



ΩΡΙΑΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

στα

Μαθηματικά

1^ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

1. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη .
- β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα .
- γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x' , σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x \ln x - (e+1)x$. Να δείξετε ότι η f είναι αύξουσα για $x \geq 1$ και φθίνουσα για $x \leq 1$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \ln x - 1$, $x > 0$.
- Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.
4. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $2xf(x) + x^2[f'(x) - 3] = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 1/2$. Να αποδείξετε ότι:
- α) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$
- β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(5(x^2+1)^3 - 8) \leq f(8(x^2+1)^2)$.
5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$. Να αποδείξετε ότι:
- α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.
- β) Η εξίσωση $f(x^3 - x + 1) = f(2)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x-1} + ax$ με $x \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε το a , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2, f(2))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x - 3y + 6 = 0$.
- β) Αν $a = 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x \in \mathbf{R}$ και η $g(x)=x^3+\frac{3x^2}{2}-1$.

Γ1. Να μελετήσετε την μονοτονία της f .

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x))=1$.

Εύχομαι επιτυχία στον στόχο σας!!!!!!!!!!!!!!!