



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</u>	<u>No 2</u>
Τάξη : Β΄ Λυκείου Μάθημα : Μαθηματικά Κεφάλαιο : 2 ^ο Διδακτική ενότητα : 2 ^η Ημερομηνία : 28-11-2018 Διδάσκων καθηγητής : Ηλίας Ράιδος	

ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

1. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

1. Τι γνωρίζεται για την γενική μορφή εξίσωσης ευθείας;
2. Πότε η ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη σε διάνυσμα ;

2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του μ η εξίσωση $(\mu-1)x+\mu y+\mu^2=0$ παριστάνει ευθεία γραμμή. Πότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, πότε προς τον $y'y$ και πότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων;
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x-3y+6=0$. Ποιο είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών;
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $2x-5y+3=0$ και $x-3y-7=0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4x+y=1$.
4. Τα σημεία $A(-4,6)$ και $\Gamma(-1,1)$ είναι οι απέναντι κορυφές ενός παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$. Οι πλευρές $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ του παραλληλόγραμμου ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $x+3y=2$ και $x-y+2=0$ αντιστοίχως. Να υπολογίσετε:
 - (i) Τις συντεταγμένες της κορυφής Δ .
 - (ii) Το συνημίτονο της οξείας γωνίας των διαγωνίων του παραλληλόγραμμου.
5. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$, ώστε οι ευθείες $(\lambda-1)x+\lambda y+8=0$ και $\lambda x+3y+1-2\lambda=0$ να είναι κάθετες.
6. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbf{R}$, ώστε η ευθεία $3x+3y+\kappa=0$ να διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $3x+4y+6=0$ και $6x+5y-9=0$.

ΕΠΙΠΕΔΟ 2^ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Είναι σωστό ή λάθος ότι
Δύο ευθείες παράλληλες προς τα
διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (A, B)$ και $\vec{\delta}_2 =$
 $(-B, A)$ αντίστοιχα είναι μεταξύ
τους κάθετες.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Αληθεύει ότι σε
Η εξίσωση $(a+1)x+(a^2-1)y+10=0$, $a \in \mathbf{R}$
παριστάνει πάντοτε ευθεία;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Είναι σωστό ή λάθος ότι
Η εξίσωση $y-2=\lambda(x-3)$, $\lambda \in \mathbf{R}$
παριστάνει για τις διάφορες τιμές του λ
όλες τις ευθείες που διέρχονται από το
σημείο $A(3, 2)$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Είναι σωστό ή λάθος ότι
Μια ευθεία κάθετη στο
διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$ με
 $B \neq 0$ έχει εξίσωση της
μορφής: $Ax + By + \Gamma = 0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η

Είναι σωστό ή λάθος ότι
Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$
είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, -B)$.

2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ – ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ-ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μια γραμμή τα στοιχεία των δυο στηλών.

Αντιστοίχιση :

Στήλη (Α) Ευθεία	Στήλη (Β) Συντελεστής Διεύθυνσης
$y=2x+1$	2
$3y-2x+1=0$	3/5
$2-3x+5y=2$	4/3
$3x-3y-2=x$	2/3

Συμπλήρωση κενού :

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

ευθεία	κλίση ευθείας	σχετική θέση ευθείας ως προς $x'x$	σχετική θέση ευθείας ως προς $y'y$
$y = 3$			
$x = 2$			
$y = 2x - 1$			

Να γράψετε σε μια σειρά τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών:

$$\epsilon_1: y = -2x + 5$$

$$\epsilon_2: 5x - 3y + 7 = 0$$

$$\epsilon_3: y = \epsilon\phi \frac{\pi}{3} x + 4$$

$$\epsilon_4: \text{παράλληλη με το διάνυσμα } \vec{\delta}_1 = (2, 7)$$

$$\epsilon_5: \text{κάθετη στο διάνυσμα } \vec{\delta}_2 = (\sqrt{3}, 1)$$

$$\epsilon_6: y + (\eta\mu\alpha) x + 5 = 0$$

ώστε καθένας να είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του.

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Οι ευθείες $2x-y-4=0$ και $x-3y+3=0$ τέμνονται στο σημείο:

Α Α(2,0).

Β Β(0,1).

Γ Γ(3,2)

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Αν η ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης, τότε συμπεραίνουμε ότι:

Α $\Gamma=0$

Β $B \neq 0$.

Γ $A \neq 0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Μια ευθεία κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : y = x$ είναι η :

Α $x+y=8$

Β $y=-2x$.

Γ $x=-1$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Οι ευθείες $2x+y+2=0$ και $2x-y+2=0$, είναι:

Α Παράλληλες.

Β Κάθετες.

Γ Συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντα ευθεία με

Α $|A| + |B| > 0$.

Β $\Gamma \cdot A^2 + B^2 \geq 0$.

Γ $A = 0$ και $B = 0$.

4. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: ΟΤΑΝ...

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε.....

με όταν.....

Ερώτηση α)

..... η ευθεία $2x-3y+1=0$ είναι
παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} (2,3)$

Ερώτηση β)

..... η ευθεία $-x+4y+12=0$ είναι
κάθετη στο διάνυσμα $\vec{a} (2,3)$

Ερώτηση γ)

..... η εξίσωση $Ax+B\psi+\Gamma=0$
παριστάνει ευθεία;

Ερώτηση δ)

..... η ευθεία $Ax+B\psi+\Gamma=0$
είναι παράλληλη στο διάνυσμα
 $\delta = (\alpha,\beta)$

Ερώτηση ε)

..... η ευθεία $Ax+B\psi+\Gamma=0$
είναι κάθετη στο διάνυσμα
 $\delta = (\alpha,\beta)$

5. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Διατυπώσεις των θεμάτων.

A. Βασικές ασκήσεις σχολικού βιβλίου

1. Να σχεδιάσετε τις γραμμές τις οποίες παριστάνουν οι εξισώσεις:

(i) $x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0$ (ii) $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$.

2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της μορφής

$$(2a^2 + a + 3)x + (a^2 - a + 1)y + (3a + 1) = 0, \quad a \in \mathbf{R}$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο.

3. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $x + 4y = 5$, $3x - 2y = 1$ και $7x - 8y + 1 = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

4. Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι ευθείες $y = \mu x$ και $(1 + \mu)x = (1 - \mu)y$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο τομής των ευθειών $\frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} = 1$ και $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{a} = 1$.

6. Δίνεται η ευθεία $3x + y = 3$ και το σημείο $A(1, 2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του A στην ευθεία αυτή.

7. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία είναι κάθετη στην ε στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

6. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Να εξετάσετε αν η ευθεία $2\lambda x + 2\lambda y + 5\lambda = 3y - x + 7$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x \sin^2 \frac{\theta}{2} + y \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin \theta - 1 = 0$, $\theta \in [0, \pi]$ παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.
3. Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3)x - (\lambda^2 + \lambda - 2)y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$ (1)
Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει ευθεία;
4. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\lambda - 1, 2\lambda + 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο αυτών ευθειών.
6. Να εξετάσετε αν η ευθεία $x + 1998y = 4$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών που έχει εξίσωση $(x + y - 4) + \lambda(x - 3y - 4) = 0$.

7. ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

11. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) αν:
 - α. διέρχεται απ' το σημείο $A(-1, 2)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο σταθερού εμβαδού $E = 3$ τ.μ.
 - β. διέρχεται απ' το σημείο $A(-1, 0)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο σταθερού εμβαδού $E = \sqrt{2}$ τ.μ.
12. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) αν:
 - α. διέρχεται απ' το σημείο $A(3, -1)$ και απέχει απόσταση $d = \sqrt{2}$ από το σημείο $B(2, 2)$.

β. διέρχεται απ' το σημείο $A (2, 1)$ και απέχει απόσταση $d = 1$ από το σημείο $B (0, 0)$.

13. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και είναι:

- α.** παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y + 1 = 0$.
- β.** κάθετη προς την ευθεία $3x - y + 5 = 0$.
- γ.** διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- δ.** παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- ε.** παράλληλη στον άξονα $y'y$.
- στ.** παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.
- ζ.** παράλληλη στη $y = -x$.
- η.** σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 32 τ.μ.

14. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία (ϵ) : $2x - 3y - 12 = 0$ και ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 12 τ.μ.

15. Έστω οι ευθείες (ϵ_1) : $2x - 3y + 1 = 0$, (ϵ_2) : $-x + 4y + 3 = 0$ και το σημείο $A (1, -2)$. Να βρεθεί σημείο M της ϵ_1 , ώστε το μέσο του AM να ανήκει στην ϵ_2 .

16. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών που βρήκατε;

17. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A (-1, 2)$, $B (3, -2)$ και $\Gamma (1, 4)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες:

- α.** του ορθόκεντρου
- β.** του βαρύκεντρου
- γ.** του έκκεντρου
- δ.** του περίκεντρου

18. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, η κορυφή του $A (1, 2)$ και οι εξισώσεις: $x - 3y + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

19. Να βρείτε για ποιες τιμές του φ τα σημεία $A (\kappa \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi , \lambda \cdot \eta\mu\varphi)$, $B (\kappa \cdot \eta\mu\varphi , \lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi)$ και $\Gamma (\kappa , \lambda)$, με $\kappa , \lambda \in \mathbb{R}^*$ και $0 < \varphi < \pi$, είναι συνευθειακά.

- 20.** Φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $\Sigma (2, 3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M (1, 1)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης ακτίνας.

Παραμετρικές

- 21.** Να βρείτε τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων, ώστε καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις να είναι εξίσωση ευθείας:

α. $(\lambda^2 - 4)x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y + 5 - \lambda = 0$

β. $(\alpha^2 - \alpha - \beta + 1)x + (\beta^2 - \beta - \alpha + 1)y + \alpha\beta + 1 = 0$

γ. $(\lambda^2 - 2)x - (\lambda^2 + 2\lambda - 3)y + \lambda^2 - 9 = 0$

- 22.** Για ποιες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $(\varepsilon_1) : (\mu + 1)x - 2\mu y = \lambda$ και $(\varepsilon_2) : (\mu - 1)x - 3y = 2\lambda - 1$:

α. τέμνονται.

β. είναι παράλληλες.

γ. συμπίπτουν.

- 23.** Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) : (\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$ και $(\varepsilon_2) : \mu x - (3\mu + 2)y + 7 = 0$. Να βρείτε το μ , ώστε η γωνία των ε_1 και ε_2 να είναι ορθή.

- 24.** Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι ευθείες, που περιγράφονται από την αντίστοιχη εξίσωση, διέρχονται από σταθερό σημείο για κάθε τιμή των παραμέτρων:

α. $(x + y - 5) + \lambda (2x + y - 7) = 0$

β. $(\lambda^2 + 3\lambda - 2)x + (2\lambda^2 + 3\lambda - 1)y = 7\lambda^2 + 12\lambda - 5$

γ. $(3\lambda^2 + \lambda + 2)x - (5\lambda^2 + \lambda + 1)y + 7\lambda^2 + \lambda = 0$

δ. $ax + \beta y + \gamma = 0$ με $\alpha + \beta + \gamma = 0$

- 25.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma\alpha)x + (\gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma)y + 2\alpha\beta\gamma = 0$$

με $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \neq 0$, παριστάνει ευθεία γραμμή.

26. Δίνονται οι εξισώσεις ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$(\varepsilon) : (\lambda + 1)x + (\lambda - 4)y + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$$

α. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν ευθεία, για κάθε τιμή του λ .

β. Να βρείτε τις τιμές του λ , έτσι ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες.

γ. Για ποιες τιμές του λ η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

δ. Για ποιες τιμές του λ η (ε) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$;

ε. Να αποδείξετε ότι η (λ) διέρχεται από σταθερό σημείο.

27. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $M(\lambda - 2, \lambda + 2), \lambda \in \mathbb{R}$

β. $M(2, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

γ. $M(2, \lambda^2 + 1), \lambda \in \mathbb{R}$

δ. $M(2, \eta \mu t), t \in \mathbb{R}$

28. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο αυτών ευθειών.

29. Να εξετάσετε αν η ευθεία $x + 1998y = 4$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών που έχει εξίσωση: $(x + y - 4) + \lambda(x - 3y - 4) = 0$.

30. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(5, 3), B(0, 0)$ και $\Gamma(6, 0)$. Φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει τις ευθείες AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Δ , αντιστοίχως. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο τομής των $B\Delta$ και ΓE .

31. Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι $\Pi_1(t - 1, t + 2)$ και $\Pi_2(3t, 3t - 1)$ για κάθε χρονική στιγμή t με $t > 0$.

α. Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.

β. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t , στις οποίες τα δύο πλοία συναντώνται.

γ. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 3$.

32. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y - \lambda^2 - 2\lambda - \gamma = 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.
- β.** Αν $\gamma = -1$, να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- γ.** Αν $\gamma \neq -1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μια ευθεία, η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση.