



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

1<sup>ο</sup> ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

**ΜΑΘΗΜΑ §4.3**

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

Μάθημα: ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Τίτλος μαθήματος( ενότητας): Διαιρετότητα

Ημερομηνία: 02-04-2019

Τάξη: Β' Λυκείου

Σχολείο: Γενικό Λύκειο Βόλου

Ωρα: 1<sup>η</sup>

Τμήμα: Β<sub>1</sub> ( 15 μαθητές)

**ΓΕΝΙΚΟΙ ΣΚΟΠΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

Να μπορούν οι μαθητές στο τέλος του μαθήματος να

- Ξεχωρίζουν ποια
- Επίσης να είναι ικανοί να

**ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

Να είναι σε θέση στο τέλος του μαθήματος οι μαθητές να

- 1) Βρίσκουν την.
- 2) .

ΜΕΣΑ: Πίνακας, κιμωλίες ή μαρκαδόροι, Η/Υ , φωτοτυπίες.

ΥΛΙΚΑ: CD, σλάιντς, σχολικό βιβλίο και ανακλαστικός πίνακας.

ΥΛΗ: Σχολικό βιβλίο – σελίδες 19- 23.

**Κριτήρια Υπουργείου.**

**ΜΕΘΟΔΟΣ: Διερευνητική καθοδηγούμενη ανακάλυψη.**

**Α. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ - ΜΑΘΗΣΙΑΚΗ ΠΟΡΕΙΑ  
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ**

Με κατάλληλες ερωτήσεις ερευνούμε αν οι μαθητές κατέχουν προηγούμενες γνώσεις από την εμπειρία τους όπως στην τριγωνομετρία

**Β. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΥΛΙΚΟΥ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ-ΑΝΑΛΥΣΗ  
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ ( Παράδοση)**

## ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

### Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

#### **α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας**

Ερώτηση 1<sup>η</sup> : Τι λέγεται τέλεια διαίρεση;

Ερώτηση 2<sup>η</sup> : Τι λέγεται ατελής διαίρεση;

Ερώτηση 3<sup>η</sup> : Πότε ο β διαιρεί τον α ;

Ερώτηση 4<sup>η</sup> : Πότε ο α λέγεται διαιρέτης ή παράγοντας του α;

Ερώτηση 5<sup>η</sup> : Τι λέγεται γραμμικός συνδυασμός των κ και λ ;

Ερώτηση 6<sup>η</sup> : Τι λέγεται τέλειος αριθμός;

### **Β. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ**

#### **α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου**

1. Ασκηση 1 Σχολικο σελίδα 149

2. Ασκηση 2 Σχολικο σελίδα 149

3. Ασκηση 3 Σχολικο σελίδα 149

4. Ασκηση 4 Σχολικο σελίδα 149

5. Ασκηση 6 Σχολικο σελίδα 149

β) Συμπληρωματικά παραδείγματα και εφαρμογές.

6. Να αποδείξετε ότι  $2^{55} + 1 = \pi_0 \lambda \cdot 11$

7. Αν ο θετικός ακέραιος αριθμός  $k$  διαιρεί το πλήθος των ν πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου  $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ , να αποδείξετε ότι ο  $2^k - 1$  διαιρεί το άθροισμα αυτών των όρων.

8. Αν  $7 | (\alpha + 3)$  και  $7 | (24 - \beta)$ , να δείξετε ότι  $7 | (\alpha + \beta)$ .

9. Να αποδειχθεί ότι  $17 | 3^{4v+2} + 2 \cdot 4^{3v+1}$ ,  $v \in \mathbb{N}$ .

10. Αν η διαφορά δύο ακεραίων είναι άρτιος αριθμός τότε η διαφορά των τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 4.

## ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

### 1. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

Αν  $2 | \alpha$  και  $3 | \alpha$  τότε  $6 | \alpha$ .

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Ο αριθμός 28 είναι τέλειος αριθμός;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 3η**

Να εξετάσετε αν ισχύει

$$3 \mid 1002^2 + 2001^2.$$

**ΕΡΩΤΗΣΗ 4η**

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

Αν ο  $\beta$  είναι διαιρέτης του  $\alpha$ , τότε και ο  $-\beta$  είναι διαιρέτης του  $\alpha$ .

**ΕΡΩΤΗΣΗ 5η**

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

Αν  $\alpha \mid \beta$  και  $\beta \mid \alpha$  τότε  $|\alpha| = |\beta|$ .

## 2. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

**Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β).**  
**Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.**

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
Ο $\beta$ είναι διαιρέτης του $\alpha$	$\kappa \alpha + \lambda \beta$
Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \alpha$ τότε	$\alpha \cdot \beta \mid \gamma \cdot \delta$
Γραμμικός συνδυασμός των $\alpha$ και $\beta$	$\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$
Αν $\alpha \mid \gamma$ και $\beta \mid \delta$ τότε	$\alpha = \kappa \cdot \beta$

**Συμπληρώστε τις προτάσεις που ακολουθούν:**

α) Ενας ακέραιος μεγαλύτερος του 1 λέγεται τέλειος όταν είναι ίσος με το

.....

β) Οι διαιρέτες ενός ..... εμφανίζονται κατά ..... αντίθετων

γ) Γραμμικός συνδυασμός των  $\beta$  και  $\gamma$  λέγεται ο αριθμός  $\alpha$  που έχει την μορφή

$$\alpha = \dots$$

**Διαγράψτε αυτά που έρχονται σε αντίθεση με τα δεδομένα.**

5 | 20

4 | 26

1 | 11

33 | 11

25 | 25

### 3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1H

Τέλειος αριθμός είναι ο

A  Αριθμός που ισούται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του.

B  Αριθμός της μορφής  $\alpha^2$

Γ  Ακέραιος αριθμός.

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2H

Ο  $\beta$  είναι διαρέτης του  $\alpha$  σημαίνει ότι

A   $\beta$  είναι επίσης και το υπόλοιπο

B   $\beta = \lambda \cdot \alpha, \lambda \in Z$

Γ   $\alpha = \kappa \cdot \beta, \kappa \in Z$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 3H

Γραμμικός συνδυασμός των  $\beta$  και  $\gamma$  είναι ο αριθμός

A   $\kappa + \beta + \lambda + \gamma$

B   $\kappa \beta + \lambda \gamma, \kappa, \lambda \in Z$

Γ   $\kappa \cdot \lambda + \alpha \cdot \beta$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 4H

Οι τέλειοι αριθμοί είναι τόσο σπάνιοι όσο και οι άνθρωποι

A  Ευκλείδης

B  Ηλίας Ράιδος

Γ  M. Mersenne

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 5H

Στη τέλεια διαίρεση, το υπόλοιπο είναι

A  Θετικός αριθμός

B  Αρνητικός αριθμός

Γ  Μηδέν.

## 4.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε..... με όταν...

### Ερώτηση α)

..... ο αριθμός  $\beta$  διαιρεί τον  
αριθμό  $\alpha$ ;

### Ερώτηση β)

..... ο αριθμός  $\beta$  είναι  
διαιρέτης ή παράγοντας του  $\alpha$ ;

### Ερώτηση γ)

..... ένας ακέραιος είναι  
γραμμικός συνδυασμός των  $\alpha$   
και  $\beta$  ;

### Ερώτηση δ)

..... ένας αριθμός είναι  
τέλειος;

### Ερώτηση ε)

..... αρχίζει και πότε  
ολοκληρώνεται η Θεωρία  
Αριθμών;

## 5.ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

## Διατυπώσεις των θεμάτων.

11. Ασκηση 1 Σχολικο σελίδα 150

12. Ασκηση 2 Σχολικο σελίδα 150

13. Ασκηση 3 Σχολικο σελίδα 150

14. Ασκηση 4 Σχολικο σελίδα 150

15. Ασκηση 5 Σχολικο σελίδα 150

### 3.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

45. \*\* Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι  $\alpha, \beta$ .

α) Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

ι) Αν  $\alpha/\beta$  και  $\beta/\alpha$  τότε  $\alpha = \beta$ .                  ii) Αν  $\alpha/\alpha+\beta$  τότε  $\alpha/\beta$ .

β) Με τη βοήθεια των i) και ii) του α) να βρείτε όλα τα ζεύγη των θετικών ακεραίων  $\alpha, \beta$  για τα οποία ισχύει: Το γινόμενο  $\alpha \cdot \beta$  διαιρεί το άθροισμα  $\alpha + \beta$ .

46. \* Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός  $\alpha = v(v^2 - 1)(4v^2 - 1)$  διαιρείται με το 5 για κάθε  $v \in \mathbb{N}^*$ .

47. \*\* Έστω ένας διψήφιος αριθμός  $\alpha$ . Αποδείξτε ότι όταν στο τριπλάσιο του αριθμού των δεκάδων του προσθέσουμε τις μονάδες του και το αποτέλεσμα διαιρείται δια του 7, τότε ο αριθμός  $\alpha$  διαιρείται δια 7. Εξετάστε αν ισχύει το παραπάνω κριτήριο για τριψήφιους, τετραψήφιους κ.λπ. αριθμούς.

48. \*\* Γράφουμε έναν τριψήφιο αριθμό αβγ. Μετά επαναλαμβάνουμε τον ίδιο αριθμό δίπλα στον πρώτο, ώστε να πάρουμε έναν εξαψήφιο της μορφής αβγαβγ. Να αποδείξετε ότι:

i)  $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma = 1001(100\alpha + 10\beta + \gamma)$

ii) Ο αριθμός αβγαβγ διαιρείται δια του 7 του 11 και του 13.

49. \*\* Αν  $\alpha$  είναι διψήφιος ακέραιος αριθμός και  $\beta$  ο ακέραιος, ο οποίος προκύπτει από τον  $\alpha$ , όταν εναλλάξουμε τα ψηφία του να αποδείξετε ότι η διαφορά  $\alpha - \beta$  διαιρείται με τον 9.

## ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

**50.** \*\* Εάν  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = 1$  και τα κλάσματα  $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$  είναι ανάγωγα να αποδείξετε ότι:

- a)** ο  $\beta$  διαιρεί τον  $\delta$       **b)**  $|\beta| = |\delta|$

## ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΠΙΤΕΥΞΗΣ ΣΤΟΧΩΝ

Ζητείται από κάθε μαθητή χωριστά να γράψουν την εξίσωση

- του κύκλου
- της παραβολής
- της έλλειψης και
- της υπερβολής .

Να επιλέξουν την άσκηση 1ι) σχολικού βιβλίου σελίδα 129

2ii) σχολικού βιβλίου σελίδα 129.

Εδώ είμαστε αμέτοχοι και ελέγχουμε τους μαθητές μας, διορθώνοντας τον καθένα χωριστά σε τυχόντα λάθη του.

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΚΛΕΙΣΙΜΑΤΟΣ

Σε χρόνο 2-3 λεπτών

- A) λέμε έναν αστείο συνειρμό ή  
B) σχολιάζουμε μια επίκαιρη ευχάριστη είδηση ή  
Γ) κάνουμε προβολή ενός βίντεο.

## ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

- 1) Άσκηση 12,3,4,5 σχολικού βιβλίου σελίδες 129.
- 2) Οι ασκήσεις του φύλλου εργασίας που δεν αναπτύχθηκαν.