



## ΩΡΙΑΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

στα

Μαθηματικά

1<sup>ο</sup> ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x - \beta}$  όπου  $\alpha, \beta$  ακέραιοι αριθμοί. Η  $f$  στο σημείο  $A(-2, \frac{5}{12})$  δέχεται εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης  $5/18$ .
- Δ1.** Να δείξετε ότι  $\alpha=1$  και  $\beta=4$ .
- Δ2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- Δ3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .
- Δ4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $kx^3 + (1-4k)x^2 - x + 4 = 0$  (1) είναι ισοδύναμη με την  $f(x)=k, k \in \mathbb{R}$  και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του  $k \in \mathbb{R}$ .
2. Να μελετηθούν ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής οι συναρτήσεις:
- i)**  $f(x) = x^2 + 2\ln x$ ,      **ii)**  $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ ,      **iii)**  $h(x) = e^x(x^2 + 1)$ ,      **iv)**  $\varphi(x) = \ln(x^2 + 1)$ ,  
**v)**  $f(x) = x^2 \ln x - x^2 + 3$ ,      **vi)**  $f(x) = e^x \sin x$  στο  $[\pi, 2\pi]$ ,
3. **i)** Δίνεται η  $f(x) = 2x^4 + 4ax^3 + 3(4a-3)x^2 + 1$ . Να βρείτε το  $a$  ώστε η  $f$  να είναι κυρτή.  
**ii)** Ομοίως η  $f(x) = (a-2)x^4 + 8x^3 + 6(a+1)x^2 + 2a + 3$  να είναι κοίλη.
4. Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη, της οποίας το  $A(x_0, 0)$  είναι τοπικό ακρότατο το  $0$  και ικανοποιεί τη σχέση  $f''(x) > 4[f'(x) - f(x)]$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- α)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x)e^{-2x}$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .  
**β)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
5. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $(0, +\infty)$ . Να δείξετε ότι η  $g(x) = \ln f(x)$  στρέφει τα κοίλα άνω αν  $f(x)f''(x) > [f'(x)]^2$ .
6. Έστω  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ . Αν για κάθε  $x, x_0 \in (\alpha, \beta), x \neq x_0$  ισχύει  $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0$ , να δείξετε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα άνω στο  $(\alpha, \beta)$ .
7. Αν η  $f$  στρέφει τα κοίλα άνω σε διάστημα  $\Delta$  και η  $g$  στρέφει τα κοίλα άνω στο  $f(\Delta)$  και είναι αύξουσα, να δείξετε ότι η  $g \circ f$  στρέφει τα κοίλα άνω στο  $\Delta$ .

Εύχομαι επιτυχία στον στόχο σας!!!!!!!!!!!!!!