ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

**1ο ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ 1Ο

Πολυώνυμα

# Το

# 17ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

**Μονώνυμο** Κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha x^{\nu} \quad \text{με } \alpha \in \ \ , \nu \in$$

**Πολυώνυμο** Κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha_{\nu} x^{\nu} + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

με $\alpha_{\nu}, \alpha_{\nu-1}, \ldots , \alpha_1, \alpha_0 \in$ , $\nu \in$

**Όροι** του πολυωνύμου ονομάζονται τα μονώνυμα

$\alpha_{\nu} x^{\nu}$, $\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}$, … , $\alpha_1 x$, $\alpha_0$

**Σταθερός όρος** του πολυωνύμου ονομάζεται ο όρος: $\alpha_0$ .

**Συντελεστές** του πολυωνύμου ονομάζονται οι πραγματικοί αριθμοί

$\alpha_{\nu}$, $\alpha_{\nu-1}$, … , $\alpha_1$, $\alpha_0$

**Βαθμός** πολυωνύμου καλείται ο μέγιστος εκθέτης των μη μηδενικών όρων του.

**Σταθερό πολυώνυμο** ονομάζεται κάθε πραγματικός αριθμός α.
Επειδή $\alpha = \alpha \cdot x^0$ τότε, προφανώς, κάθε σταθερό πολυώνυμο θα είναι **μηδενικού βαθμού**.

**Μηδενικό πολυώνυμο** ονομάζεται το σταθερό πολυώνυμο **Ο**. Δεν ορίζεται βαθμός για το μηδενικό πολυώνυμο.

**Συμβολισμός** Τα πολυώνυμα συμβολίζονται συνήθως με

**P(x)**, **Q(x)**, κλπ.

## 2. Ίσα πολυώνυμα

Δύο πολυώνυμα P(x) και Q(x) με:

$$\mathbf{P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}$$

$$\mathbf{Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0}$$ με $\nu \geq \mu$

θα λέγονται ίσα αν οι αντίστοιχοι συντελεστές τους είναι ίσοι, δηλαδή αν ισχύει:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \alpha_\mu & = & \beta_\mu \\ \alpha_{\mu-1} & = & \beta_{\mu-1} \\ & \ldots & \\ \beta_1 & = & \beta_1 \\ \alpha_0 & = & \beta_0 \end{array}}$$

και $\boxed{\alpha_{\mu+1} = \alpha_{\mu+2} = \ldots = \alpha_{\nu-1} = \alpha_\nu = 0}$


**Με πιο απλά λόγια ;!**

Τελικά, λέμε ότι δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν:

**(α)** είναι του ίδιου βαθμού και

**(β)** έχουν ίσους τους αντίστοιχους συντελεστές.

**Λέμε επίσης:** αντί για τη φράση «αντίστοιχοι συντελεστές» τη φράση «συντελεστές ομοιοβάθμιων όρων».

## 3. Μηδενικό πολυώνυμο

Από τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε εύκολα ότι ένα πολυώνυμο

$$\mathbf{P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}$$

θα είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με το μηδέν, δηλαδή αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} = \ldots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0}$$

## 4. Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

**Αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** ενός πολυωνύμου για x = ρ, όπου ρ ένας πραγματικός αριθμός, καλείται ο αριθμός που προκύπτει αν θέσουμε όπου x τον αριθμό ρ και εκτελέσουμε τις πράξεις. Η τιμή αυτή συμβολίζεται ως **P(ρ)**. Δηλαδή:

$$\mathbf{P(\rho) = \alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \rho + \alpha_0}$$

**Ρίζα** ενός πολυωνύμου θα λέγεται ένας πραγματικός αριθμός ρ, εάν ισχύει:

$$\mathbf{P(\rho) = 0}$$

**Παρατήρηση …**
Είναι φανερό ότι ένα σταθερό πολυώνυμο θα έχει πάντα την ίδια τιμή, ανεξαρτήτως των τιμών που παίρνει το x.

## 5. Πράξεις μεταξύ πολυωνύμων

**Πρόσθεση & Αφαίρεση**

Γίνονται κατά τα γνωστά με απαλοιφή παρενθέσεων και αναγωγή ομοίων όρων.

### Βαθμός αθροίσματος

Ο βαθμός του αθροίσματος δύο πολυωνύμων είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο βαθμό των δύο πολυωνύμων.

Εκτός κι αν το άθροισμά τους είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε δεν ορίζεται βαθμός.

## Πολλαπλασιασμός

Γίνεται με τη βοήθεια της γνωστής επιμεριστικής ιδιότητας.

## Βαθμός γινομένου

Ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

## 1. Βασικές γνώσεις

**1.** Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = x^3 - 2x$, $Q(x) = x^2 - 3x - 1$ . Να βρεθούν:

**α.** $P(x) + Q(x)$

**β.** $P(x) - Q(x)$

**γ.** $P(x) \cdot Q(x)$

**2.** Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in$   για την οποία το πολυώνυμο:

$P(x) = (\lambda + 2)\, x^3 - (\lambda^2 + \lambda - 2)\, x + \lambda^2 - 4$

να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

**3.** Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, δείξτε ότι το πολυώνυμο:

$P(x) = (\alpha - \beta)\, x^2 + (\beta - \gamma)\, x + \gamma - \alpha$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

**4.** Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο: $P(x) = (\kappa - 2)\, x^2 + (2\lambda + 6)\, x + \kappa + \lambda - 3$ είναι διάφορο του μηδενικού.

**5.** Να βρεθεί για ποιες τιμές των κ, λ, μ είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$P(x) = \lambda\, x^2 - (\lambda - \kappa)\, x + \mu - 2\lambda$

$Q(x) = (\mu - \lambda)\, x^2 + 4x + \kappa + \lambda$ .

**6.** Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in$   ώστε το πολυώνυμο:

$P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x - 27$

να παίρνει τη μορφή:

$\alpha\, (x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ .

**7.** Να βρεθεί πολυώνυμο Κ(x), ώστε το τετράγωνό του να ισούται με:

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ .

**8.** Να δειχθεί ότι για κάθε $\kappa \in$   το πολυώνυμο:

$P(x) = (\kappa - 1)\, x^5 + (3\kappa^2 + 2)\, x^3 + \kappa\, x$

δεν έχει ρίζα το $\frac{1}{2}$.

**9.** Αν το πολυώνυμο: $P(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + 2\alpha$ έχει ρίζα το $-1$ αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το: $K(x) = x^3 + 4x^2 + (\alpha^2 - 1)x$ .

**10.** Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο να ισχύει:

$(x^2 + 1) \cdot P(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$ .

**11.** Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^2 + 2x + 5$ . Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α αν ισχύει: $P(\alpha - 1) = 13$ .

**12.** Αν η διαφορά δύο πολυωνύμων βαθμού ν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, δείξτε ότι τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.

**13.** Να βρεθούν τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ αν:

**α.** $f(x + 1) = x^2 - 2x + 3$

**β.** $g(3x + 1) = 9x^2 - 6x + 1$

**14.** Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου:
$P(x) = (\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha) \cdot x^3 + (\alpha^2 - \alpha) \cdot x + 1 - \alpha$ , όπου $\alpha \in$ .

**15.** Αν ρ είναι ρίζα του $P(2x - 1)$ δείξτε ότι ο $\rho - 1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(2x + 1)$.

**16.** Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$P(x^2 + 1) = [P(x)]^2 + 1 .$$

Αν $P(0) = 1$ και $P(2) = 2$ , να βρείτε τα: $P(1)$, $P(5)$ και $P(26)$. Τι παρατηρείτε;

**17.** Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$(x - 3) \cdot P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 , \quad \text{για κάθε } x \in \; .$$

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**