ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑ §4.1-4.7
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Μάθημα: ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Τίτλος μαθήματος(ενότητας): Ισουπόλοιποι Αριθμοί
Ημερομηνία: 22-4-2010
Τάξη: Β΄ Λυκείου Σχολείο: Γενικό Λύκειο Βόλου
Ώρα: $1^{η}$
Τμήμα: B_1 (15 μαθητές)

ΓΕΝΙΚΟΙ ΣΚΟΠΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Να μπορούν οι μαθητές στο τέλος του μαθήματος να

- Ξεχωρίζουν ποια
- γνωρίζουν την
- Επίσης να είναι ικανοί να βρίσκουν την

ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Να είναι σε θέση στο τέλος του μαθήματος οι μαθητές να

1) Βρίσκουν την.
2) Υπολογίζουν τις.

ΜΕΣΑ: Πίνακας, κιμωλίες ή μαρκαδόροι, Η/Υ , φωτοτυπίες.

ΥΛΙΚΑ: CD, σλάιντς, σχολικό βιβλίο και ανακλαστικός πίνακας.

ΥΛΗ: Σχολικό βιβλίο – σελίδες 19- 23.

Κριτήρια Υπουργείου.

ΜΕΘΟΔΟΣ: Διερευνητική καθοδηγούμενη ανακάλυψη.

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

Α. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ - ΜΑΘΗΣΙΑΚΗ ΠΟΡΕΙΑ
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Με κατάλληλες ερωτήσεις ερευνούμε αν οι μαθητές κατέχουν προηγούμενες γνώσεις από την εμπειρία τους όπως στην τριγωνομετρία

Β. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΥΛΙΚΟΥ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ-ΑΝΑΛΥΣΗ
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ (Παράδοση)

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. * Ο αριθμός $\frac{2\nu}{3}$, $\nu \in N$, είναι ανάγωγο κλάσμα για κάθε $\nu \in N$. **Σ** **Λ**

2. * Οι αριθμοί 2ν και 2ν + 2 είναι διαδοχικοί άρτιοι για κάθε $\nu \in N$. **Σ** **Λ**

3. * Αν ένας ισχυρισμός Ρ (ν) δεχθούμε ότι είναι αληθής για το φυσικό αριθμό ν και αποδείξουμε ότι ισχύει για τον ν + 1, μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι ισχύει για κάθε $\nu \in N$. **Σ** **Λ**

4. * Αν η πρόταση «Ο αριθμός $\nu^2 + \nu + 17$, $\nu \in N^*$, είναι πρώτος» ισχύει για ν = 1, 2, 3, ..., 16, τότε θα ισχύει και για κάθε ν φυσικό αριθμό. **Σ** **Λ**

5. * Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο φυσικό αριθ-μό που είναι μοναδικός. **Σ** **Λ**

6. * Για κάθε ακέραιο α υπάρχουν ακέραιοι κ, υ ώστε η σχέση της ευκλείδειας διαίρεσης του α δια κ να είναι $\alpha = 3\cdot\kappa + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < 3$. **Σ** **Λ**

7. * Για κάθε ακέραιο α υπάρχουν ακέραιοι κ, υ ώστε η σχέση της ευκλείδειας διαίρεσης του α δια κ να είναι $\alpha = (-3)\cdot\kappa + \upsilon$ με $\upsilon<-3$. **Σ** **Λ**

8. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του 2 δια του 15 είναι 2. **Σ** **Λ**

9. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του -19 δια του 3 είναι -1. **Σ** **Λ**

10. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του -17 δια του 3 είναι 1. **Σ** **Λ**

11. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του -25 δια του - 3 είναι -1. **Σ** **Λ**

12. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του 25 δια του - 4 είναι 1. **Σ** **Λ**

13. * Έστω α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Η Ευκλείδεια διαίρεση του α δια β εκφράζεται από τη σχέση $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, όπου υ οποιοσδήποτε ακέραιος. **Σ** **Λ**

14. * Τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του α δια του β, όπου α, $\beta \in Z^*$ είναι 0, 1, 2, 3, ..., $|\beta|$ - 1. **Σ** **Λ**

15. * Κάθε φυσικός αριθμός ν μπορεί να πάρει την μορφή $\nu = 4\kappa + 1$ ή $\nu = 4\kappa + 2$ ή $\nu = 4\kappa + 3$, $\kappa \in N$. **Σ** **Λ**

16. * Κάθε ακέραιος αριθμός κ μπορεί να πάρει την μορφή $\kappa = 3\rho$ ή $\kappa = 3\rho + 1$ ή $\kappa = 3\rho + 2$, $\rho \in Z$. **Σ** **Λ**

17. ** Οι φυσικοί αριθμοί μέχρι το 1.000.000 που διαιρούνται με το 3, είναι περισσότεροι από αυτούς που διαιρούνται με το 5. **Σ** **Λ**

18. ** Έστω υ το υπόλοιπο της αλγοριθμικής διαίρεσης του α με το $\beta \neq 0$, $\delta \in Z^*$. Αν δ/α και δ/β, τότε δ/υ. **Σ** **Λ**

19. ** Έστω υ το υπόλοιπο της αλγοριθμικής διαίρεσης του α με το $\beta \neq 0$, $\delta \in Z^*$. Αν δ/α και δ/υ, τότε ισχύει πάντα δ/β. **Σ** **Λ**

20. * Αν α/β τότε $(-\alpha)/\beta$. **Σ** **Λ**

21. * Αν $\alpha/15$ και $15/\alpha$, τότε $\alpha = 15$ ή $\alpha = -15$. **Σ** **Λ**

22. * Αν $\alpha/\beta + \gamma$, τότε α/β και α/γ. **Σ** **Λ**

23. * Αν $-3/x$, $x > 0$, τότε ισχύει $3 \leq x$. **Σ** **Λ**

24. * Αν α ακέραιος με $3/\alpha$ και $5/\alpha$, τότε ισχύει $15/\alpha$. **Σ** **Λ**

25. * Κάθε πρώτος αριθμός διάφορος του 2 είναι περιττός. **Σ** **Λ**

26. * Κάθε ακέραιος αριθμός $\alpha \in Z^*$ είναι διαιρέτης του αριθμού

0. **Σ** **Λ**

27. * Υπάρχει ακέραιος αριθμός διάφορος του μηδενός, ο οποίος διαιρείται με τον 0. **Σ** **Λ**

28. * Οι μόνοι ακέραιοι διαιρέτες του 1 είναι οι 1 και -1. **Σ** **Λ**

29. * Ο αριθμός 1 είναι διαιρέτης κάθε ακεραίου. **Σ** **Λ**

30. * Αν α/β και β/γ, τότε α/γ. **Σ** **Λ**

31. * Αν α/β και β/α, τότε ισχύει οπωσδήποτε α = β. **Σ** **Λ**

32. * Αν α - β = πολκ τότε θα είναι και $\alpha^{\nu} - \beta^{\nu} = \pi\text{ολκ}$ για κάθε ν ∈ N*, κ ∈ Z. **Σ** **Λ**

33. * Αν α, β ακέραιοι και ν άρτιος φυσικός αριθμός τότε (α + β) / (α^{ν} + β^{ν}). **Σ** **Λ**

34. * Αν α και β είναι δύο θετικοί πρώτοι αριθμοί και α/β, τότε θα είναι α = β. **Σ** **Λ**

35. * Το γινόμενο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός. **Σ** **Λ**

36. * Ο α είναι θετικός ακέραιος. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός ρ ακέραιος πρώτος ώστε ρ/α^2 και ρ ≤ α. **Σ** **Λ**

37. * Ο 11 διαιρεί τον ακέραιο α·β (α, β ακέραιοι). Τότε ισχύει πάντα 11/α και 11/β. **Σ** **Λ**

38. ** Δύο αντίθετοι ακέραιοι έχουν τους ίδιους διαιρέτες. **Σ** **Λ**

39. * Η διαφορά δύο πολλαπλασίων του α είναι πολλαπλάσιο του α. **Σ** **Λ**

40. * Άθροισμα περιττού πλήθους περιττών είναι περιττός. **Σ** **Λ**

41. * Άθροισμα περιττού πλήθους άρτιων είναι περιττός. **Σ** **Λ**

42. ** Αν το γινόμενο ακεραίων είναι περιττός, τότε όλοι οι παράγοντες είναι περιττοί. **Σ** **Λ**

43. * Ο ακέραιος α - β, (α ≠ β) διαιρεί τον ακέραιο $\alpha^{\nu} + \beta^{\nu}$ για κάθε ν ∈ N*. **Σ** **Λ**

44. * Ο μοναδικός πρώτος άρτιος είναι ο αριθμός 2. **Σ** **Λ**

45. * Ο Μ.Κ.Δ. των -12 και -8 είναι ο -4. **Σ** **Λ**

46. * Ισχύει (140, 280) = 70. **Σ** **Λ**

47. * Ισχύει (α, β) = (α, -β) **Σ** **Λ**

48. * Αν για τους ακεραίους α, β ισχύει $2 \cdot \alpha - \beta = 1$, τότε θα ισχύει (α, β) = 2. **Σ** **Λ**

49. ** Αν για τους ακεραίους α, β ισχύει 3/α, 6/β και (α, β) = γ, τότε θα ισχύει 3/γ. **Σ** **Λ**

50. ** Αν για τους μη μηδενικούς ακεραίους α, β ισχύει α/17·β, τότε ισχύει πάντα α/β. **Σ** **Λ**

51. ** Αν για τους μη μηδενικούς ακεραίους α, β ισχύει α/18·β, τότε ισχύει πάντα α/β. **Σ** **Λ**

52. * Ισχύει η ισότητα [18, 72] · (18, 72) = 18·72. **Σ** **Λ**

53. * Για κάθε ακέραιο α ισχύει [17, α] = 17α. **Σ** **Λ**

54. * Ο αριθμός α (α + 1) είναι σύνθετος (α ακέραιος). **Σ** **Λ**

55. * Αν (α, β) = γ, τότε (5α, 5β) = 5γ. **Σ** **Λ**

56. ** Ισχύει (1, α) = α για κάθε α ∈ N*. **Σ** **Λ**

57. ** Αν (α, β) = 1, τότε α = β = 1. **Σ** **Λ**

58. * Αν α ∈ Z*, τότε (α, 0) = |α|. **Σ** **Λ**

59. * Αν β/α, με α ≠ 0, τότε (α, β) = |α|. **Σ** **Λ**

60. * Είναι (α, β) = 1, τότε θα υπάρχουν ακέραιοι κ, λ ώστε κα + λβ = 1. **Σ** **Λ**

61. * Για κάθε κ ακέραιο ισχύει [κα, κβ] = κ [α, β]. **Σ** **Λ**

62. * Αν α, β, κ, λ ακέραιοι και ισχύει ακ + βλ = 1 τότε (α, β) = (α, λ) = (β, κ) = (κ, λ) = 1. **Σ** **Λ**

63. * Δύο θετικοί αριθμοί που είναι διάφοροι μεταξύ τους και ο καθένας είναι πρώτος είναι και πρώτοι μεταξύ τους. **Σ** **Λ**

64. * Δύο αριθμοί που είναι πρώτοι μεταξύ τους είναι οπωσδήποτε πρώτοι αριθμοί. **Σ** **Λ**

65. * Το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών α, β (α > 2 και β > 2) είναι πάντα πρώτος αριθμός. **Σ** **Λ**

66. ** Ένας ακέραιος αριθμός α που είναι πρώτος έχει διαιρέτες μόνο τον 1 και τον α. **Σ** **Λ**

67. ** Αν ο ακέραιος αριθμός α είναι πρώτος, τότε και ο ακέραιος -α είναι πρώτος. **Σ** **Λ**

68. ** Κάθε πρώτος ακέραιος ρ είναι πρώτος με τον εαυτό του. **Σ** **Λ**

69. * Υπάρχει δεκάδα διαδοχικών φυσικών αριθμών ώστε οι 4 από αυτούς να είναι πρώτοι. **Σ** **Λ**

70. ** Ισχύει $(\alpha, \beta, \gamma) = ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma))$. **Σ** **Λ**

71. * Η γραμμική διοφαντική εξίσωση: $3x + y = 1$ έχει άπειρες λύσεις. **Σ** **Λ**

72. * Η ευθεία $y = x + 3$ διέρχεται από άπειρα το πλήθος σημεία με ακέραιες συντεταγμένες. **Σ** **Λ**

73. ** Η γραμμική διοφαντική εξίσωση: $\alpha x + \alpha^2 y = \beta$ με $\beta \neq 0$ και $\alpha > 1$ με $(\alpha, \beta) = 1$ έχει (μία τουλάχιστον) λύση. **Σ** **Λ**

74. ** Αν μια ευθεία με εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, με α, β, γ, ακέραιους, διέρχεται από σημείο με ακέραιες συντεταγμένες, τότε θα διέρχεται από άπειρα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες. **Σ** **Λ**

75. * Υπάρχει ευθεία που να διέρχεται μόνο από δύο σημεία με ακέραιες συντεταγμένες. **Σ** **Λ**

76. ** Η εξίσωση $\alpha x + \beta y + \kappa = 0$ με α, β άρτιους και κ περιττό, έχει τουλάχιστον μία λύση στο Z. **Σ** **Λ**

77. * Η διοφαντική εξίσωση $3x + 6y = 5$ έχει άπειρες λύσεις. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής χρησιμοποιείται για την απόδειξη προτάσεων P (ν), όταν

Α. $\nu \in R$ **Β.** $\nu \in Q$ **Γ.** $\nu \in R^*$

Δ. $\nu \in N$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

2. * Για τους ακεραίους α και $\beta \neq 0$ η σχέση της Ευκλείδειας διαίρεσης του α δια του β είναι η

Α. $\alpha = \kappa\beta + \upsilon, \quad \upsilon \geq 0$ **Β.** $\alpha = \kappa\beta + \upsilon, \quad 0 \leq \upsilon < \beta$

Γ. $\alpha = \kappa\beta + \upsilon, \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|$ **Δ.** $\beta = \kappa\alpha + \upsilon, \quad \upsilon < \beta$

Ε. $\alpha = \kappa\beta + \upsilon, \quad \upsilon \leq \beta \leq |\upsilon|$

3. ** Αν η διαίρεση του α με τον $\beta \neq 0$ είναι τέλεια, τότε

Α. ο β είναι πολλαπλάσιο του α

Β. ο β είναι παράγοντας του α

Γ. ο α είναι διαιρέτης του β

Δ. ο β διαιρούμενος με τον α αφήνει υπόλοιπο 0

Ε. ισχύει $\alpha = \kappa\beta + \upsilon, \upsilon \neq 0$.

4. ** Η Ευκλείδεια διαίρεση του -75 με το 24 περιγράφεται από την ισότητα $-75 = \beta \cdot 24 + \upsilon$, τότε το ζεύγος (β, υ) ισούται με

Α. (-3, -3) **Β.** (-4, 21) **Γ.** (-5, 45)

Δ. (3, -147) **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

5. * Από τις παρακάτω σχέσεις, για κάθε $\alpha \neq 0$, δεν ισχύει η

Α. $1/\alpha$ **Β.** α/α **Γ.** $\alpha/0$ **Δ.** α^2/α **Ε.** $\alpha/\kappa\alpha, \kappa \in Z^*$

6. * Αν α/β με $\beta \neq 0$, τότε από τις προτάσεις

$\alpha/(-\beta)$ (1) $(-\alpha)/\beta$ (2) και $(-\alpha)/(-\beta)$ (3) ισχύει

Α. μόνο η (1) **Β.** μόνο η (2) **Γ.** μόνο η (3)

Δ. και οι τρεις **Ε.** καμία απ' τις προηγούμενες

7. ** Αν α/β και β/α, τότε ισχύει

Α. $\alpha < \beta$ **Β.** $\alpha \neq \pm\beta$ **Γ.** $\alpha > \beta$

Δ. $\alpha = \beta$ είτε $\alpha = -\beta$ **Ε.** τίποτε από τα προηγούμενα

8. ** Αν α/β είναι πάντα

Α. $\alpha < \beta$ **Β.** $\alpha > \beta$ **Γ.** $\alpha = \beta$ **Δ.** $\alpha \leq \beta$ **Ε.** $|\alpha| \leq |\beta|$

9. ** Αν α, β μη μηδενικοί ακέραιοι α/β και β/α, τότε ισχύει πάντα

Α. α = β **Β.** |α| ≠ |β| **Γ.** α = –β

Δ. |α| = |β| **Ε.** α = β = 1

10. * Αν α ≠ β και α/β, τότε ισχύει πάντα

Α. α = κβ **Β.** β > α **Γ.** |β| ≤ |α|

Δ. |β| > |α| **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

11. ** Αν ο ρ δεν διαιρεί τον α και ο ρ δεν διαιρεί τον β, όπου α, β φυσικοί και ρ πρώτος, τότε

Α. ο ρ διαιρεί τον αβ **Β.** ο ρ δεν διαιρεί τον αβ

Γ. υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες ο ρ διαιρεί τον αβ

Δ. ρ = α ή ρ = β **Ε.** ρ = αβ

12. ** Διαθέτουμε 1.000 δραχμές για την αγορά 6 κιλών ενός προϊόντος. Τα ρέστα που θα πάρουμε για οποιαδήποτε τιμή του προϊόντος δεν μπορεί να είναι λιγότερα από

Α. 10 δρχ. **Β.** 6 δρχ. **Γ.** 4 δρχ. **Δ.** 18 δρχ. **Ε.** 12 δρχ.

(υποδιαιρέσεις της δραχμής δεν είναι πλέον σε χρήση)

13. ** Αν δ, κ, λ μη μηδενικοί ακέραιοι και δ/κ·λ, τότε ισχύει πάντα

Α. δ/κ **Β.** δ/λ **Γ.** δ/κ ή δ/λ **Δ.** δ/5.κλ **Ε.** δ/κ και δ/λ

14. ** Αν α/γ και β/γ, τότε ο α·β/γ όταν

Α. οι α, β είναι οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί

Β. οι α, β είναι οποιοιδήποτε ακέραιοι αριθμοί

Γ. ο α διαιρεί τον β

Δ. ο β διαιρεί τον α

Ε. οι α, β είναι πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι αριθμοί

15. * Για τους ακεραίους α ≠ 0, β, γ ισχύει ότι α/β και α/γ. Αν θεωρήσουμε τους τρεις αριθμούς β + γ, β - γ και κα (κ ∈ Z), τότε ισχύει

Α. ο α διαιρεί μόνο τον β + γ **Β.** ο α διαιρεί μόνο τον β - γ

Γ. ο α διαιρεί μόνο τον κα **Δ.** ο α διαιρεί και τους τρεις

Ε. ο α δεν διαιρεί κανέναν από τους τρεις αριθμούς.

16. * Για να είναι τετράγωνο ακεραίου ο αριθμός $3^2\cdot5^3\cdot\kappa\cdot7^2$ πρέπει ο πρώτος αριθμός κ, να ισούται με

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** 7 **Ε.** 11

17. ** Το γινόμενο $2^3\cdot3^2\cdot5^2$ διαιρείται με το γινόμενο $2\cdot3^\kappa\cdot5$, $\kappa \neq 0$, τότε ο κ παίρνει την τιμή

Α. μόνο 1 **Β.** μόνο 2 **Γ.** 1 ή 2 **Δ.** 3 **Ε.** 5

18. ** Ο ακέραιος $\alpha+\beta$, $(\alpha \neq -\beta)$ διαιρεί τον ακέραιο $\alpha^{\nu}+\beta^{\nu}$, $\nu \in N^*$

Α. μόνο αν $\alpha=\beta$ **Β.** μόνο αν $\alpha \neq \beta$

Γ. για κάθε ν άρτιο **Δ.** για κάθε $\nu \in N^*$ **Ε.** για κάθε ν περιττό.

19. ** Αν οι ακέραιοι α και β δεν είναι πολλαπλάσια του 3, τότε πάντα

Α. το άθροισμα τους διαιρείται με το 3

Β. η διαφορά τους διαιρείται με το 3

Γ. το άθροισμα ή η διαφορά τους διαιρείται με το 3

Δ. το άθροισμα και η διαφορά τους διαιρείται με το 3

Ε. ούτε το άθροισμα ούτε η διαφορά τους διαιρείται με το 3

20. * Για τους αριθμούς 6^8 και 15^8 ο Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π. είναι αντίστοιχα

Α. 3^8 και 90^8 **Β.** 6^8 και 15^8 **Γ.** 3^8 και 30^8

Δ. 3^8 και 90^8 **Ε.** 6^8 και 30^8.

21. * Για τους θετικούς ακέραιους α, β, κ ισχύει $\alpha=11\kappa$ και $\beta=20\kappa$. Τότε ισχύει

Α. $(\alpha,\beta)=11\kappa$ **Β.** $(\alpha,\beta)=20\kappa$ **Γ.** $(\alpha,\beta)=\kappa$

Δ. $(\alpha,\beta)=\kappa^2$ **Ε.** $(\alpha,\beta)=2\kappa$

22. * Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο διαδοχικών ακεραίων είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 3

Δ. το γινόμενό τους **Ε.** κάποιος άλλος ακέραιος

23. * Αν ο κ είναι άρτιος, τότε ο Μ.Κ.Δ του 2κ και του 4 είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 4 **Δ.** 8 **Ε.** -4

24. * Ένας ακέραιος αριθμός $\alpha \neq 0, \pm 1$ λέγεται πρώτος τότε και μόνο τότε αν οι διαιρέτες του είναι

Α. μόνο ο 1 **Β.** μόνο ο -1 **Γ.** μόνο ο α

Δ. μόνο ο $-\alpha$ **Ε.** οι $-1, 1, -\alpha, \alpha$

25. * Έστω $0<\alpha<\beta<\gamma$ και $0<\kappa<\lambda<\mu$ όπου α, β, γ, κ, λ, μ πρώτοι αριθμοί. Αν ισχύει $x=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$ και $x=\kappa\cdot\lambda\cdot\mu$ τότε

Α. $\alpha \neq \kappa$

Β. $\kappa\cdot\lambda=\beta\cdot\gamma$

Γ. $\alpha=\kappa$ και $\beta=\mu$

Δ. $\alpha=\kappa$ και $\beta=\lambda$ και $\gamma=\mu$

Ε. $\alpha \neq \kappa$ και $\beta \neq \lambda$ και $\gamma \neq \mu$

26. * Για τους ακεραίους α, β ισχύει 2α + 3β = 1. Τότε

Α. α · β > 0 **Β.** α = 0 ή β = 0 **Γ.** (α, β) = 1

Δ. (α, β) = 2 **Ε.** (α, β) = 3

27. ** Το τόξο θ παίρνει τιμές στο διάστημα [0, π] και ισχύει (4ημθ, 8) = 4. Τότε το τόξο θ θα ισούται με

Α. 0 **Β.** $\frac{\pi}{6}$ **Γ.** $\frac{5\pi}{6}$ **Δ.** π **Ε.** $\frac{\pi}{2}$

28. * Αν α, β είναι δύο θετικοί ακέραιοι με [α, β] = (α, β) τότε

Α. α = 1 και β οποιοσδήποτε ακέραιος

Β. β = 1 και α οποιοσδήποτε ακέραιος **Γ.** α ≠ β

Δ. α = β **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

29. ** Αν α, β ∈ N* ώστε (α, β) = [α, β], τότε

Α α ≠ β **Β.** α > β **Γ.** α = β **Δ.** (α, β) = 1 **Ε.** α < β

30. ** Αν οι αριθμοί ρ και $\rho^2 + 2$ με ρ < 10 είναι και οι δύο πρώτοι, τότε ο ρ είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 5 **Ε.** 7

31. ** Έστω α θετικός ακέραιος και $\alpha = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3$ η κανονική μορφή του. Το πλήθος των θετικών διαιρετών του είναι

Α. 3 **Β.** 6 **Γ.** 2 **Δ.** 4 **Ε.** 8

32. * Αν α, β θετικοί ακέραιοι με α ≠ β και β/α τότε ισχύει πάντα

Α. (α, β) = α **Β.** (α, β) = 1 **Γ.** (α, β) = β

Δ. [α, β] = β **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

33. ** Αν ρ πρώτος και ρ/αβ (α, β φυσικοί) τότε

Α. ρ = 1 **Β.** ρ/α και ρ/β **Γ.** ρ > α

Δ. ρ/α ή ρ/β **Ε.** (α,β) = 1

34. ** Αν (α, β) = 1 και (x_0, y_0) είναι ακέραιη λύση της εξίσωσης αx + βy = γ (1) με α, β, γ, κ ∈ Z τότε η εξίσωση (1) έχει και άλλες άπειρες ακέραιες λύσεις (x, y) που δίνονται από τους τύπους

Α. $x = x_0 + \beta\kappa$, $y = y_0 + \alpha\kappa$ **Β.** $x = x_0 + \alpha\kappa$, $y = y_0 + \beta\kappa$

Γ. $x = x_0 + \beta\kappa$, $y = y_0 - \alpha\kappa$ **Δ.** $x = x_0 - \alpha\kappa$, $y = y_0 + \beta\kappa$

Ε. $x = x_0 - \beta\kappa$, $y = y_0 - \alpha\kappa$

35. * Η γραμμική διοφαντική εξίσωση: $2x + y = 1$ έχει λύση το ζεύγος

Α. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ **Β.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ **Γ.** (-1,2) **Δ.** (1,-3) **Ε.** (-1,3)

36. ** Η διοφαντική εξίσωση: $12x + 18y = \kappa$ έχει για λύση το ζεύγος $(-2, 1)$. Η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις που δίνονται όλες από τους τύπους

Α. $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = 1-2t,\ t > 0 \end{cases}$ **Β.** $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2-2t,\ t \text{ ακέραιος} \end{cases}$

Γ. $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = 1-2t,\ t \text{ ακέραιος} \end{cases}$ **Δ.** $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-2t,\ t \text{ ακέραιος} \end{cases}$

Ε. $\begin{cases} x = 1-3t \\ y = 2+2t,\ t \text{ ακέραιος} \end{cases}$

37. ** Έστω η διοφαντική εξίσωση $(\nu + 1)\, x - (\nu + 2)\, y = 3$ με $\nu \in N^*$. Μία λύση της είναι

Α. $(-3, -1)$ **Β.** $(1, -3)$ **Γ.** $(3, 2)$ **Δ.** $(-3, -3)$ **Ε.** $(-4, 1)$

38. ** Δίνεται η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in Z^*$ και $\alpha\beta > 0$ η οποία έχει μία ακέραια λύση. Τότε

Α. η εξίσωση έχει άπειρες θετικές λύσεις

Β. η εξίσωση δεν έχει αρνητικές λύσεις

Γ. η εξίσωση δεν έχει θετικές λύσεις

Δ. το πλήθος των θετικών λύσεων είναι πεπερασμένο

Ε. έχει μόνο ακέραιες λύσεις

Ερωτήσεις αντιστοίχησης

1. ** Στη στήλη Α φαίνονται ζεύγη αριθμών (α, β). Στη στήλη Β υπάρχουν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του α με το β. Να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος με το αντίστοιχο υπόλοιπό της.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. (23, 3)	**Α.** -1
2. (-35**,** 6)	**Β.** 2
3. (-27, -5)	**Γ.** 1
4. (5, 7)	**Δ.** 0
	Ε. 3
	ΣΤ. 5

2. * Η στήλη Α περιέχει κατά σειρά τον διαιρετέο (Δ) και τον διαιρέτη (δ) μιας ευκλείδειας διαίρεσης και η στήλη Β το πηλίκο (π) και το υπόλοιπο (υ). Να γίνει αντιστοίχιση, ώστε τα δεδομένα να ανήκουν στην ίδια διαίρεση.

Στήλη Α		**Στήλη Β**	
Δ	**δ**	**π**	**υ**
1. 34	5	**Α.** -18	1
2. - 62	23	**Β.** 6	4
3. 73	- 4	**Γ.** 3	4
		Δ. 18	- 4
		Ε. -3	7

3. * Να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμό της πρώτης στήλης με τον αριθμό ο οποίος είναι διαιρέτης του για κάθε τιμή του λ ($\lambda \neq 0$) στη στήλη Β.

Αριθμός	**Διαιρέτης**
1. 27λ **2.** λ^3 **3.** λ (λ+1)	**Α.** 2 **Β.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** λ^2 **Ε.** λ^2+1

4. ****** Σε κάθε σχέση της πρώτης στήλης να αντιστοιχίσετε αυτήν η οποία συνεπάγεται (για κάθε μη μηδενικό ακέραιο β) στη δεύτερη στήλη.

Στήλη Α	**Σχέση η οποία συνεπάγεται**
1. 5/7·β **2.** 14/β **3.** 9/27+β	**Α.** 35/β **Β.** 3/β **Γ.** 5/β **Δ.** 7/β **Ε.** β/9

5. ****** Εάν β = 3 + πολ5, να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με την αντίστοιχη μορφή του που βρίσκεται στη στήλη (Β).

Στήλη (Α)	**Στήλη (Β)**
	Α. πολ5

1. β^2 **2.** β^3 **3.** β^4	**Β.** 1 + πολ5 **Γ.** 2 + πολ5 **Δ.** 3 + πολ5 **Ε.** 4 + πολ5

6. * Να αντιστοιχίσετε τα ζεύγη ή τις τριάδες της στήλης Α με το Μ.Κ.Δ. τους της στήλης Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 6, -28 **2.** 4, -3, 0 **3.** -6, 12, 72 **4.** -40, -30 **5.** 21, -14, 35	**Α.** 1 **Β.** 5 **Γ.** 2 **Δ.** 7 **Ε.** 4 **ΣΤ.** 6 **Ζ.** 10

7. * Από τη σχέση της πρώτης στήλης να προσδιορίσετε το ζεύγος των αριθμών που έχουν Μ.Κ.Δ. το δεύτερο μέλος της ισότητας. Το ζεύγος αυτό εμφανίζεται στη δεύτερη στήλη. Να γίνει αντιστοίχιση.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. (-1)·85+2·51 = 17 **2.** 57+(-1)·38 = 19	**Α.** 57, 38 **Β.** 85, 51 **Γ.** 38, 19 **Δ.** 26, 65

3. (-2)·26+65 = 13	**Ε.** 65, 13

8. ***** Να αντιστοιχίσετε τους αριθμούς της στήλης Α με το Ε.Κ.Π. τους της στήλης Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. -2, -3, -5 **2.** 7, -9, 1 **3.** 631, -2 **4.** 24, -12, 6 **5.** 23, 7, 2	**Α.** 63 **Β.** 1262 **Γ.** 48 **Δ.** 30 **Ε.** 322 **ΣΤ.** -30 **Ζ.** 24

9. ***** Η πρώτη στήλη περιέχει τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. δύο αριθμών που περιέχονται στη δεύτερη στήλη. Να γίνει αντιστοίχιση.

Στήλη Α		**Στήλη Β**
Μ.Κ.Δ.	**Ε.Κ.Π.**	
1. 1	12	**Α.** 3, 4
2. 1	21	**Β.** 6, -12
3. 6	12	**Γ.** -6, 3
4. 16	48	**Δ.** 7, 3
		Ε. 48, -16
		ΣΤ. 48, 4

10. ***** Σε κάθε γραμμική διοφαντική εξίσωση της πρώτης στήλης να αντιστοι-χίσετε τις λύσεις της στη δεύτερη στήλη.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Εξίσωση	**Λύσεις**
1. $2x + 3y = 5$	**Α.** $x = κ,\ y = -κ,$ κ ακέραιος
2. $3x - 6y = 2$	**Β.** $x = 2+κ,\ y = 3-κ,$ κ ακέραιος
3. $x + y = 0$	**Γ.** $x = 1+3κ,\ y = 1-2κ,$ κ ακέραιος
	Δ. καμία λύση
	Ε. $x = 3 + κ \quad y = 6 - κ,$ κ ακέραιος

11. ***** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της Α στήλης με μια (ακέραια) λύση της στη Β στήλη. (Αν έχει ακέραιες λύσεις).

Α στήλη	**Β στήλη**
1. 2x - 3y = 7 **2.** 13x + 12y = 23 **3.** -2x + 4y = 3 **4.** 4x - 5y = 7	**Α.** (x, y) = (-2, -3) **Β.** δεν έχει ακέραιες λύσεις **Γ.** (x, y) = (3, 4) **Δ.** (x, y) = (2, -1) **Ε.** (x, y) = (-1, 3) **ΣΤ.** (x, y) = (1,0)

Ερωτήσεις διάταξης

1. * Να βάλετε σε μια σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους παρακάτω αριθμούς:

α) (-34, -26) **β)** (39, -57) **γ)** (35, 55)

δ) (3, -4) **ε)** (-28, 52)

2. * Να βάλετε σε μια σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους παρα-κάτω αριθμούς:

α) [9, -4] **β)** [-2, 1] **γ)** [1, -1]

δ) [14, 21] **ε)** [-5, -15] **στ)** [17, 19]

3. * Να βάλετε σε μία σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α) 48 : 3 **β)** -49 : 3 **γ)** 49 : -3

δ) 88 : 5 **ε)** -87 : -7

Ερώτηση συμπλήρωσης

1. * Αν α πρώτος αριθμός να συμπληρωθούν τα κενά:

x	**y**	**(x, y)**	**[x, y]**
12	18		
$3\alpha^2$	2α		
12		6	60
		α	α

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Παρατηρούμε ότι: $1=\frac{1(1+1)}{2}$

$1+2=\frac{2(2+1)}{2}$

$1+2+3=\frac{3(3+1)}{2}$

Ποιο νομίζετε ότι θα είναι το άθροισμα 1 + 2 + 3 + ... + ν; Αποδείξτε την ισότητα που συμπεράνατε με επαγωγή.

2. * Μετράμε τον αριθμό των διαγωνίων μερικών πολυγώνων:

Αριθμός πλευρών	**Αριθμός διαγωνίων**
τετράπλευρο (ν = 4)	$2=\frac{4(4-3)}{2}$
πεντάγωνο (ν = 5)	$5=\frac{5(5-3)}{2}$
εξάγωνο (ν = 6)	$9=\frac{6(6-3)}{2}$
επτάγωνο (ν = 7)	$14=\frac{7(7-3)}{2}$

Ποιος νομίζετε ότι θα είναι ο αριθμός των διαγωνίων ενός πολυγώνου με ν πλευρές; Να αποδειχθεί η σχέση που συμπεράνατε με μαθηματική επαγωγή.

3. * Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $\nu \in N^*$ για την οποία ισχύει η σχέση $2^\nu > \nu^2$. Στη συνέχεια να αποδειχθεί η σχέση για κάθε ν μεγαλύτερο ή ίσο από την τιμή που βρέθηκε.

4. * Να διαπιστώσετε ότι ο αριθμός $2^{4\nu} - 1$ για ν = 1, 2, 3, 4 είναι πολλαπλάσιο του 15. Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι $2^{4\nu} - 1 = \text{πολ}15$, $\nu \in N^*$. Υπάρχει άλλος τρόπος απόδειξης;

4. ** Αν α, β ακέραιοι δείξτε ότι $(\alpha + \beta)^\nu = \alpha^\nu + \lambda\beta$, $\lambda \in Z$ και $\nu \in N^*$.

6. ** **i)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύει $2+4+6+\cdots+2\nu = \nu(\nu+1)$

ii) Να δείξετε ότι η ισότητα $2 + 4 + \cdots + 2\nu = \nu(\nu+1) - 1$ αν αληθεύει για ν , τότε αληθεύει και για ν + 1. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $\nu \in N^*$; Να τη συγκρίνετε με την ισότητα (i) και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

7. **** i)** Αποδείξτε ότι $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$.

ii) Έστω ότι ισχύει $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}} < 2$ για κ το πλήθος ριζικών, αποδείξτε ότι ισχύει και για κ + 1 πλήθος ριζικών. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για οποιοδήποτε πλήθος ριζικών; Δικαιολο-γήστε την απάντησή σας.

8. ****** Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2. Στην ε_1 παίρνουμε τα σημεία A_1, A_2, A_3 και στην ε_2 τα σημεία B_1, B_2, B_3.

i) Ενώνουμε το A_1 με το B_1. Το A_2 με το B_1 και B_2, το A_3 με το B_1, B_2 και B_3. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα θα σχηματιστούν;

ii) Αν στην ε_1 θεωρήσουμε ν σημεία A_1, A_2, ... A_ν. Αν και στη ε_2 αντιστοίχως ν σημεία B_1, B_2, ..., B_ν και ενώσουμε το A_1 με 1, το A_2 με 2, το A_3 με 3 και το A_ν με ν σημεία από την ευθεία ε_2, αποδείξτε ότι το πλήθος των ευθύγραμμων τμημάτων που σχηματίζονται είναι $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

9. ***** Να αποδειχθεί ότι: $2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots + \nu\cdot 2^{\nu-1} = (\nu-1)\cdot 2^\nu$

για κάθε $\nu \in N$ με $\nu \geq 2$.

10. ***** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύει:

α) $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + \nu(\nu+1)(\nu+2) = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}$

β) $2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2\nu)^3 = 2\nu^2(\nu+1)^2$

11. ****** Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι όταν διαιρούνται με 3 δίνουν πηλίκο διπλάσιο του υπολοίπου.

12. ****** Ο αριθμός 60 διαιρούμενος με τον θετικό ακέραιο δ δίνει πηλίκο π και υπόλοιπο 12. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές των δ και π.

13. ****** Αν π και υ είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα της διαίρεσης του α δια του $\beta > 0$, τότε να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του -α δια - β.

17. ****** Να αποδείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός ακεραίου α διαιρεθεί με τον 4, τότε το υπόλοιπο είναι 0 ή 1.

15. * Να βρεθούν οι ακέραιοι οι οποίοι όταν διαιρούνται με τον 13 δίνουν πηλίκο ίσο με το υπόλοιπο.

16. ** Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ακέραιος δ, ο οποίος όταν διαιρεί τον 2285 αφήνει υπόλοιπο 8 και όταν διαιρεί τον 977 αφήνει υπόλοιπο 5.

17. ** Ο αριθμός των δένδρων ενός άλσους είναι τριψήφιος και μικρότερος του 150. Αν τα δένδρα μετρηθούν ανά 3 ή 4 ή 5 ή 6 μένουν πάντοτε 2. Πόσα είναι τα δένδρα αυτά;

18. ** Οι αριθμοί 100 και 80 όταν διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό, δίνουν αντιστοίχως υπόλοιπα 1 και 8. Να βρεθούν οι τιμές του φυσικού αυτού αριθμού.

19. ** Στο σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών να λυθούν τα συστήματα

α) $\begin{cases} x+y=200 \\ (x,y)=5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+y=200 \\ (x,y)=3 \end{cases}$

1. ** Στο σύνολο των θετικών ακεραίων να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} (x,\ y)=10 \\ [x,\ y]=100 \end{cases}$.

21. * Να αποδειχθεί ότι:

i) Το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος

ii) Η διαφορά δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος

iii) Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος

iv) Η διαφορά δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος

v) Το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού είναι αριθμός περιττός

vi) Η διαφορά άρτιου αριθμού από περιττό είναι περιττός

vii) Το γινόμενο δύο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός

viii) Το γινόμενο ενός άρτιου αριθμού επί ένα περιττό είναι αριθμός άρτιος

22. * Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.

23. ** Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών αρτίων αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 8.

24. ** Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο πέντε διαδοχικών ακεραίων είναι πάντοτε διαιρετό δια 120.

25. ****** Να αποδειχθεί ότι μεταξύ τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών ο ένας είναι πάντοτε πολλαπλάσιο του 3.

26. ****** Να αποδειχθεί ότι μεταξύ πέντε διαδοχικών φυσικών αριθμών ο ένας είναι πολλαπλάσιο του 5.

27. ****** Εάν δύο ακέραιοι αριθμοί έχουν διαφορά άρτιο και γινόμενο άρτιο αριθμό να αποδείξετε ότι είναι και οι δύο άρτιοι.

28. *** i)** Αποδείξτε ότι $(\rho + 1)^2 - (\rho - 1)^2 = 4\rho$ για κάθε φυσικό ρ.

ii) Αποδείξτε ότι ένας φυσικός είναι πολλαπλάσιο του 4 τότε γράφεται σαν διαφορά δύο τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.

iii) Να γραφεί ο αριθμός 80 σαν διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.

29. ****** Να αποδείξετε ότι κάθε περιττός φυσικός αριθμός διάφορος του 1 μπορεί να τεθεί με τη μορφή διαφοράς δύο τετραγώνων φυσικών αριθμών.

30. *** α)** Να δείξετε ότι κάθε ακέραιος είναι της μορφής 2κ ή $2\kappa + 1$ (κ ακέραιος).

β) Για κάθε ακέραιο α ισχύει: $\alpha^2 = 4\kappa$ ή $\alpha^2 = 4\kappa + 1$.

γ) Για κάθε ακέραιο α δείξτε ότι ο αριθμός $\alpha^2 + \alpha + 1$ είναι περιττός.

31. ****** Διαθέτουμε 1.500 δρχ., με αυτό το ποσό ο μέγιστος αριθμός κιλών που μπορούμε να αγοράσουμε από ένα προϊόν είναι κ και παίρνουμε ρέστα 220 δρχ.

α) Αν διαθέτουμε 2.000 δρχ. θα μπορούσαμε να αγοράσουμε 2 κιλά επιπλέον και θα παίρναμε ρέστα 80 δρχ. Πόσο κοστίζει το κιλό του προϊόντος;

β) Ποιος πρέπει να είναι ο ελάχιστος αριθμός χαρτονομισμάτων των 5.000 που θα πρέπει να διαθέσουμε για την αγορά του προϊόντος ώστε να μην πάρουμε ρέστα.

32. ****** Οι ακέραιοι α και β διαιρούμενοι με το $\nu \in N^*$ αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\left|\frac{\alpha-\beta}{\nu}\right|$ είναι ακέραιος.

33. ****** Έστω $\alpha = \beta\cdot\kappa + \upsilon$, $0 \le \upsilon < |\beta|$, $\beta \neq 0$. Τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $(\alpha + \lambda\beta)$ με το β είναι πάλι υ.

34. ****** Να αποδειχθεί ότι:

α) ο αριθμός $\nu^3 - \nu$ είναι πολλαπλάσιο του 24, αν ν περιττός φυσικός διάφορος του 1.

β) ο αριθμός $(\nu^2 - 1)\,\nu^2\,(\nu^2 + 1)$ είναι διαιρετός δια 60, αν ν φυσικός.

γ) ο αριθμός $(\nu^3 - \nu)(\nu^2 - 4)$ είναι πολλαπλάσιο του 120, αν ν φυσικός μεγαλύτερος του 2.

35. * Εάν $\beta = 1 + \text{πολ}3$ να αποδείξετε ότι:
α) $\beta^2 = 1 + \text{πολ}3$ **β)** $\beta^3 = 1 + \text{πολ}3$

36. * Εάν $\nu = 1 + \text{πολ}5$ να αποδείξετε ότι: $3\nu^2 + 3\nu - 1 = \text{πολ}5$

37. * Εάν $\nu = 2 + \text{πολ}5$ να αποδείξετε ότι:
α) $2\nu + 1 = \text{πολ}5$ **β)** $\nu + 3 = \text{πολ}5$

38. * Αν $\nu = 3 + \text{πολ}5$ ή $\nu = 1 + \text{πολ}5$, να αποδείξετε ότι ο 5 διαιρεί τον $3\nu^2 + 3\nu - 1$.

39. ** Έστω α, β δύο ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 3. Να δείξετε ότι το άθροισμα α + β ή η διαφορά α - β διαιρείται με τον 3.

40. ** Αν τα ψηφία ενός τριψήφιου αριθμού είναι διαδοχικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι ο αριθμός διαιρείται με το 3.

41. ** Για κάθε $\nu \in N^*$, να αποδείξετε ότι $2^{2\nu} + 15\nu - 1 = \text{πολ}9$.

42. * Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $7^\nu + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3 για κάθε $\nu \in N^*$.

43. * Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $7^\nu - 6\nu - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 36 για κάθε $\nu \in N$, με $\nu \geq 2$.

44. ** Σε ένα πάπυρο μιας πυραμίδας της Αιγύπτου βρέθηκε γραμμένος ο μικρότερος θετικός ακέραιος ο οποίος διαιρείται με όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 10. Να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

45. ** Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι α, β.
α) Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:
i) Αν α/β και β/α τότε α = β. **ii)** Αν α/α+β τότε α/β.
β) Με τη βοήθεια των i) και ii) του α) να βρείτε όλα τα ζεύγη των θετικών ακεραίων α, β για τα οποία ισχύει: Το γινόμενο α·β διαιρεί το άθροισμα α + β.

46. * Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha = \nu(\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 1)$ διαιρείται με το 5 για κάθε $\nu \in N^*$.

47. ****** Έστω ένας διψήφιος αριθμός α. Αποδείξτε ότι όταν στο τριπλάσιο του αριθμού των δεκάδων του προσθέσουμε τις μονάδες του και το αποτέλεσμα διαιρείται δια του 7, τότε ο αριθμός α διαιρείται δια 7. Εξετάστε αν ισχύει το παραπάνω κριτήριο για τριψήφιους, τετραψήφιους κ.λπ. αριθμούς.

48. ****** Γράφουμε έναν τριψήφιο αριθμό αβγ. Μετά επαναλαμβάνουμε τον ίδιο αριθμό δίπλα στον πρώτο, ώστε να πάρουμε έναν εξαψήφιο της μορφής αβγαβγ. Να αποδείξετε ότι:

i) αβγαβγ = 1001 (100α +10β + γ)

ii) Ο αριθμός αβγαβγ διαιρείται δια του 7 του 11 και του 13.

49. ****** Αν α είναι διψήφιος ακέραιος αριθμός και β ο ακέραιος, ο οποίος προκύπτει από τον α, όταν εναλλάξουμε τα ψηφία του να αποδείξετε ότι η διαφορά α - β διαιρείται με τον 9.

50. ****** Εάν $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=1$ και τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ είναι ανάγωγα να αποδείξετε ότι:

α) ο β διαιρεί τον δ **β)** $|\beta| = |\delta|$

51. ****** Αν α, β ακέραιοι, να αποδειχθεί ότι: (α, β) = (5α + 4β, α + β).

52. ****** Αν (α, β) = 1 και δ/α δείξτε ότι (δ, β) = 1.

53. ****** Να αποδειχθεί ότι (α, β) = (α + βγ, β).

54. ****** Εάν $\delta_1 = (\alpha, \beta)$ και $\delta_2 = (\alpha + \beta\gamma, \alpha + \beta(\gamma-1))$ να αποδείξετε ότι $\delta_1 = \delta_2$.

55. ****** Εάν $\delta_1 = (\alpha, \beta)$ και $\delta_2 = (\alpha, \beta\gamma)$ τότε δ_1/δ_2.

56. ***** Εάν $\nu \in N^*$ να αποδείξετε ότι: $(5\nu + 1, 6\nu + 1) = 1$

57. ****** α) Οι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι φυσικοί αριθμοί. Να εξετάσετε αν μπορεί η περίμετρός του να ισούται με πρώτο αριθμό.

β) Οι πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι φυσικοί αριθμοί. Να εξετάσετε αν μπορεί το εμβαδόν του να ισούται με πρώτο αριθμό.

58. ****** Για κάθε $\nu \in N^*$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 3) \ldots (2\nu - 1)\, 2\nu = \text{πολ}2^{\nu}$

59. ****** Αν ο 2 δεν διαιρεί τον χψ, τότε να αποδείξετε ότι:

i) χ, ψ περιττοί αριθμοί

ii) ο 2 διαιρεί το $x^2 + \psi^2$

iii) ο 4 δεν διαιρεί το $x^2 + \psi^2$

60. ****** Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου και ισχύει (α, β, γ) = 7 και [α, β, γ] = 105, να βρεθούν οι α, β, γ.

61. ****** Να δείξετε ότι ο μοναδικός πρώτος της μορφής $\nu^3 - 1$ είναι ο αριθμός 7.

62. ****** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \kappa x + \lambda = 0$, $\kappa, \lambda \in Z$ δεν μπορεί να έχει για ρίζες δύο ανάγωγα κλάσματα.

63. ****** Αν $[\beta, \gamma] = \varepsilon$, $[\beta_1, \gamma_1] = \varepsilon_1$, β_1/β και γ_1/γ να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1/\varepsilon$.

64. ***** Ένας ανθοπώλης διαθέτει 30 τριαντάφυλλα, 72 γαρύφαλλα και 54 υάκινθους. Πόσες το πολύ ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει; Από πόσα άνθη κάθε είδους θα αποτελείται η κάθε ανθοδέσμη;

65. ***** Ένας βοσκός μετρώντας τα πρόβατά του τα έβρισκε πάντα κάπου ανάμεσα στα 113 και 137. Τα μετρούσε σε οκτάδες, δεκάδες ή δωδεκάδες, του περίσσευαν πάντα πέντε. Βοηθήστε τον να βρει πόσα πρόβατα έχει ακριβώς.

66. ***** Οι μαθητές μιας τάξης μπορούν να τοποθετηθούν σε τετράδες, πεντάδες ή εξάδες χωρίς να περισσεύει κανείς. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός των μαθητών αυτής της τάξης; Ποια μορφή έχουν οι αριθμοί που μπορεί να αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των μαθητών αυτής της τάξης;

67. ***** Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από ένα λιμάνι προς διαφορετικές κατευθύνσεις και όταν επιστρέφουν ξαναφεύγουν αμέσως. Το ταξίδι του ενός διαρκεί τρεις ημέρες και του άλλου πέντε ημέρες. Μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί τα δύο πλοία να αναχωρούν από το ίδιο λιμάνι ταυτόχρονα;

68. ***** Τρείς αθλητές τρέχουν ένα κυκλικό στίβο. Ο πρώτος για μία στροφή χρειάζεται 2 λεπτά, ο δεύτερος 3 λεπτά και ο τρίτος 5 λεπτά. Ξεκινούν και οι τρεις από το ίδιο σημείο. Μετά από πόσα λεπτά θα έχουν συμπληρώσει και οι τρεις (για πρώτη φορά) ακέραιο αριθμό στροφών;

69. ****** Αν $\alpha, \beta, \gamma \in Z^*$, να δειχθεί ότι: $(\alpha, \beta)(\beta, \gamma)(\gamma, \alpha)[\alpha, \beta][\beta, \gamma][\gamma, \alpha] = \alpha^2\beta^2\gamma^2$.

70. ****** Οι αριθμοί ρ και 8ρ - 1 είναι πρώτοι. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός 8ρ + 1 είναι σύνθετος.

71. ****** Εάν ο $\nu \geq 1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $(\nu + 1)! + 1$ δε μπορεί να γραφτεί ως δύναμη του 2.

72. ****** Δείξτε ότι το τετράγωνο κάθε πρώτου $\rho > 3$ είναι της μορφής $3\lambda + 1$.

73. ***** Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $2x - 3y = 5$.

74. ****** Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $36x + 42y = 66$.

75. ****** Να βρεθούν οι θετικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης $3x + 5y = 16$.

76. ***** Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $4x - 8y = 3$.

77. ****** Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας (ε): $6x + 5y = 4$, τα οποία έχουν αρνητική ακέραια τετμημένη και θετική ακέραια τεταγμένη.

78. ****** Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει μια ανταλλαγή ενός χαρτονομίσματος των 200 δρχ. με κέρματα των 10 και 20 δρχ.; (Θέλουμε κέρματα και των δύο ειδών).

79. ***** Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις των εξισώσεων:

i) $71x - 50\psi = 1$

ii) $43x + 64\psi = 1$

iii) $243x + 189\psi = 9$

80. ****** Εάν $\alpha, \beta \in Z^*$ να αποδείξετε ότι η διοφαντική εξίσωση $\alpha x + \beta\psi = \kappa\alpha + \lambda\beta$ έχει λύση για κάθε $\kappa, \lambda \in Z$.

81. ****** **α)** Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $4x + 5y = 2$

β) Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy να βρεθούν τα σημεία της ευθείας που έχει εξίσωση $4x + 5y = 2$, τα οποία βρίσκονται στην δεύτερη γωνία των αξόνων και έχουν ακέραιες συντεταγμένες.

82. ****** Μια ομάδα ποδοσφαίρου για το πρωτάθλημα της Α΄ Εθνικής κατηγορίας στους αγώνες, που έχει δώσει έως τώρα, έχει συγκεντρώσει 38 βαθμούς και έχει υποστεί 5 ήττες. Αν οι ισοπαλίες που έχει φέρει, είναι περισσότερες από τις ήττες, αλλά και οι νίκες περισσότερες από τις ισοπαλίες, να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των αγώνων, που έχει δώσει η ομάδα

αυτή, με δεδομένο ότι, από κάθε νίκη παίρνει 3 βαθμούς, από κάθε ισοπαλία 1 και στην ήττα 0.

83. ****** Ένας χρυσοχόος, επιστρέφοντας στο μαγαζί του, διαπιστώνει ότι του λείπουν οι λίρες που είχε αφήσει το προηγούμενο βράδυ διατεταγμένες σε σχήμα τετραγώνου.

Στην ερώτηση που έκανε στον υπάλληλό του: "που πήγαν οι λίρες;" πήρε την απάντηση:

- «Ήρθαν τρεις κλέφτες και τις άρπαξαν. Άφησαν μόνο δύο, που τις έχω στο συρτάρι. Θα τις έπαιρναν και αυτές, αλλά δεν μπορούσαν να τις μοιράσουν εξίσου οι τρεις μεταξύ τους».

Να εξετάσετε αν ο υπάλληλος έλεγε την αλήθεια.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΠΙΤΕΥΞΗΣ ΣΤΟΧΩΝ

Ζητείται από κάθε μαθητή χωριστά να γράψουν την εξίσωση

- του κύκλου
- της παραβολής
- της έλλειψης και
- της υπερβολής .

Να επιλύσουν την άσκηση 1ι) σχολικού βιβλίου σελίδα 129

2ιι) σχολικού βιβλίου σελίδα 129.

Εδώ είμαστε αμέτοχοι και ελέγχουμε τους μαθητές μας, διορθώνοντας τον καθένα χωριστά σε τυχόντα λάθη του.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΚΛΕΙΣΙΜΑΤΟΣ

Σε χρόνο 2-3 λεπτών

Α) λέμε έναν αστείο συνειρμό ή

Β) σχολιάζουμε μια επίκαιρη ευχάριστη είδηση ή

Γ) κάνουμε προβολή ενός βίντεο.

ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1) Άσκηση 12,3,4,5 σχολικού βιβλίου σελίδες 129.

2) Οι ασκήσεις του φύλλου εργασίας που δεν αναπτύχθηκαν.