ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

M_1: Για να αποδείξουμε ότι ένα σημείο $A(x_o, y_o)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μια γραμμής C, αρκεί να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες x_o, y_o επαληθεύουν τον τύπο της γραμμής C.

M_2: Για να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ παίρνουμε τον τύπο $\lambda=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ αντικαθιστούμε τα δεδομένα και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στον υπολογισμό του λ.

M_3: Για να βρούμε τη γωνία που σχηματίζει ο άξονας x΄ x με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ κάνουμε τα παρακάτω:

α) Υπολογίζουμε το λόγο $\lambda=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

β) Επιλύουμε ως προς ω τη σχέση εφω=λ.

M_4: Για να βρούμε την ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο $A(x_o, y_o)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ παίρνουμε τον τύπο $y-y_o=\lambda(x-x_o)$, κάνουμε πράξεις και καταλήγουμε στη μορφή $Ax+By+\Gamma=0$ ή $y=\lambda x+\beta$ που είναι η ζητούμενη ευθεία.

M_5: Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ παίρνουμε τον τύπο $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.(x-x_1)$, κάνουμε πράξεις και καταλήγουμε στον τύπο $Ax+By+\Gamma=0$ ή $y=\lambda x+\beta$.

M_6: Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(\alpha, \beta)$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ_ε της ευθείας ε είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης $\lambda\vec{\delta}=\frac{\beta}{\alpha}$ του διανύσματος, οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι

$y-y_o=\lambda\vec{\delta}(x-x_o)$, και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στη μορφή $Ax+By+\Gamma=0$ ή $y=\lambda x+\beta$.

Σημείωση: Όταν $\vec{\delta}=(0, \beta)$ τότε η ζητούμενη ευθεία είναι η ε: $x=x_o$.

M_7: Για να δείξουμε ότι τρία σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε μία από τις παρακάτω τρεις σχέσεις: $\lambda_{AB}=\lambda_{A\Gamma}$ ή $\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}$ ή $\lambda_{B\Gamma}=\lambda_{A\Gamma}$.

M_8: Για να βρούμε το ύψος ενός τριγώνου ΑΒΓ όταν είναι γνωστές οι κορυφές του $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$.
α) Βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης λ της πλευράς .
β) Ο αντίστροφος και αντίθετος του αριθμού αυτού δηλαδή ο $-\frac{1}{\lambda}$ είναι ο συντελεστής του ύψους που αντιστοιχεί στην παραπάνω πλευρά.
γ) Εφαρμόζουμε τη M_4.

M_9: Για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda\varepsilon_1=\lambda\varepsilon_2$.

M_{10}: Για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες ε_1, ε_2 είναι κάθετες αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda\varepsilon_1\lambda\varepsilon_2=-1$.

M_{11}: Για να βρούμε την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ όταν είναι γνωστές οι κορυφές του $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$.
α) Με βάση τον τύπο $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$ βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της ΑΒ.
β) Εφαρμόζουμε τη M_5.

M_{12}: Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας της μεσοκαθέτου στην πλευρά ΑΒ όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ των Α, Β.
α) Με βάση τον τύπο $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$ βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου $M(x_o, y_o)$ της ΑΒ.
β) Βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης λ_{AB} της πλευράς ΑΒ οπότε για το συντελεστή της μεσοκαθέτου λ θα ισχύει $\lambda=-\frac{1}{\lambda_{AB}}$.
γ) Ο τύπος $y-y_o=\lambda(x-x_o)$ γίνεται $y-y_o=-\frac{1}{\lambda_{AB}}(x-x_o)$ και μετά από πράξεις καταλήγουμε στη μορφή $Ax+By+\Gamma=0$ ή $y=\alpha x+\beta$.

M_{12}: Για να βρούμε το συμμετρικό ενός σημείου $A(x_o, y_o)$ ως προς την ευθεία ε: $y=\lambda x+\beta$
α) Ονομάζουμε x_1, y_1 τις συντεταγμένες του Α΄ συμμετρικού του Α ως προς την ε.
β) Αν $M(x_2, y_2)$ το σημείο τομής της ΑΑ΄ με την ε θα ισχύουν οι σχέσεις: $\frac{x_1+x_o}{2}=x_2$ (1), $\frac{y_1+y_o}{2}=y_2$ (2).
γ) Βρίσκουμε τον συντελεστή της ΑΑ΄ που είναι $\lambda'=-\frac{1}{\lambda}$.
δ) Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας ΑΑ΄ από τον τύπο $y-y_o=\lambda'(x-x_o)$.
ε) Το σύστημα των ευθειών ΑΑ΄ και ε δίνει τις συντεταγμένες του

Μ (x_2, y_2).
στ) Αντικαθιστώ στις (1), (2) και επιλύουμε ως προς x_1, y_1 που είναι οι συντεταγμένες του Α΄ συμμετρικού του Α ως προς την ε.

M_{14}: Για να αποδείξουμε ότι η εξίσωση Αx+Βy+Γ=0 παριστάνει ευθεία αρκεί να δείξουμε ότι δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα οι Α και Β για κάποια τιμή μιας παραμέτρου.

M_{15}: Για να αποδείξουμε ότι οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση Αx+Βy+Γ+λ(Α΄x+Β΄y+Γ΄)=0 (1) (Οικογένεια ευθειών) διέρχονται από το ίδιο σημείο κάνουμε τα παρακάτω:

<u>1^{ος} τρόπος:</u>

α) Επιλύουμε το σύστημα Αx+Βy+Γ=0
Α΄x+Β΄y+Γ΄=0
β) Η λύση του συστήματος είναι το ζητούμενο σημείο.

<u>2^{ος} τρόπος:</u>

α) Θέτω δύο τυχαίες τιμές στο λ της εξίσωσης (1) και προκύπτουν οι εξισώσεις (3), (4).
β) Επιλύουμε το σύστημα (3), (4).
γ) Η λύση του συστήματος είναι το ζητούμενο σημείο.

M_{16}: Για να βρούμε πάνω σε ποια γραμμή κινείται ένα σημείο Α(f(λ),g(λ)) για τις διάφορες τιμές του λ αρκεί να βρούμε μία σχέση της μορφής y=f(x) που συνδέει τις συντεταγμένες f(λ), g(λ) του σημείου Α.

M_{17}: Για να βρούμε την οξεία γωνία των ευθειών ε_1: αx+βy+γ=0 και ε_2: α΄x+β΄y+γ΄=0
α) Βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης λ_1, λ_2 των ευθειών ε_1 και ε_2
β) Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες στα διανύσματα $\vec{\delta}_1=(1, \lambda_1)$, $\vec{\delta}_2=(1, \lambda_2)$
γ) Ο οξεία γωνία θ των ευθειών ε_1 και ε_2 θα είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας φ των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ οπότε

$$\text{συνφ}=\frac{\vec{\delta}_1\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|} = \text{---------------------------} = \kappa \in (0, \frac{\pi}{2})$$

δ) Επιλύουμε τη σχέση συνφ=κ ως προς φ.

M_{18}: Για να βρούμε το σημείο τομής δύο ευθειών ε_1 και ε_2 αρκεί να επιλύσουμε το σύστημα (Σ) που αποτελούν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

M_{19}: Για να αποδείξουμε ότι μια ευθεία Αx+Βy+Γ=0 είναι παράλληλη στον xx΄ αρκεί να δείξουμε ότι Α=0.

M_{20}: Για να αποδείξουμε ότι μια ευθεία Αx+Βy+Γ=0 είναι παράλληλη στον yy΄ αρκεί να δείξουμε ότι Β=0.

M_{21}: Για να αποδείξουμε ότι μια ευθεία Αx+Βy+Γ=0 διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) αρκεί να δείξουμε ότι Γ=0.

M_{22}: Για να σχεδιάσουμε τις γραμμές που παριστάνει η εξίσωση $x^2-y^2+Ax+By+\Gamma=0$ (1) υπάρχουν δύο τρόποι:

<u>1^ος τρόπος:</u>

α) Κάνουμε παραγοντοποίηση την (1) και καταλήγουμε στη μορφή (αx+βy+γ)(α΄x+β΄y+γ΄)=0

β) Σχεδιάζουμε τις ευθείες ε_1: αx+βy+γ=0 και ε_2: α΄x+β΄y+γ΄=0

<u>2^ος τρόπος:</u>

α) Θεωρούμε την (1) ως εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς άγνωστο του y

β) Ο τύπος $y_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ μας δίνει τις ευθείες ε_1: y=λx+β και ε_2: y=λ΄x+β΄ τις οποίες σχεδιάζουμε στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

M_{23}: Για να βρούμε την απόσταση ενός σημείου Μ (x_o, y_o) από μια ευθεία ε

α) Μετατρέπουμε την εξίσωση της ευθείας ε στη μορφή Αx+Βy+Γ=0

β) Εφαρμόζουμε τον τύπο $d(M,\varepsilon)=\dfrac{|Ax+By+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

M_{24}: Για να βρούμε την απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών ε_1, ε_2

α) Παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ (x_o, y_o) που ανήκει στην ευθεία ε_1

β) Υπολογίζουμε την απόσταση του Μ από την ευθεία ε_2

γ) Άρα $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=d(M,\varepsilon_2)$.

M_{25}: Για να βρούμε τη μεσοπαράλληλη ε: $Ax+By+\Gamma_3=0$ των παραλλήλων ευθειών ε_1: $Ax+By+\Gamma_1=0$ και ε_2: $Ax+By+\Gamma_2=0$

α) Βρίσκουμε την $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ με τη M_{24}.

β) Βρίσκουμε την $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=d(M,\varepsilon)$ όπου Μ σημείο της ε_1.

γ) Επιλύουμε τη σχέση $2d(M,\varepsilon)=d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ως προς Γ_3

δ) Αντικαθιστώ το Γ_3 στην εξίσωση ε: $Ax+By+\Gamma_3=0$

M_{26}: Για να βρούμε το εμβαδό ενός τριγώνου ΑΒΓ όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών του Α (x_1, y_1), Β (x_2, y_2), Γ(x_3, y_3) υπάρχουν δύο τρόποι:

<u>1^ος τρόπος:</u>

Εφαρμόζουμε τον τύπο(ΑΒΓ)=$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\|$

<u>2^{ος} τρόπος:</u>

α) Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$

β) Υπολογίζουμε την ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$ δηλαδή τη det($\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$)

γ) Αντικαθιστούμε στον τύπο (ΑΒΓ)=$\frac{1}{2}$ |det($\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$)| και κάνουμε πράξεις.

M_{27}: Για να υπολογίσουμε το εμβαδό ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ όπου είναι γνωστές οι συντεταγμένες των τριών κορυφών του Α,Β,Γ,

α) Βρίσκουμε το (ΑΒΓ)

β) Υπολογίζουμε το (ΑΒΓΔ) από τον τύπο (ΑΒΓΔ)=2(ΑΒΓ)

M_{28}: Για να αποδείξουμε ότι 3 σημεία Α, Β, Γ με Α (x_1, y_1), Β (x_2, y_2), Γ(x_3, y_3) είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε ότι (ΑΒΓ)=0 δηλαδή $\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\|$=0.

M_{29}: Για να αποδείξουμε ότι οι ευθείες ε_1: α χ+β ψ+γ = 0
ε_2: α΄χ+β΄ψ+γ΄= 0

αρκεί να δείξουμε ότι η D=$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ είναι διάφορη του μηδενός,

δηλαδή το σύστημα (Σ) των ευθειών ε_1,ε_2 έχει μοναδική λύση.