



ΜΑΘΗΜΑ 3^ο

Επανάληψη

7^ο

κεφαλαίου

Το

27^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

M_1 : Για να μελετήσουμε τη μονοτονία (μεταβολή της $f(x)$) μιας συνάρτησης f ακολουθούμε μια από τις παρακάτω διαδικασίες:

1^η Διαδικασία

Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι απλός, ξεκινούμε από τη σχέση $x_1 < x_2$ και με επιτρεπτούς μετασχηματισμούς προσπαθούμε να βρούμε ποια σχέση συνδέει τα $f(x_1)$, $f(x_2)$.

2^η Διαδικασία

Σχηματίζουμε λόγο $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

αν $\lambda > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα
αν $\lambda < 0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα

3^η Διαδικασία

Αν η συνάρτηση είναι πολλαπλού τύπου εξετάζουμε τη μονοτονία κάθε τύπου χωριστά

4^η Διαδικασία

Αν ο τύπος μιας συνάρτησης έχει απόλυτα και θέλουμε να την μελετήσουμε ως προς την μονοτονία, διώχνουμε τα απόλυτα μετασχηματίζοντας τον τύπο της σε πολλαπλό.

5^η Διαδικασία

Μια συνάρτηση εξετάζεται ως προς τη μονοτονία σε “συνεχή” υποσύνολα του \mathbb{R} . Αν το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης είναι «διακοπτόμενο», τότε η μελέτη της μονοτονίας γίνεται στα συνεχή υποσύνολα του A .

6^η Διαδικασία

Όταν λέμε “να εξεταστεί μια συνάρτηση ως προς την μονοτονία” εννοούμε στο πεδίο ορισμού της εκτός αν καθορίζεται διάστημα Δ στο οποίο πρέπει να γίνει η μελέτη της μονοτονίας.

Παράδειγμα

Επίλυση

Εφαρμογή 1η από τον μαθητή

M_2 : Για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης f ορισμένης στο διάστημα A ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία

Παράδειγμα**Επίλυση****Εφαρμογή 1η από τον μαθητή**

M_3 : Για να δείξουμε ότι δύο συναρτήσεις f, g είναι αντίθετες αρκεί να δειθχεί ότι;

- α) Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού
- β) Για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x)+g(x)=0$

Παράδειγμα**Επίλυση****Εφαρμογή 1η από τον μαθητή**

M_4 : Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης f της μορφής $f(x)=ax^2$ πρέπει να γνωρίζουμε τα παρακάτω:

α) Όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα προς το $+\infty$ τότε και το x μεγαλώνει γρηγορότερα απεριόριστα προς το $+\infty$, δηλαδή:

Για $x \rightarrow +\infty$ τότε $x^2 \rightarrow +\infty$

Για x τείνει προς το $+\infty$ τότε x^2 τείνει προς το $+\infty$

β) Ανάλογα ισχύει για $x \rightarrow -\infty$ τότε $x^2 \rightarrow +\infty$

γ) Αν $a > 0$ τότε για $x \rightarrow +\infty$ ή $x \rightarrow -\infty$ έχουμε $ax^2 \rightarrow +\infty$

δ) Αν $a < 0$ τότε για $x \rightarrow +\infty$ ή $x \rightarrow -\infty$ έχουμε $ax^2 \rightarrow -\infty$

M_5 : Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ πρέπει να γνωρίζουμε τα παρακάτω:

α) Όταν το x τείνει στο 0 από αριστερά τότε το $\frac{1}{x}$ τείνει στο $-\infty$

δηλαδή για $x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$

β) Ανάλογα ισχύει για $x \rightarrow +\infty$ τότε $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$

γ) Όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα προς το $+\infty$ τότε το $\frac{1}{x}$ πλησιάζει προς το μηδέν δηλαδή:

Για $x \rightarrow +\infty$ τότε $\frac{1}{x} \rightarrow 0$

δ) Όταν το x πλησιάζει απεριόριστα προς το $-\infty$ δηλαδή:

Για $x \rightarrow -\infty$ τότε $\frac{1}{x} \rightarrow 0$

ε) Αν $\alpha > 0$ τότε τα παραπάνω συμπεράσματα διατηρούν τα πρόσημά τους.

στ) Αν $\alpha < 0$ τότε τα παραπάνω συμπεράσματα αντιστρέφουν τα πρόσημά τους.

Παράδειγμα

Επίλυση

Εφαρμογή 1η από τον μαθητή

M_6 : Για να δείξουμε ότι μια ευθεία $x=a$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη αρκεί να δείξουμε ότι καθώς ο x πλησιάζει στο a από αριστερά ή από δεξιά τότε η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπέσει με τον άξονα $x=a$.

Παράδειγμα

Επίλυση

Εφαρμογή 1η από τον μαθητή

M_7 : Για να δείξουμε ότι μια ευθεία $y=a$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη αρκεί να δείξουμε ότι καθώς ο x απομακρύνεται προς το $+\infty$ τότε η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπίσει με τον άξονα $y=a$.

Παράδειγμα

Επίλυση

Εφαρμογή 1η από τον μαθητή

M_8 : Για να μελετήσουμε μια συνάρτηση f ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της A
2. Αναζητούμε συμμετρίες εξετάζοντας αν η f είναι άρτια ή περιττή.
3. Εξετάζουμε τη μονοτονία της στο πεδίο ορισμού της A (γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα)
4. Αναζητούμε τα ακρότατά της (ελάχιστο-μέγιστο)
5. Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της f για απολύτως μεγάλη τιμή του x δηλαδή για $x \rightarrow +\infty$ και $x \rightarrow -\infty$ καθώς επίσης και το σημείο τομής της με τους άξονες
6. Κάνουμε πίνακα τιμών της f της μορφής:

x	Πεδίο ορισμού
$f(x)$	Μονοτονία-Ακρότατα-Οριακές τιμές

7. Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f

Παράδειγμα

Επίλυση

Εφαρμογή 1η από τον μαθητή

