

$$F(x)=ax^2$$

Το

24ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

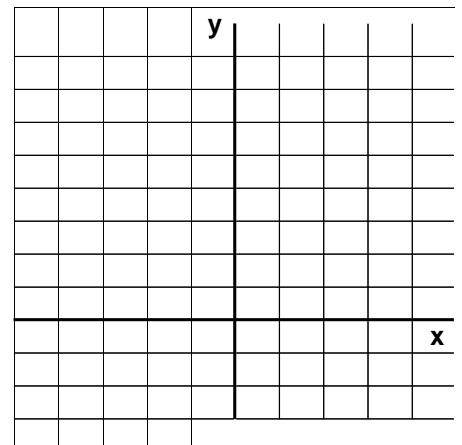
1° ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ: Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

$$y=ax^2$$

1. Θα φτιάξουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2$, συμπληρώνοντας πρώτα ένα πίνακα τιμών, για κάποιες τιμές του x .

x	-2	-1	0	1	2
y					

Τοποθετήστε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τους αριθμούς του πίνακα στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



Αυτή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2$, για $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

Αν βρούμε έτσι πολλά σημεία και τα ενώσουμε, θα φτιαχτεί μία καμπύλη, που ονομάζεται **παραβολή**.

Αυτή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2$, όταν στο x μπορούμε να αντικαταστήσουμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

Συμπληρώστε: $x^2 \dots\dots 0$. Δηλαδή $y \dots\dots 0$ για όλα τα x .

Γι' αυτό η **παραβολή** βρίσκεται $\dots\dots\dots$ από τον άξονα xx' .

Συμπληρώστε: Τα **A** και **E** απέχουν από τον άξονα y $\dots\dots\dots$ μον. $\dots\dots\dots$.

Το **AE** είναι $\dots\dots\dots$ προς τον άξονα yy' .

Γι αυτό λέμε ότι τα **A** και **E** είναι συμ. $\dots\dots\dots$ ως προς τον yy' .

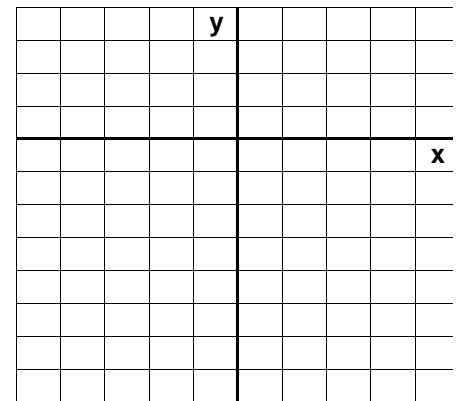
Το ίδιο και τα **B** και **Δ**. Και γενικά όλα τα σημεία της παραβολής έχουν τα $\dots\dots\dots$ τους πάνω στην ίδια την παραβολή.

Και τελικά ο y είναι άξονας $\dots\dots\dots$ της παραβολής

Ακόμα για $x = 0$ το $y = 0$ είναι η $\dots\dots\dots$ τιμή που έχει η συνάρτηση, το **ελάχιστο**. Έτσι το σημείο **O(0,0)** λέγεται **κορυφή** της γραφικής παράστασης.

2. Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
y					



Έχουμε λοιπόν: η **παραβολή** βρίσκεται από τον άξονα xx' . Ο y είναι ο της παραβολής.

Για $x = 0$ το $y = 0$ είναι η τιμή που έχει η συνάρτηση, το

Έτσι το σημείο **O(0,0)** λέγεται της παραβολής.

3. Οι παραβολές $y=x^2$ και $y=-x^2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων. Θα πρέπει να παρατηρήσετε ότι η μία παραβολή είναι της άλλης ως προς τον άξονα

4. Θα γενικεύσουμε με τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων της μορφής $y=ax^2$.

Συμπληρώστε: Η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα $x x'$ όταν a 0 και

..... από αυτόν όταν a 0 . Ο άξονας είναι πάντα ο

της παραβολής . Το σημείο $O(0,0)$ είναι πάντα η..... της παραβολής.

Αν $a > 0$ η παραβολή έχει τιμή την $y = \dots\dots\dots$, ενώ αν $a < 0$ η παραβολή έχει

..... τιμή την $y = \dots\dots\dots$

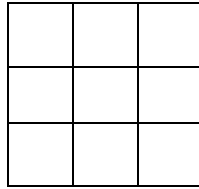
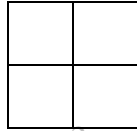
Για $a > 0$, η παραβολή «ανοίγει» όταν το a και «.....» όταν το a

2ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ:

Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Τετραγωνική συνάρτηση $f(x)=ax^2$

1)



Μήκος πλευράς τετραγώνου x -----→εμβαδόν τετραγώνου $E(x)$

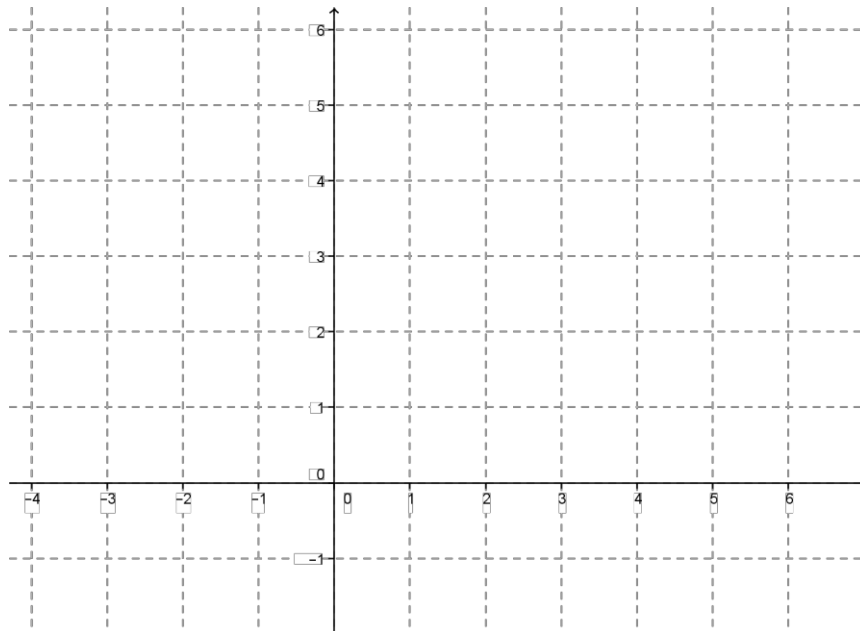
2) γράψτε τον τύπο της παραπάνω οριζόμενης συνάρτησης. -----

3)βρείτε ποιες τιμές παίρνει η μεταβλητή x . (πεδίο ορισμού A) -----

4)να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	1	1.5	2	2.5	3
$E(x)$					

5)Να σημειώσετε τα παραπάνω οριζόμενα σημεία $(x,E(x))$ στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων. Τι εικάζετε σχετικά με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$;

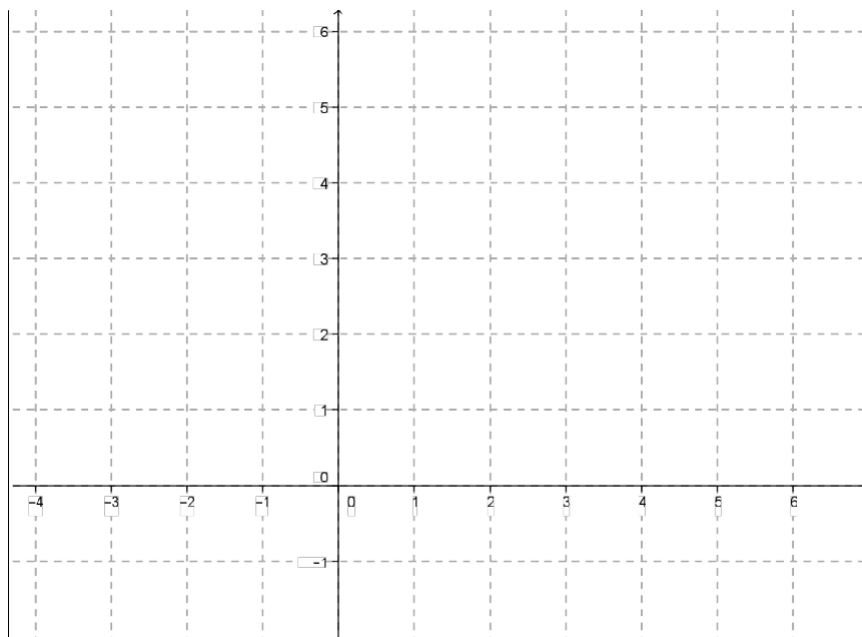


Σχεδιάστε και τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της $E(x)$ ως προς τον άξονα $\psi\psi$.
Τι σας θυμίζει η νέα γραφική παράσταση;

6) να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τη συνάρτηση $f(x)=x^2, x \in \mathbb{R}$

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$													

Και να κάνετε τη γραφική παράστασή της:



Θυμηθείτε ότι η γραφική παράσταση γενικά της συνάρτησης $f(x)=ax^2$ λέγεται παραβολή.

7) συμπληρώστε τις **Ιδιότητες** της συνάρτησης $f(x)=x^2$, αντίστοιχα της παραβολής:

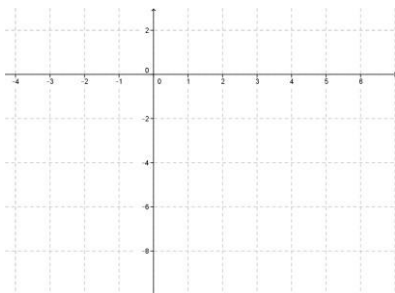
$f(x)=x^2$	παραβολής
1. Όλες οι τιμές της $f(x)$ 0	1. είναι από τον άξονα $x'x$
2. ισχύει $f(-x)=\dots\dots$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$	2. είναι ως προς τον άξονα $\psi'\psi$
3. $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \dots f(x_2)$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$	3. είναι γνησίως στο $[0, +\infty)$
4. η ελάχιστη τιμή της είναι	4. το σημείο είναι η κορυφή της

8) δοκίμασε με τη βοήθεια κάποιου λογισμικού (geogebra κ.λ.π) τη γραφική παράσταση της f για $a=2,3,4,\dots\dots$ και για $a=0.1,0.2,0.3,\dots\dots$ Τι παρατηρείτε; Συμπληρώστε τον πίνακα:

1	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=ax^2$ $a > 0$	min		

9) συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα τιμών και κάνε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$								



10) συμπληρώστε τις **Ιδιότητες** της συνάρτησης $f(x)=-x^2$, αντίστοιχα της παραβολής:

$f(x)=-x^2$	παραβολής
1. Όλες οι τιμές της $f(x)$ 0	1. είναι από τον άξονα $x'x$
2. ισχύει $f(-x)=.....$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$	2. είναι ως προς τον άξονα $\psi'\psi$
3. $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \dots f(x_2)$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$	3. είναι γνησίως στο $[0, +\infty)$
4. η μέγιστη τιμή της είναι	4. το σημείο είναι η κορυφή της

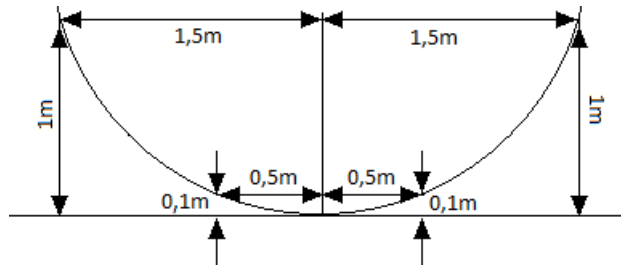
11) δοκίμασε με τη βοήθεια κάποιου λογισμικού (geogebra κ.λ.π) τη γραφική παράσταση της f για $a=-2,-3,-4,.....$ και για $a=-0.1,-0.2,-0.3,.....$. Τι παρατηρείτε; Συμπληρώστε τον

πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=ax^2$ $a < 0$	max		

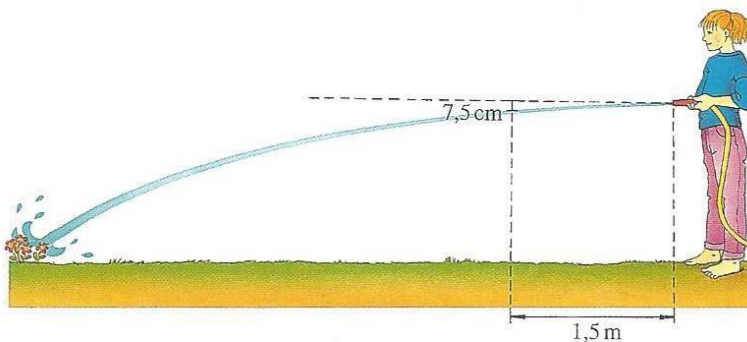
Ασκήσεις

1) εξετάστε αν το σχοινί του σχήματος μπορεί να έχει τη μορφή μιας παραβολής με εξίσωση $y=ax^2$.



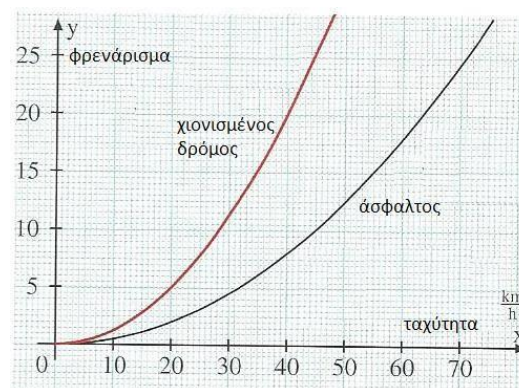
2) Στο παρακάτω σχήμα η τροχιά του νερού έχει τη μορφή παραβολής με εξίσωση $\psi=ax^2$.

- i) Αν η απόσταση που πέφτει το νερό από τα πόδια της Χρηστίνας στο έδαφος είναι 6 m, πόσο ψηλά κρατάει το λάστιχο η Χρηστίνα;
- ii) Πόσο ψηλά κρατάει το λάστιχο, ώστε το νερό να φτάσει τα 7,5 m;
- iii) Πόσο μακριά φτάνει το νερό, αν η Χρηστίνα στέκεται πάνω σε μια σκάλα και κρατά το λάστιχο 3 m από το έδαφος;



3) Το φρενάρισμα p (σε m) ενός αυτοκινήτου με καλά φρένα υπολογίζεται από τον τύπο

$P(v)=a(0,1v)^2$, όπου v η ταχύτητα, που είχε, όταν άρχισε να φρενάρει. Ο συντελεστής a εξαρτάται από την κατάσταση του δρόμου, που σημαίνει αν ο δρόμος είναι ξηρός, υγρός ή καλύπτεται από χιόνι. Να ορίσετε από τη γραφική παράσταση του σχήματος τον συντελεστή a για ένα δρόμο από άσφαλτο ή καλυμμένο από χιόνι.



ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

ΕΡΩΤΗΣΗ 1^η: Τι λέγεται παραβολή με κορυφή το $O(0,0)$ και άξονα $\psi'\psi$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2^η: Πότε δύο συναρτήσεις f, g είναι αντίθετες;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3^η: Τι λέγεται αύξουσα συνάρτηση;

ΕΡΩΤΗΣΗ 4^η: Τι λέγεται φθίνουσα συνάρτηση;

ΕΡΩΤΗΣΗ 5^η: Τι λέγεται μονότονη συνάρτηση;

Β. ΠΑΡΑΔΕΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
5. Να εξεταστούν ως προς την μονοτονία στα αντίστοιχα διαστήματα οι συναρτήσεις f με
 - α) $f(x) = -5x^3 + 16$ στο \mathbb{R}
 - β) $f(x) = x^2 - 4x$ στο $(5, +\infty)$

β) Συμπληρωματικά παραδείγματα και εφαρμογές.

6. Να εξεταστούν ως προς την μονοτονία στα αντίστοιχα διαστήματα οι συναρτήσεις f με
 - α) $f(x) = 3|x-2| + 2|x-1|$
 - β) $f(x) = \frac{3x+2}{x-3}$ στο $(3, +\infty)$
7. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = -4x+7$, αν το πεδίο ορισμού της είναι το διάστημα $[-1, 2]$. Στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση.

8 .Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

A) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

B) Αποδείξτε ότι στο $[0,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα ενώ στο $(1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της.

9 .Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

10 .Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (1-\lambda)x + 1999$ και $g(x) = \frac{16-\lambda^2}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί ο λ ώστε ταυτόχρονα η f να είναι γνησίως φθίνουσα και η g να είναι γνησίως αύξουσα.

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Ποιες συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε όλα τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της A , τότε είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της A .

ΕΡΩΤΗΣΗ 6η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Η γραφική παράσταση της $f(x)=ax^2$ βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$;

2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
Γνησίως μονότονη Ακρότατα Συμμετρικές Υπερβολή Παραβολή Γνησίως αύξουσα Σταθερή	Αρτια, περιττή Ασύμπτωτες Ελάχιστο, μέγιστο. $F(x)=ax^2, a \neq 0$ Γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα. $F(x)=\beta$ $F(x)=ax+\beta, a > 0$

Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις.

- α) Η καμπύλη $F(x) = ax^2$, $a \neq 0$ είναι με κορυφή το σημείο και άξονα συμμετρίας τον
- β) Ακρότατα μιας συνάρτησης f λέγονται το και το της συνάρτησης.

Χρησιμοποιείτε τα σύμβολα της διάταξης για να συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις.

- α) Αν η $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ είναι γνησίως αύξουσα τότε a 0.
- β) Για $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο A .
- γ) Για $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{3x-5}{x+2-\lambda}$ και $g(x) = \frac{5-3x}{x-3\lambda}$ είναι αντίθετες;

- Α Για $\lambda \geq 0$
- Β Για $\lambda = 0$
- Γ Για $\lambda = -1$

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα σημεία $A(-4, -3)$, $B(-4, |\lambda^2 - 1|)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$

- Α Για $\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$
- Β Για $\lambda > 0$
- Γ Για $\lambda = 2$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x^2 - 9)\sqrt{2-x}$;

- Α Στα $A(0, 9\sqrt{2})$, $B(-3, 0)$, $\Gamma(2, 0)$
- Β Στα $O(0, 0)$, $A(2, 0)$
- Γ Στα $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$, $\Gamma(2, 0)$, $\Delta(0, -9\sqrt{2})$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\psi = (\lambda - 2)x + 1998$, $\varphi = (\lambda^2 - 2\lambda)x - 1958$ είναι παράλληλες;

- Α Για $\lambda = 0$ ή $\lambda = 2$

Β Για $\lambda = 2$

Γ Για $\lambda = 1998$ ή $\lambda = 1958$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Η συνάρτηση $f(x) = (1 - |\lambda|)x + 5$ είναι γνησίως αύξουσα, όταν

Α $\lambda \in (-1, 1)$

Β $\lambda \in (-\infty, -1)$

Γ $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$

4.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε..... με όταν...

Ερώτηση α)

..... η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $\psi'\psi$;

Ερώτηση β)

..... η συνάρτηση $f(x) = ax^2$ παρουσιάζει μέγιστο;

5.ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Διατυπώσεις των θεμάτων.

11.1 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία στα αντίστοιχα διαστήματα τις συναρτήσεις f με

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} -5x, & \text{αν } x < 2 \\ 5x - 2004, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} \text{ στα } (-\infty, 0), (10, +\infty)$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 0 \\ -5x^3 + 1999, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \text{ στα } (-5, -1), (12, 1453)$$

12 Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f με $f(x) = (3 - |\lambda|)x^2$, με $\lambda \neq \pm 2$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x^2 + 4$.

- α) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα.
 Β) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

14. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=(2λ+3)x^2$ διέρχεται από το σημείο $A(1,-5)$, να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $g(x)=\frac{|5λ-2|}{x}$.

15. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($A=90^\circ$) μεταβάλλεται, έτσι ώστε το εμβαδόν του να παραμένει σταθερό 2 τετραγωνικές μονάδες.
 Α) Να εκφράσετε το μήκος ψ της $AΓ$ σε συνάρτηση του μήκους χ της AB και
 β) να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

6.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

16. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ της εξίσωσης της παραβολής $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ που έχει κορυφή $K(1,0)$ με $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$ και η απόσταση του σημείου τομής της με τον άξονα ψ' από το K είναι $\sqrt{2}$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+6}$

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
 β) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.
 Γ) Να εξετάσετε την μονοτονία της στο $(2,3)$.
 Δ) Να επιλύσετε την εξίσωση $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$.

18. Να εξετάσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g με $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = |x| \cdot x^2 + |x+1| + |x-1|$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα ψ' ή ως προς την αρχή των αξόνων O .

19. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $B(3,0)$. Να βρεθεί το σημείο $M(x,\psi)$ της γραφικής παράστασης της f ώστε η απόσταση AB να είναι ελάχιστη και

η οποία να βρεθεί.

20. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $g(x) = -x$.

Αν $M \in C_f$ και $N \in C_g$ έτσι ώστε MN κάθετη στον άξονα $\psi\psi$, να βρεθεί για ποια τιμή του x το MN παίρνει την μικρότερη δυνατή τιμή.