - 1)(x^4 + x) - 3(x + 4) = 0$

ε. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

2. Αν κ ακέραιος αριθμός να δειχθεί ότι η εξίσωση: $5x^{2\nu} + 9\kappa x - 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

3. Αν κ, λ ακέραιοι αριθμοί να δειχθεί ότι η εξίσωση: $8\lambda x^{2\nu} - 2(\kappa - 1)x + 1 = 0$ δεν έχει ακέραια λύση.

* **4.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$

β. $9x^3 - 27x^2 - x + 3 = 0$

γ. $3x^4 - 8x^3 = 6x^2 - 16x$

δ. $x^3 - x^2 + 3x - 27 = 0$

ε. $3x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 6x + 27 = 0$

στ. $2x^2(x + 2) = 3x^2 + 15x + 18 = 0$

* **5.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^3 - 7x - 6 = 0$

β. $2x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 27x - 9 = 0$

γ. $4x^4 - 9x^2 - 2x + 3 = 0$

δ. $6x^4 + 10x^3 - x^2 + 5x - 2 = 0$

ε. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

6. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

β. $4x^4 - 5x^3 - 4x + 5 \geq 0$

γ. $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$

δ. $(x + 2)^3 < 8x^2 + 16x$

ε. $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq\leq 0$

στ. $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$

ζ. $x^4(3x - 4) \geq 10x^2(2x - 1) + 6 - 17x$

5. Δίνεται η εξίσωση: $x^5 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 1 = 0$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η εξίσωση να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακέραιων ριζών.

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**