ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων

ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 1Ο

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Το

9ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

http://blogs.sch.gr/iraidos/
E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
iraidos@gmail.com

Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο** x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Αν στην ισότητα $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε

$$\boldsymbol{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}.$$

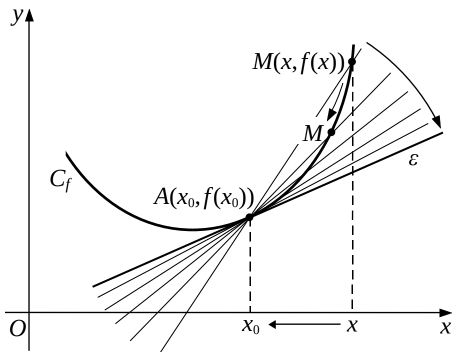
Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ του πεδίου ορισμού της f, τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν τα όρια

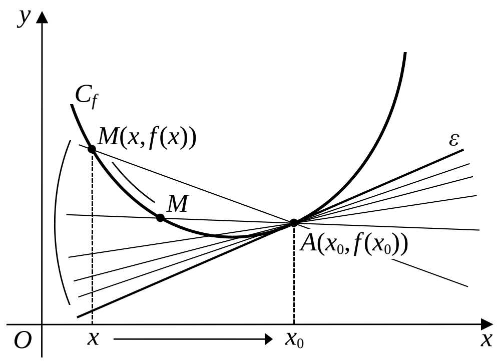
$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ και είναι ίσα.

Πρόβλημα εφαπτομένης

● Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0,f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.



(α)



(β)

Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο $M(x,f(x))$, $x\neq x_0$, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία *AM* που ορίζουν τα σημεία *A* και *M*, παρατηρούμε ότι:

Καθώς το *x* τείνει στο x_0 με $x>x_0$, η τέμνουσα *AM* παίρνει μια οριακή θέση *ε* (Σχ. α). Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το *x* τείνει στο x_0 με $x<x_0$ (Σχ. β). Την οριακή θέση της *AM* την ονομάζουμε **εφαπτομένη της γραφ. παράστασης της *f* στο *A***.

Επειδή η κλίση της τέμνουσας *AM* είναι ίση με $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ θα έχει κλίση το $\lambda=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

Copyright: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω *f* μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της *Α*, την ευθεία *ε* που διέρχεται από το *Α* και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Κατακόρυφη εφαπτομένη

Αν μια συνάρτηση *f* είναι **συνεχής** στο x_0 και ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

α) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ (ή $-\infty$)

β) $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ και $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$,

γ) $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ και $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$,

τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$.

● Αν μια συνάρτηση *f* **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και **δεν** ισχύουν οι προϋποθέσεις του παραπάνω ορισμού, τότε **δεν ορίζουμε** εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Παράγωγος και συνέχεια

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση *f* δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1 ΕΥΡΕΣΗ $f'(x_0)$

Σε συνάρτηση απλού τύπου

Βρίσκουμε το $f(x_0)$.

Σχηματίζουμε το λόγο $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, κάνουμε πράξεις, παραγοντοποιήσεις και απαλείφουμε τον παράγοντα $x-x_0$. Βρίσκουμε το: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (1).

- Αν υπάρχει το όριο και είναι πραγματικός αριθμός , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με $f'(x_0)=$.
- Αν δεν υπάρχει το όριο (1) ή είναι $\pm\infty$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε για την εύρεση της παραγώγου στο x_0 το $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, αν το ανάπτυγμα του $f(x_0+h)$ απλουστεύει τις πράξεις.

Σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου

Όταν ζητείται το $f'(x_0)$,όπου x_0 είναι σημείο αλλαγής τύπου κλαδωτής συνάρτησης, τότε:

- Εξετάζουμε πρώτα τη συνέχεια της f στο x_0. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη.
- Βρίσκουμε το $f(x_0)$.
- Υπολογίζουμε τις πλευρικές παραγώγους: $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Αν οι πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες με ένα πραγματικό αριθμό ℓ, τότε $f'(x_0)=\ell$.
Διαφορετικά, δεν υπάρχει το $f'(x_0)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ - ΟΡΙΣΜΟΣ

1. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x+\beta & , \ x\le 2 \\ \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & , \ x>2 \end{cases}$ να βρείτε τα α, β ∈ , ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο 2.

2. Αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=-7$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 .

3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$ και ισχύει ότι ημx $\le f(x) \le x\sqrt{x}$ + ημx , για κάθε $x \ge 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4. Έστω η συνάρτηση f: $\to$, παραγωγίσιμη στο 0 και στο 1 και ισχύει ότι f(0) = f(1) . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & , \ x\le \dfrac{1}{2} \\ f(2x-1) & , \ x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο 1/2 , αν και μόνο αν f ΄(0) = f ΄(1) .

5. Δίνεται η συνάρτηση f: $\to$, παραγωγίσιμη στο 1 και για την οποία ισχύει ότι f ΄(1) = 2 . Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[f(1)-f\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]=2$$

6. Έστω η συνάρτηση f: $\to$, παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει ότι f(x + y) = f(x) + f(y) + xy , για κάθε x, y ∈ . Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο .

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

7. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με $f(x_0) = 3$, $f\,'(x_0) = 2$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2f(x)-6}{x-x_0}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f: → , παραγωγίσιμη στο 0 . Να αποδείξετε ότι:

α. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x} = (\alpha-\beta)\cdot f'(0)$, με α, β ∈ * .

β. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^2(3x)-f^2(2x)}{x} = 2\cdot f(0)\cdot f'(0)$

9. Θεωρούμε μια συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = e^{x}\cdot f(y) + e^{y}\cdot f(x) + xy + \alpha$$

για κάθε x, y ∈ . Να αποδείξετε ότι:

α. $f(0) = -\alpha$

β. η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.

γ. αν η f είναι παραγωγίσιμη στο , τότε ισχύει ότι:

$f\,'(x_0) = f(x_0) + f\,'(0)\cdot e^{x_0}\, e^{x} + x_0$, για κάθε x_0 ∈ .

δ. αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, τότε είναι παραγωγίσιμη στο και ισχύει:

$f\,'(x_0) = f(x_0) + f\,'(0)\cdot e^{x_0} + x_0$, για κάθε x_0 ∈ .

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**