

ΜΑΘΗΜΑ 2^ο

Η συνάρτηση

$$F(x)=\alpha/x$$

Το

25^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

ΕΡΩΤΗΣΗ 1^η: Τι λέγεται υπερβολή ;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2^η: Τι λέγεται ισοσκελής υπερβολή;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3^η: Τι λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\alpha}{\chi} ;$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4^η: Τι λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\alpha}{\chi} ;$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5^η: Ποια είναι η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha}{\chi}$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 6^η: Ποια είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες;

ΕΡΩΤΗΣΗ 7^η: Ποια είναι η διαδικασία για τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha}{\chi}$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 8^η: Τι σημαίνει η έκφραση « ο χ τείνει στο $+\infty$ » και πως συμβολίζεται;

ΕΡΩΤΗΣΗ 9^η: Τι σημαίνει η έκφραση « ο χ τείνει στο $-\infty$ » και πως συμβολίζεται;

ΕΡΩΤΗΣΗ 10^η: Τι σημαίνει η έκφραση « ο χ τείνει στο 0 από δεξιά » και πως συμβολίζεται;

ΕΡΩΤΗΣΗ 11^η: Τι σημαίνει η έκφραση « ο χ τείνει στο 0 από αριστερά » και πως συμβολίζεται;

Β. ΠΑΡΑΔΕΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
5. Να εξεταστούν ως προς την μονοτονία στα αντίστοιχα διαστήματα οι συναρτήσεις f με
 - α) $f(x) = -5/x$
 - β) $f(x) = 3/x$

β) Συμπληρωματικά παραδείγματα και εφαρμογές.

6. Να εξεταστούν ως προς την μονοτονία στα αντίστοιχα διαστήματα οι συναρτήσεις f με
 - α) $f(x) = 3/|x|$
 - β) $f(x) = -2/|x|$

7. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = -4/x$, αν το πεδίο ορισμού της είναι το διάστημα $[1, 5]$. Στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση.

8. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (1-\lambda)x + 1999$ και $g(x) = \frac{16-\lambda^2}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί ο λ ώστε ταυτόχρονα η f να είναι γνησίως φθίνουσα και η g να είναι γνησίως αύξουσα.

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Ποια συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας τον $\psi\psi$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Ποια συνάρτηση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Ποιες συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $\chi\chi$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Μπορεί μια συνάρτηση να είναι άρτια και περιττή συγχρόνως; Αν ναι, ποια είναι η συνάρτηση;

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε όλα τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της A , τότε είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της A .

ΕΡΩΤΗΣΗ 6η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Η γραφική παράσταση της $f(\chi)=a\chi^2$ βρίσκεται πάνω στον άξονα $\chi\chi$;

2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β).
Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
Γνησίως μονότονη Ακρότατα Συμμετρίες Υπερβολή Παραβολή Γνησίως αύξουσα Σταθερή	Αρτια, περιττή Ασύμπτωτες Ελάχιστο , μέγιστο. $F(x)=ax^2, a \neq 0$ Γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα. $F(x)=\beta$ $F(x)=ax+\beta, a > 0$

Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις.

α) Η καμπύλη $F(x)=a/x, a \neq 0$ είναι

β) Ασύμπτωτες της συνάρτησης $F(x)=\frac{a}{x}, a \neq 0$ είναι

.....

Χρησιμοποιείτε τα σύμβολα της διάταξης για να συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις.

α) Αν η $f(x)=a/x, a \neq 0$ είναι γνησίως αύξουσα τότε a 0.

β) Για $x_1, x_2 \in A$ με x_1 $x_2 \Rightarrow f(x_1)$ $f(x_2)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

γ) Για $x_1, x_2 \in A$ με x_1 $x_2 \Rightarrow f(x_1)$ $f(x_2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Για ποιές τιμές του $\chi, \lambda \in \mathbb{R}$ οι συναρτήσεις $f(\chi) = \frac{3\chi-5}{\chi+2-\lambda}$ και $g(\chi) = \frac{5-3\chi}{\chi-3\lambda}$ είναι αντίθετες;

Α Για $\lambda \geq 0$

Β Για $\lambda = 0$

Γ Για $\lambda = -1$

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα σημεία $A(-4, -3)$, $B(-4, |\lambda^2 - 1|)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $\chi\chi$

Α Για $\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$

Β Για $\lambda > 0$

Γ Για $\lambda = 2$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi) = (\chi^2 - 9)\sqrt{2 - \chi}$;

Α Στα $A(0, 9\sqrt{2})$, $B(-3, 0)$ $\Gamma(2, 0)$

Β Στα $O(0, 0)$, $A(2, 0)$

Γ Στα $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$, $\Gamma(2, 0)$, $\Delta(0, -9\sqrt{2})$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\psi = (\lambda - 2)\chi + 1998$, $\psi = (\lambda^2 - 2\lambda)\chi - 1958$ είναι παράλληλες;

Α Για $\lambda = 0$ ή $\lambda = 2$

Β Για $\lambda = 2$

Γ Για $\lambda = 1998$ ή $\lambda = 1958$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Η συνάρτηση $f(\chi) = (1 - |\lambda|)\chi + 5$ είναι γνησίως αύξουσα, όταν

Α $\lambda \in (-1, 1)$

Β $\lambda \in (-\infty, -1)$

Γ $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$

4.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε.....

με όταν...

Ερώτηση α)

..... η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $\psi\psi$;

Ερώτηση β)

..... η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή O των αξόνων;

Ερώτηση γ)

..... η συνάρτηση $f(x)=ax^2$ παρουσιάζει μέγιστο;

Ερώτηση δ)

.....η συνάρτηση $f(x)=\frac{a}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$;

Ερώτηση ε)

.....οι κλάδοι μιας ισοσκελούς υπερβολής βρίσκονται στο 1° και το 3° τεταρτημόριο;

5.ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Διατυπώσεις των θεμάτων.

11.1 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία στα αντίστοιχα διαστήματα τις συναρτήσεις f με

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} -5x, & \text{αν } x < 2 \\ 5x-2004, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} \text{ στα } (-\infty, 0), (10, +\infty)$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 0 \\ -5x^3+1999, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \text{ στα } (-5,-1), (12,1453)$$

12 Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f με $f(x)=(3-|\lambda|) / x$, με $\lambda \neq \pm 2$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -5/x + 4$.

- α) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα.
β) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

14. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=(2\lambda+3) / x$ διέρχεται από το σημείο A(1,-5), να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $g(x) = \frac{|5\lambda-2|}{x}$.

15. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A=90^\circ$) μεταβάλλεται , έτσι ώστε το εμβαδόν του να παραμένει σταθερό 2 τετραγωνικές μονάδες.

- Α) Να εκφράσετε το μήκος ψ της ΑΓ σε συνάρτηση του μήκους χ της ΑΒ και
β) να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

6.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

16. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ της εξίσωσης της παραβολής $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ που έχει κορυφή $K(1,0)$ με $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$ και η απόσταση του σημείου τομής της με τον άξονα $\psi'\psi$ από το K είναι $\sqrt{2}$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi-3}{\chi^2-5\chi+6}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της .

β) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να εξετάσετε την μονοτονία της στο $(2,3)$.

δ) Να επιλύσετε την εξίσωση $\left| \frac{1}{f(\chi)} \right| = 1$.

18. Να εξετάσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g με

$f(\chi) = \chi \cdot \sqrt{1-\chi^2}$, $g(\chi) = |\chi| \chi^2 + |\chi+1| + |\chi-1|$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $\psi'\psi$ ή ως προς την αρχή των αξόνων O .

19. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \sqrt{\chi}$ και το σημείο $B(3,0)$. Να βρεθεί το σημείο $M(\chi, \psi)$ της γραφικής παράστασης της f ώστε η απόσταση AB να είναι ελάχιστη και η οποία να βρεθεί.

20. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi) = \frac{1}{\chi}$, $\chi > 0$ και $g(\chi) = -\chi$.

Αν $M \in C_f$ και $N \in C_g$ έτσι ώστε MN κάθετη στον άξονα $\psi'\psi$, να βρεθεί για ποια τιμή του χ το MN παίρνει την μικρότερη δυνατή τιμή.

7.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών.
2. Να σχηματίσετε τον πίνακα τιμών παρατηρώντας τη γραφική παράσταση και να βρείτε τον τύπο που επαληθεύει την αλληλεξάρτησή τους.

ΛΥΣΗ

Από τα σημεία της γραφικής παράστασης σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών παρατηρώντας τις συντεταγμένες τους

x	1	3/2	2	3	4	6
y	6	4	3	2	3/2	1

Από τον πίνακα τιμών διαπιστώνουμε ότι το γινόμενο $x \cdot y$ των δύο μεγεθών παραμένει αμετάβλητο αφού $x \cdot y = 1 \cdot 6 = (3/2) \cdot 4 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 4 \cdot (3/2) = 6 \cdot 1 = 6$.

Άρα $x \cdot y = 6$ οπότε $y = 6/x$ με $x \neq 0$.

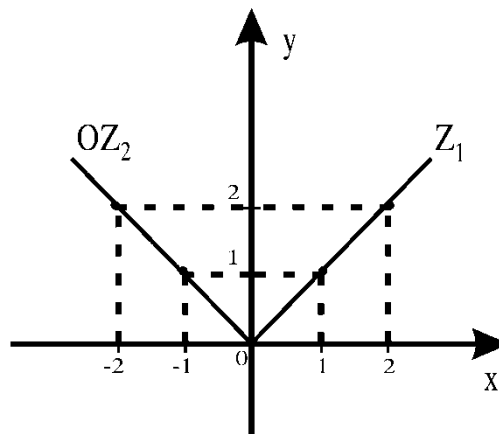
2. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = |x|$.

ΛΥΣΗ

Επειδή η παράσταση $|x|$ δίνει ένα πραγματικό αριθμό (και μάλιστα μη αρνητικό) για κάθε τιμή του x , το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το \mathbf{R} . Δίνοντας στη μεταβλητή x μερικές ενδεικτικές τιμές $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1$ και $x = 2$ σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

Όπως διαπιστώνουμε όταν $x \geq 0$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται $x = y$ και η γραφική παράσταση με $x \geq 0$ είναι η ημιευθεία OZ_1 που αποτελεί τη διχοτόμο της $1^{ης}$ γωνίας των αξόνων.



Όταν $x \leq 0$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται $y = -x$ και η γραφική της παράσταση με $x \leq 0$ είναι η ημιευθεία OZ_2 που αποτελεί τη διχοτόμο της $2^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

Έτσι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = |x|$ είναι οι δύο διχοτόμοι της $1^{ης}$ και $2^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2$ και $g(x) = 2x$. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα και να βρεθούν

οι τετμημένες των σημείων τομής τους. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$. Τι παρατηρείτε;

ΛΥΣΗ

Σχηματίζουμε δύο πίνακες με ενδεικτικές τιμές για τις συναρτήσεις που δόθηκαν:

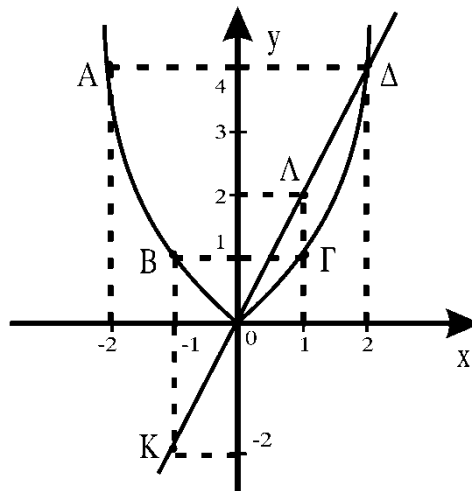
Για την $f(x)=x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Για την $g(x)=2x$

x	-1	0	2
y	-2	0	4

Από τους δύο πίνακες τιμών βρίσκουμε τα σημεία στο ορθογώνιο σύστημα. Η παραβολή $f(x)=x^2$ διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Ο, Γ και Δ, ενώ η ευθεία $g(x)=2x$ από τα Κ, Ο, Λ και Δ. Έτσι οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων έχουν κοινά τα σημεία Ο και Δ που έχουν τετμημένες $x=0$ και $x=2$ αντιστοίχως.



Απ' την εξίσωση $f(x)=g(x)$, έχουμε $x^2=2x$ ή $x(x-2)=0$. Έτσι

$x=0$ ή $x=2$. Όπως διαπιστώνουμε οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$, δηλαδή οι $x=0$ και $x=2$ είναι τετμημένες των σημείων τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

Ίσες συναρτήσεις

Από τον ορισμό της συνάρτησης γίνεται φανερό ότι:

Μια συνάρτηση προσδιορίζεται με ακρίβεια όχι όταν γνωρίζουμε μόνο τον τύπο της, αλλά όταν γνωρίζουμε ταυτόχρονα και το πεδίο ορισμού της.

Αυτό φαίνεται αν πάρουμε δύο συναρτήσεις f και g με τον ίδιο τύπο και με διαφορετικά πεδία ορισμού A_1 και A_2 αντίστοιχα. Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε την f με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$ και $A_1 = \{0, 1, 2, 4\}$, και την g με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$ και $A_2 = \{0, 1, 8, 9\}$.

Για την f έχουμε:

$$f(0) = \sqrt{0} = 0$$

$$f(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$f(2) = \sqrt{2} \cong 1,41$$

Για την g έχουμε:

$$g(0) = \sqrt{0} = 0$$

$$g(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$g(8) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \cong 2,82$$

$$f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$g(9) = \sqrt{9} = 3$$

Έτσι:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ με } A_1 = \{0, 1, 2, 4\}$$

$$g(x) = \sqrt{x} \text{ με } A_2 = \{0, 1, 8, 9\}$$

και $f(A_1) = \{0, 1, 1, 4, 2\}$

και $g(A_2) = \{0, 1, 2, 2, 8, 3\}$

x	0	1	2	4
f(x)	0	1	$\sqrt{2}$	2

x	0	1	8	9
g(x)	0	1	$2\sqrt{2}$	3

Όπως βλέπουμε τα διαφορετικά πεδία ορισμού για συναρτήσεις με τον ίδιο τύπο δεν μπορούν να δώσουν τα ίδια σύνολα τιμών και ίδιες γραφικές παραστάσεις.

Είναι φανερό ότι οι προηγούμενες συναρτήσεις ενώ έχουν τον ίδιο τύπο δεν είναι ίσες.

Παράλληλα διαπιστώνουμε ότι όχι μόνο η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης, αλλά και το σύνολο τιμών της εξαρτώνται τόσο από τον τύπο της συνάρτησης όσο και από το πεδίο ορισμού της.

Έτσι για την ισότητα δύο συναρτήσεων έχουμε τον εξής ορισμό:

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ισχύει $f(x)=g(x)$ για κάθε x του A.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h με τύπους $f(x)=x$, $g(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1}$ και

$$h(x) = \frac{x(x-1)}{x-1} \text{ αντιστοίχως;}$$

Ποιες απ' αυτές είναι ίσες;

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f έχει προφανώς πεδίο ορισμού το \mathbf{R} .

Στη συνάρτηση g αφού η παράσταση x^2+1 είναι διάφορη του μηδενός για κάθε πραγματική τιμή του x, ο τύπος της συνάρτησης γίνεται $g(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x$. Έτσι το πεδίο ορισμού της

g είναι πάλι το \mathbf{R} . Στον τύπο της συνάρτησης h πρέπει $x-1 \neq 0$ για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $\frac{x(x-1)}{x-1}$. Έτσι ο τύπος της h γράφεται

$$h(x) = \frac{x(x-1)}{x-1} = x \text{ με τον περιορισμό } x \neq 1. \text{ Άρα το πεδίο ορισμού της h είναι το } \mathbf{R} - \{1\}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι μόνο οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες αφού έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και $f(x)=g(x)$ για κάθε πραγματική τιμή του x.

2. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , οι οποίες έχουν κοινό τύπο $f(x) = x^2$, και τα πεδία ορισμού τους είναι αντίστοιχα :

i) $A_1 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

ii) $A_2 = [-3, 3]$

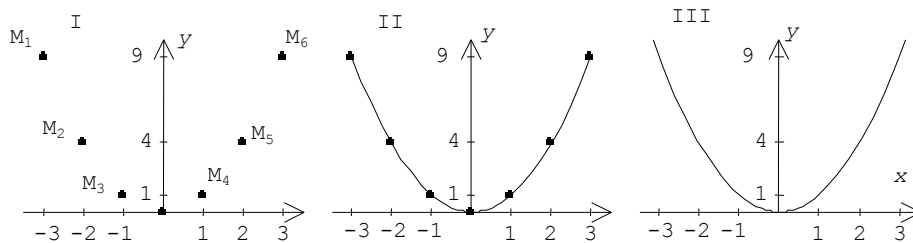
iii) $A_3 = \mathbb{R}$

Κατόπιν να βρεθεί το σύνολο τιμών $f(A)$ σε κάθε περίπτωση παρατηρώντας τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

ΛΥΣΗ

(i) Όταν $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ τότε με τη βοήθεια του τύπου έχουμε :

$$f(-3) = (-3)^2 = 9, f(-2) = (-2)^2 = 4, f(-1) = (-1)^2 = 1, f(0) = 0^2 = 0, f(1) = 1^2 = 1, f(2) = 2^2 = 4 \text{ και } f(3) = 3^2 = 9$$



Έτσι βρίσκουμε στο ορθογώνιο σύστημα (σχ. I) τα σημεία $M_1, M_2, M_3, 0, M_4, M_5$ και M_6 .

(ii) Αν $A = [-3, 3]$ τότε ενώνουμε τα προηγούμενα σημεία με μία συνεχή γραμμή αφού το x διατρέχει τις άπειρες τιμές του διαστήματος $[-3, 3]$, (σχ. II).

(iii) Αν $A = \mathbb{R}$, τότε η προηγούμενη γραμμή του σχήματος II, δεν έχει πέρατα αφού το x μπορεί να πάρει κάθε τιμή από το σύνολο \mathbb{R} .

Βλέποντας τις τεταγμένες των επτά σημείων στην πρώτη περίπτωση έχουμε :

$$M_1 \rightarrow 9 \quad \leftarrow M_6$$

$$M_2 \rightarrow 4 \quad \leftarrow M_5$$

$$M_3 \rightarrow 1 \quad \leftarrow M_4$$

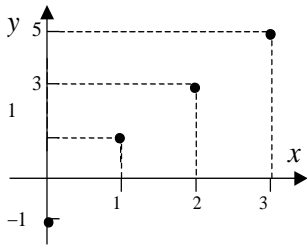
$$0 \rightarrow 0$$

$$\text{Άρα } f(A) = \{0, 1, 4, 9\}.$$

Στη δεύτερη περίπτωση οι τεταγμένες όλων των σημείων της γραφικής παράστασης είναι όλα τα σημεία του θετικού ημιάξονα Oy από το 0 έως το 9. Έτσι $f(A) = [0, 9]$. Είναι φανερό ότι στη τρίτη περίπτωση οι τεταγμένες όλων των σημείων της γραφικής παράστασης διατρέχουν όλο τον ημιάξονα Oy οπότε $f(A) = [0, +\infty)$.

8.ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

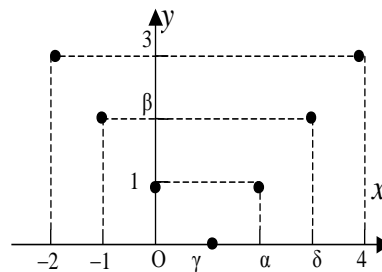
ΑΣΚΗΣΕΙΣ



1. Από τη διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης να σχηματίσετε ένα πίνακα τιμών και να βρείτε τον τύπο της.

2. Αν ο παρακάτω πίνακας τιμών και η διπλανή γραφική παράσταση αναφέρονται στην ίδια συνάρτηση να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ και δ .

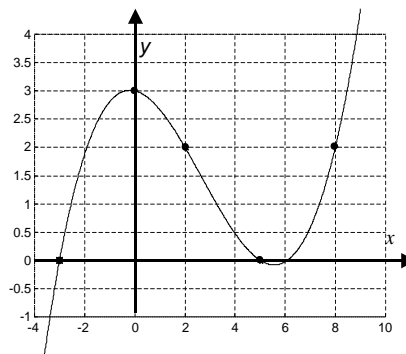
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3	2	1	0	1	β	δ



3. Αν στη γραφική παράσταση δύο μεταβαλλόμενων μεγεθών ανήκουν τα σημεία A και B με συντεταγμένες (-2,3) και (4,2) αντίστοιχα, να βρείτε τους αριθμούς α και β όταν ο τύπος έχει τη μορφή $y = \alpha \cdot x + \beta$.

4. Με τη βοήθεια της διπλανής γραφικής παράστασης να συμπληρώσετε τον πίνακα

x	0	-3	2	5	8
y					



5. Στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ανήκουν τα σημεία B(-2,3), Γ(0,-1), Δ(-2,0), Ε(-3,0) και Ζ(1,-1). Σε ποιους ημιάξονες και σε ποιες γωνίες βρίσκεται το καθένα;

6. Στο διπλανό σχήμα έχουν χαραχθεί οι δύο κλάδοι μιας υπερβολής.

i) Με τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Δ, Ε και Ζ να σχηματίσετε ένα πίνακα τιμών.

- ii) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f που έχει γραφική παράσταση αυτή την υπερβολή.
- iii) Για τις τιμές $x_1=10$, $x_2=100$ και $x_3=1000$ να βρείτε τις $f(x_1)$, $f(x_2)$, και $f(x_3)$. Όταν το x παίρνει απείρως μεγάλες τιμές προς ποίον ακέραιο εκτιμάτε ότι προσεγγίζουν οι τιμές της συνάρτησης;

7. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε το αντίστοιχο σημείο M να είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

i) $f(x)=x^2-2\lambda$, $M(-2, 8)$ ii) $g(x)=(\lambda-1)x^3$, $M(-3, 54)$

iii) $h(x)=\frac{\lambda}{\lambda-5}\sqrt{x+3}$, $M(6, 18)$ iv) $\phi(x)=\frac{\sqrt{\lambda-1}}{x}$, $M(4, 2)$

8. Να βρείτε τα πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που δίνονται με τους παρακάτω τύπους:

i) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ ii) $g(x)=\frac{x-1}{2x+3}$, iii) $h(x)=\sqrt{x+7}$

9. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}$ ii) $g(x)=\frac{(x+2)(x-3)}{3-x}$, iii) $h(x)=\sqrt{-\frac{1}{x}}$

10. Η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=ax+\beta$, a, β πραγματικοί αριθμοί και πεδίο ορισμού $A=\mathbf{R}$.

Αν $f(2)=2$ και $f(1)+f(4)=6$ να βρείτε τα a και β .

11. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x)=-\frac{12}{x}$.

12. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=1-\frac{1}{x}$ και $g(x)=\frac{x-1}{x}$ είναι ίσες.

13. Πόσες από τις συναρτήσεις με τύπους $f(x)=2x$, $g(x)=2|x|$ και $h(x)=\sqrt{4x^2}$ είναι ίσες;

14. Αν οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=\frac{4}{x}$ και $g(x)=x$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού $A=[1, 4]$, να κάνετε τις γραφικές τους παραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων και να βρείτε τα κοινά τους σημεία.

15. Στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους $f(x)=x^2$ και $g(x)=x$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων;
16. Να βρεθεί το ακρότατο, το σύνολο τιμών, και οι συντεταγμένες των κορυφών των παραβολών με τύπους $f(x)=-2x^2$, $g(x)=2x^2+3x$ και $h(x)=-x^2+4$. Που βρίσκονται οι κορυφές τους;
17. Για να περιφράξουμε ένα μέρος του κήπου μας σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου διαθέτουμε 14m συρματόπλεγμα.
- i) Αν x και y οι διαστάσεις του ορθογωνίου να εκφραστεί το εμβαδό του ως συνάρτηση του x .
- ii) Να βρεθεί ο x ώστε ο ορθογώνιος κήπος μας να έχει το μέγιστο εμβαδό. Τι παρατηρείτε στο σχήμα του κήπου και ποιο είναι το μέγιστο εμβαδό του;
18. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x)=x^2-4x+5$ και πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .
19. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x)=-x^2-4x-4$.
20. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x)=-x^2-2x+8$.
21. Να βρείτε σε ποια γωνία, ή σε ποιο ημιάξονα βρίσκονται οι κορυφές των παραβολών των τριωνύμων:
- i) $f(x)=-x^2+1$ ii) $g(x)=2x^2-2x$ iii) $h(x)=x(3-x)$
22. Να βρείτε το ακρότατο και το σύνολο τιμών στα παρακάτω τριώνυμα:
- i) $f(x)=4x^2$ ii) $g(x)=-x^2+7$ iii) $h(x)=x^2-3x+2$
23. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=2x^2$ στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα. Τι συμπέρασμα βγάξετε για το «άνοιγμα» του τόξου της παραβολής όταν ο συντελεστής a της $f(x)=ax^2$ μεγαλώνει με θετικές τιμές.

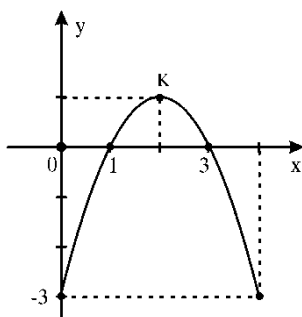
24. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $h(x)=\frac{1}{4}x^2$ στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα. Τι συμπέρασμα βγάζετε για το «άνοιγμα» του τόξου της παραβολής όταν ο συντελεστής a της $f(x)=ax^2$ μικραίνει με θετικές τιμές;
25. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους $f(x)=x^2-4$ και $g(x)=4-x^2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των δύο παραβολών;
26. Στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=2x-1$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. Τι συμπεραίνετε;
27. Στον παρακάτω πίνακα να συμπληρώσετε τα κενά για το πρόσημο της εξαρτημένης μεταβλητής y στην τριωνυμική συνάρτηση με τύπο $y=ax^2+bx+\gamma$ (θυμηθείτε τη θέση της παραβολής ως προς τον άξονα x').

$\Delta = 0$	$a > 0$	
	$a < 0$	$y \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$a > 0$	
	$a < 0$	

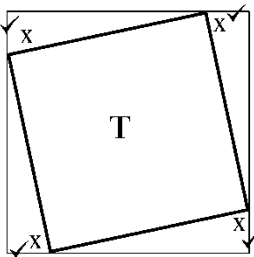
28. Να κένετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ ii) $h(x) = x^2 - 2x + 2$ iii) $g(x) = x^2 - 2x - 3$

29. Στο διπλανό σχήμα το τόξο της παραβολής δίνεται από τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Να βρείτε τους συντελεστές a , b , γ απ' τα σημεία τομής της παραβολής με τους άξονες. Ποιες οι συντεταγμένες της κορυφής K του τόξου της παραβολής;



30. Ένας μηχανικός σχεδίασε μια γέφυρα που το παραβολικό της τμήμα εκφράζεται με τη συνάρτηση που έχει τύπο $f(x) = -x^2 + 6x$ όπου $x \in [0,6]$ και το μετρούμε σε μέτρα. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος του τόξου της παραβολής.
31. Το άθροισμα των καθέτων πλευρών x και y ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι ίσο με 17 cm. Ποια πρέπει να είναι τα μήκη x και y των δύο καθέτων πλευρών ώστε το ορθογώνιο τρίγωνο να έχει μέγιστο εμβαδό;
32. Θέλουμε να περιφράξουμε ένα ορθογώνιο μέρος της αυλής μας χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα των 18 μέτρων που διαθέτουμε.
- Αν x είναι το πλάτος του ορθογωνίου να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το εμβαδό του $E = f(x)$.
 - Να καθορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 - Να σχηματίσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , και να βρείτε από αυτή την τιμή του πλάτους x που θα μας δώσει το μεγαλύτερο εμβαδό $f(x)$.



33. Στο διπλανό σχήμα υπάρχει ένα τετράγωνο με πλευρά $a=10$ cm και μέσα σ' αυτό ένα άλλο τετράγωνο T.

Τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν σημειωθεί έχουν το ίδιο μήκος x σε cm.

- Να δείξετε ότι το εμβαδό του τετραγώνου T είναι:
 $E(x) = 2x^2 - 20x + 100$
- Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ είναι ελάχιστο.