



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Υπουργείο Παιδείας,

Έρευνας και Θρησκευμάτων



ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ

ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1^ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 2^ο

Πολυωνυμικές

εξισώσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ 2^Η

Πολυωνυμικές

εξισώσεις

ΕΠΙΠΕΔΟ 1^ο

α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

ΕΡΩΤΗΣΗ 1^η: Τι λέγεται πολωνυμική εξίσωση n βαθμού;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2^η: Τι λέγεται ρίζα μιας πολωνυμικής εξίσωσης n βαθμού;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3^η: : Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα των ρητών ριζών πολωνυμικής εξίσωσης;

ΕΡΩΤΗΣΗ 4^η: : Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα των άρρητων ριζών πολωνυμικής εξίσωσης;

ΕΡΩΤΗΣΗ 5^η: Τι λέγεται πολωνυμική ανίσωση;

ΕΡΩΤΗΣΗ 6^η: Πως επιλύεται μια διτετράγωνη εξίσωση της μορφής
 $\alpha\chi^4 + \beta\chi^2 + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$;

β) Ερωτήσεις θεωρίας για τα κριτήρια αξιολόγησης

ΕΡΩΤΗΣΗ 7^η: Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα των ακεραίων ριζών πολωνυμικής εξίσωσης;

ΕΡΩΤΗΣΗ 8^η: Διατυπώστε το θεώρημα για προσδιορισμό ρίζας με προσέγγιση (Θεώρημα του BOLZANO)

Β. ΠΑΡΑΔΕΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

1. Να επιλύσετε τις εξισώσεις

α) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

β) $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$

2. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων

α) $x^3 - 10x - 12 = 0$

β) $3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 = 0$

3. Να επιλύσετε την ανίσωση

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 > 0$$

4. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 16x - 12 \text{ έχει παράγοντες τους } x+1 \text{ και } x-2 .$$

Στη συνέχεια να επιλύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

5. Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5 dm και 9 dm κόβουμε ίσα τετράγωνα από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις πλευρές του. Να βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού, αν είναι γνωστό ότι αυτές εκφράζονται σε dm με ακέραιους αριθμούς και ακόμη ότι ο όγκος του είναι 21 dm^3 .

β) Συμπληρωματικά παραδείγματα και εφαρμογές.

6. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=3x^4+x^3-2λx+2$.

ι) Να προσδιορίσετε το $λ$ ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x-1$.

ιι) Για ποια τιμή του $λ$ το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$: $(x+1)$ είναι το -2 .

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5+4x+2 = 0$ δεν έχει ρητή ρίζα.

8. Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^4-3x^3-17x+27x-9 = 0$

β) $x^3+6x^2+12x+8 = 0$

9. Να προσδιορίσετε τα $α,β$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^4+2x^3-7x^2+αx+β$ να έχει παράγοντες του $x-1$ και $x+3$.

10. Να βρεθεί μία ρίζα της εξίσωσης $x^3+5x-3 = 0$ στο διάστημα $(0,10$ με προσέγγιση δεκάτου.

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Που είναι χρήσιμο το θεώρημα των ακέραιων ριζών;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Αν ο $\rho \in \mathbb{Z}^*$ είναι διαιρέτης του α_0 μιας πολωνυμικής εξίσωσης, τότε ο ρ είναι ρίζα της πολωνυμικής εξίσωσης.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Αν ο αριθμός μηδέν είναι ρίζα της πολωνυμικής εξίσωσης $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, τότε $a_0 = 0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Πόσες ρίζες έχει μια πολωνυμική εξίσωση n βαθμού;

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Αν μία πολωνυμική εξίσωση έχει ομόσημους συντελεστές, τότε δεν έχει θετική ρίζα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 6η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Ο αριθμός 1 είναι ρίζα μιας πολωνυμικής εξίσωσης όταν και μόνο όταν το άθροισμα των συντελεστών της είναι μηδέν.

2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
Πολυωνυμική εξίσωση	Οι διαιρέτες του σταθερού όρου a_0
Ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης	Με σχήμα HORNER
Πιθανές ακέραιες ρίζες	$a_n \chi^n + \dots + a_1 \chi + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$
Προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση	κ βαθμού
Προσδιορισμός ριζών εξισώσεων ανωτέρου του δευτέρου βαθμού	Θεώρημα Bolzano
Βαθμός της πολυωνυμικής εξίσωσης $a_n \chi^n + \beta_\kappa \chi^\kappa + \chi^2 + 3\chi + 1 = 0$, $a_n = 0$, $\beta_\kappa \neq 0$	$P(\rho) = 0$

Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις.

- α) Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζεται κάθε.....
.....
- β) Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι της εξίσωσης, τότε
είναι διαιρέτης
- γ) Όταν ο ακριβής προσδιορισμός των ριζών μιας είναι δύσκολος ή
αδύνατος τότε οι ρίζες αυτές.

Διατάξτε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

Βρείτε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων και διατάξτε τις από την μεγαλύτερη στην μικρότερη.

α) $\chi^3 - 8\chi^2 + 12\chi = 0$, $\chi^3 - 2\chi^2 - 7\chi + 2 = 0$, $\chi^3 + 1 = 0$

β) $6\chi^4 + 5\chi^3 - 38\chi^2 + 5\chi + 6 = 0$, $\chi^2 - 3\chi + 2 = 0$, $\chi^{12} + 1 = 0$.

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης είναι

Α κάθε αριθμός ρ .

Β πάντοτε η μονάδα.

Γ ο αριθμός ρ που την ικανοποιεί.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Σε μια πολυωνυμική εξίσωση η ρίζα της ρ είναι διαιρέτης του σταθερού της όρου α_0 , όταν οι συντελεστές της εξίσωσης είναι αριθμοί

Α πραγματικοί

Β ρητοί

Γ ακέραιοι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Ο προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση γίνεται επειδή η εξίσωση

Α είναι αδύνατη να επιλυθεί με τους γνωστούς τρόπους.

Β δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Γ έχει μόνο ρίζες ακέραιες

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Έστω πολυώνυμο $P(x)$. Η ανίσωση $P(x) > 0$ έχει

Α περισσότερες λύσεις από την εξίσωση $P(x)=0$.

Β ίσες λύσεις με τις λύσεις της $P(x)=0$

Γ λιγότερες λύσεις από τις λύσεις της $P(x)=0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν

Α $f(x) = 0$

Β $f(x) > 0$

Γ $f(x) < 0$.

4.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε.....

με όταν...

Ερώτηση α)

..... ένας αριθμός ρ είναι ρίζα μιας πολωνυμικής εξίσωσης;

Ερώτηση β)

..... εφαρμόζεται το θεώρημα των ακέραιων ριζών ;

Ερώτηση γ)

.....ο αριθμός 0 είναι ρίζα μιας πολωνυμικής εξίσωσης;

Ερώτηση δ)

..... ο αριθμός 1 είναι ρίζα μιας πολωνυμικής εξίσωσης;

Ερώτηση ε)

.....η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = P(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$;

Ερώτηση στ)

..... η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$;

5.ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ**Διατυπώσεις των θεμάτων.**

11. Να επιλύσετε τις εξισώσεις

α) $\chi^3 + 8 = 7(\chi^2 + \chi + 6) + 9\chi^2 - 36$

β) $\chi^4 - 3\chi^3 + 6\chi - 4 = 0$

12. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες.

α) $\chi^4 + 3\chi - 2 = 0$

β) $2\chi^4 - 3\chi^3 + 6\chi^2 - 24\chi + 5 = 0$

13. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $\chi' \chi$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 4\chi^3 - 3\chi - 1$

14. Σε χρόνο t δευτερολέπτων μετά την πρόσκρουση αυτοκινήτου στο κιγκλίδωμα του δρόμου, η παραμόρφωση d cm του κιγκλιδώματος δίνεται από τον τύπο $d = 15t(t^3 - 6t - 9)$. Σε πόσο χρόνο μετά την πρόσκρουση η μπάρα του κιγκλιδώματος θα επανέλθει στην αρχική της θέση;

15. Δίνεται κύβος με ακμή χ m. Πάνω του ακριβώς εφαρμόζεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ύψους 1 m. Αν ο συνολικός όγκος των δύο σχημάτων είναι 36 cm^3 , να βρείτε την ακμή χ του κύβου.

6.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

16. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A(1,2) και B($\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$)
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία του α) ερωτήματος τέμνει την καμπύλη $\psi = \chi^3 + \chi^2$ για τα χ που είναι ρίζες της εξίσωσης $\chi^3 + \chi^2 - 5\chi + 3 = 0$ (1).
- γ) Να επιλύσετε την εξίσωση (1) και να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.
17. α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(\chi) = \chi^4 - (\lambda - 1)\chi^3 - \lambda\chi - 4$ έχει παράγοντα το $\chi + 1$.
- β) Τα πολυώνυμα που θα προκύψουν για τις τιμές του λ που θα βρείτε, να τα γράψετε ως γινόμενα παραγόντων.
18. Η εξίσωση $\alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta = 0$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}^*$) έχει ρίζα τον ακέραιο ρ . Αν είναι $\alpha\rho^2 + \gamma = 0$, να βρείτε τις άλλες δύο ρητές ρίζες της εξίσωσης.
19. Ένα πακέτο σχήματος παραλληλεπίπεδου, για να σταλεί με το ταχυδρομείο, πρέπει το άθροισμα του μήκους του με την περίμετρο μιας κάθετης τομής να μην υπερβαίνει τα 108 cm. Να βρείτε τις διαστάσεις του πακέτου, αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι 11664 cm³.
20. Ένα παγόβουνο μετακινείται από την Ανταρκτική προς την Αφρική. Αν ο όγκος του V μετά από n ημέρες δίνεται από τον τύπο $V = \frac{500\pi}{3} (2000 - 100n + 20n^2 - n^3)$, να βρείτε μετά πόσο χρόνο το παγόβουνο θα λιώσει τελείως.