ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 4^{O}

Η συνάρτηση

$F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$

Το

22ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Θεμελιώδες Θέωρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Θεώρημα

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση:

$$\mathbf{F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt}$$

με $x \in \Delta$, είναι μία παράγουσα της f στο Δ.

Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], τότε :

$$\mathbf{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)}$$

Ολοκλήρωση κατά Παράγοντες

Αν οι f' , g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] τότε :

$$\mathbf{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot g(x)dx}$$

Μεθοδολογία

Τη μέθοδο αυτή την εφαρμόζουμε, κυρίως, σε συναρτήσεις τις μορφής:

- P(x) · (εκθετική)
- P(x) · (τριγωνομετρική)
- P(x) · (λογαριθμική)
- (εκθετική) · (τριγωνομετρική)

όπου P(x) κάποιο πολυώνυμο του x . Αναλυτικότερα :

P(x) · (εκθετική)

Ξεκινάμε από την εκθετική, βρίσκοντας μια παράγουσά της.

- Αν πρόκειται για εκθετική της μορφής : $e^x = (e^x)'$
- Αν πρόκειται για σύνθετη της μορφής : $e^{\lambda x} = \left(\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right)'$
- Αν πρόκειται για εκθετική της μορφής : $\alpha^x = \left(\dfrac{\alpha^x}{\ln\alpha}\right)'$

P(x) · (τριγωνομετρική)

Ξεκινάμε από την τριγωνομετρική, βρίσκοντας μια παράγουσά της.

- Αν πρόκειται για απλής μορφής : $\eta\mu x = (-\sigma\upsilon\nu x)'$
  $\sigma\upsilon\nu x = (\eta\mu x)'$
- Αν πρόκειται για σύνθετης μορφής : $\eta\mu(\lambda x) = \left(\dfrac{-\sigma\upsilon\nu(\lambda x)}{\lambda}\right)'$
  $\sigma\upsilon\nu(\lambda x) = \left(\dfrac{\eta\mu(\lambda x)}{\lambda}\right)'$

P(x) · (λογαριθμική)

Ξεκινάμε από την πολυωνυμική, βρίσκοντας μια παράγουσά της.

(εκθετική) · (τριγωνομετρική)

Ξεκινάμε από όποια επιθυμούμε κι εφαρμόζουμε, πάνω της, τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης δύο φορές (!) έως ότου καταλήξουμε στο αρχικό ολοκλήρωμα. Κατόπιν, λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση.

Ολοκλήρωση με Αλλαγή Μεταβλητής

Αν οι f , g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$$

όπου :

$$u = g(x) \text{ , } du = g'(x)dx \text{ , } u_1 = g(\alpha) \text{ , } u_2 = g(\beta)$$

M_9: Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f με πολλαπλό

τύπο ,στο διάστημα [α,β], εργαζόμαστε όπως παρακάτω:

α) Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], οπότε θα είναι και ολοκληρώσιμη στο [α,β].

β)Με βάση τη σχέση του Chasles εκφράζουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα σαν άθροισμα ολοκληρωμάτων της συνάρτησης f σε υποδιαστήματα του [α,β], στα οποία η f δεν αλλάζει τύπο .

γ) Υπολογίζουμε τα παραπάνω ολοκληρώματα.

M_{10}: Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f που ο τύπος της περιέχει απόλυτες τιμές, μετασχηματίζουμε τον τύπο της συνάρτησης σε συνάρτηση με πολλαπλό τύπο και στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως και στην M_7:

M_{11}:Για να υπολογίσουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα αρκεί να βρούμε το σύνολο όλων των αρχικών συναρτήσεων της συνάρτησης.
Αν η συνάρτηση f έχει την μορφή:

α) $f(\chi)=\dfrac{P(\chi)}{\chi^{\nu}}$ ή $f(\chi)=\dfrac{P(\chi)}{\sqrt[\nu]{\chi}}$ όπου P(χ) είναι μια αλγεβρική παράσταση δυνάμεων και ριζών του χ , τότε χωρίζουμε το κλάσμα σε αθροίσματα απλών κλασμάτων και γνωρίζουμε πλέον τις αρχικές τους συναρτήσεις.

β) $f^{\nu}(\chi).f'(\chi)$ τότε μια αρχική συνάρτηση είναι η $\dfrac{f^{\nu+1}(\chi)}{}$ $\nu \neq -1$

ν+1

γ) $\frac{f'(\chi)}{f(\chi)}$ τότε μια αρχική της συνάρτηση είναι η $\ln|f(\chi)|$.

Μ12: Για να μελετήσουμε μια συνάρτηση που ορίζεται από ολοκλήρωμα ,πρέπει να έχουμε υπ όψη μας τα παρακάτω συμπεράσματα:

i) η συνάρτηση $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο [α,β]

ii) $F'(\chi)=[\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt]' = f(\chi)$.

β) Αν f είναι μία συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο [α,β] και

γε[α,β] και μια συνάρτηση g παραγωγίσιμη σε διάστημα Α με

g(A)=[α,β], τότε η συνάρτηση F με

$F(\chi)=\int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)dt$ με χεΑ μπορεί να θεωρηθεί σαν σύνθεση των

συναρτήσεων g(χ) και $h(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ δηλαδή $F(\chi)=h(g(\chi))$ οπότε

$F'(\chi)= f(g(\chi)).g'(\chi)$.

M_{13}: Για να υπολογίσουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi).g(\chi)\,dx$

εφαρμόζουμε την πρόταση της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, που είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi).g(\chi)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\chi).g(\chi)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} F(\chi).g(\chi)| - \int_{\alpha}^{\beta} F(\chi).g'(\chi)\,dx$$

Με την μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, εργαζόμαστε όπως παρακάτω:

α) Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο [α,β].

β) Βρίσκουμε μία παράγουσα της f , έστω την F.

γ) Αποδεικνύουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] και ότι η g'
είναι συνεχής στο [α,β]

δ) Εφαρμόζουμε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

ε) Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\alpha}^{\beta} F(\chi).g'(\chi)\, d\chi$.

ΒΑΣΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εφαρμόζοντας τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες ανάγουμε τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος σε ένα άλλο το οποίο υπολογίζεται ευκολότερα. Η εκλογή της συνάρτησης που θα υπολογιστεί η παράγουσά της δίνεται από τον μνημονικό τύπο

Ενιαίο		Τεχνικό		Πολυκλαδικό		Λύκειο
Ε	<---------->	Τ	<---------------	Π	<---------- ------------	Λ
Εκθετική		Τριγωνομετρική		Πολυωνυμική		Λογαριθμική

Το σημείο της ανισότητας > ή < δείχνει την εκλογή της συνάρτησης.

M_{14}: Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα I , με την μέθοδο της αλλαγής μεταβλητής, υπάρχουν διάφοροι τρόποι , ανάλογα με την μορφή του ολοκληρώματος .

1ος τρόπος.

α) Εκλέγουμε κατάλληλες συναρτήσεις f,g ώστε το ζητούμενο

ολοκλήρωμα να γράφεται στη μορφή $I=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(\chi))g'(\chi)\, dx$.

β) Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] και έχει παράγωγο g', που είναι συνεχής στο [α,β]. Ακόμη αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο g([α,β]).

γ) Υπολογίζουμε τα g(α), g(β).

δ) Εφαρμόζουμε τον τύπο της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής, οπότε: $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(\chi)).g'(\chi)\, d\chi = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(\psi)\, d\psi$.

ε) Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(\psi)\, d\psi$

2ος τρόπος.

Αν $I = \int_{\gamma}^{\delta} f(\psi)\, d\psi$, τότε εργαζόμαστε όπως παρακάτω:

α) Θεωρούμε $\psi = g(\chi)$, βρίσκουμε τις συναρτήσεις $f(g(\chi))$, $g'(\chi)$ καιπροσδιορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta \varepsilon D_g$ ώστε $\gamma=g(\alpha),\delta=g(\beta)$.

β) Γράφουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα στη μορφή $I = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(\psi).d\psi$

γ) Εφαρμόζουμε τον τύπο της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής και κάνουμε πράξεις.

M_{15}: Για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής $I = \int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}\, dx$

διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση

<u>Ο ΑΡΙΘΜΗΤΗΣ ΕΧΕΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ ΒΑΘΜΟ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ</u>

Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε όπως παρακάτω:

α) Αναλύουμε το πολυώνυμο $Q(\chi)$ σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων της μορφής $\chi - \rho$ και δευτεροβαθμίων παραγόντων της μορφής $\chi^2+\beta\chi+\gamma$ με $\beta^2-4\gamma < 0$.

β) Αν $(\chi-\rho)^{\nu}$ είναι η μεγαλύτερη δύναμη του $\chi-\rho$, που είναι παράγοντας του $Q(\chi)$, σχηματίζουμε το παρακάτω άθροισμα των απλών κλασμάτων:

$$\frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \frac{A}{\chi-\rho} + \frac{B}{(\chi-\rho)^2} + \ldots\ldots + \frac{K}{(\chi-\rho)^{\nu}} \quad \text{με } A,B,\ldots,K \varepsilon R$$

ή $\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \dfrac{A\chi+B}{(\chi^2+\alpha\chi+\beta)} + \dfrac{\Gamma\chi+\Delta}{(\chi^2+\gamma\chi+\delta)^2} + \ldots + \dfrac{K\chi+\Lambda}{(\chi^2+\kappa\chi+\lambda)^{\mu}}$ Α,Β,...,ΛεR

ή τον συνδυασμό των δύο παραπάνω.

γ) Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα και εξισώνουμε τους αριθμητές.

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

Προκύπτει μηδενικό πολυώνυμο και σχηματίζουμε σύστημα ολων των μηδενικών συντελεστών του. Η λύση του δίνει τους Α,Β,...,ΛεR.

δ) Αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές στο άθροισμα των απλών αθροισμάτων .

ε) Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα αυτών των απλών κλασμάτων.

2η περίπτωση.

<u>Ο ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΗ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ</u>

<u>η ΙΣΟΣ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ</u>

Στην περίπτωση αυτη κάνουμε τα παρακάτω:

α) Εκτελούμε την διαίρεση του $\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$

Αν Π(χ) είναι το πηλικο της παραπάνω διαίρεσης και Υ(χ) το υπολοιπό της, θα έχουμε

$$\frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \Pi(\chi) + \frac{Y(\chi)}{Q(\chi)} \quad (1)$$

β) Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της σχεσης (1).

Παρατήρηση:

Το ολοκλήρωμα $\frac{Y(\chi)}{Q(\chi)}$ υπολογίζεται με βάση την 1η περίπτωση .

M_{16}: Για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)dx$ με

f(χ) γινόμενο τριγωνομετρικών αριθμών , εφαρμόζουμε τους τύπους

μετασχηματισμού γινομένου σε άθροισμα δηλαδή

2ημασυνβ = ημ(α+β)+ ημ(α-β)
2συνασυνβ=συν(α+β)+συν(α-β)

2ημα.ημβ =συν(α-β)-συν(α+β)

M_{17}:Για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta}$ ημ$^{\nu}$χ dx

ή $\int_{\alpha}^{\beta}$ συν$^{\nu}$χ dx διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση : Αν ν = άρτιος

Χρησιμοποιούμε τους τύπου του διπλάσιου τόξου δηλαδή

συν2χ = 1-2ημ²χ οπότε ημ²χ = $\frac{1}{2}$(1 - συν2χ)

συν2χ =2συν²χ -1 οπότε συν²χ = $\frac{1}{2}$(1 + συν2χ)

2η περίπτωση: Αν ν=περιττός δηλαδή ν=2κ+1, τότε έχουμε διαδοχικά :

ημ$^{\nu}$χ = ημ$^{2\kappa+1}$χ = ημ$^{2\kappa}$.ημχ= (ημ²χ)$^{\kappa}$.(-συνχ)'

οπότε παίρνουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta}$ f$^{\nu}$(χ).f'(χ) dx .

Ομοια εργαζόμαστε και για το συν$^{\nu}$χ.

ΘΕΜΑ 14

Να προσδιοριστεί ο λεR ώστε να ισχύει

$$\int_{4}^{10} \frac{\ln x-2\chi^2+5}{\chi^2+\chi+3}\,dx + \chi = \int_{10}^{4} \frac{3\chi^2+\chi-\ln x-2}{\chi^2+\chi+3}\,dx + \int_{1}^{2} \chi \; d\omega + \ln(\lambda-1)$$

ΘΕΜΑ 15

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{0} \begin{vmatrix} \chi & 2 & 2 \\ 2 & \chi & 2 \\ 2 & 2 & \chi \end{vmatrix} d\chi$

ΘΕΜΑ 16

συν(lnx)

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \frac{}{\chi}\,dx$

ΘΕΜΑ 17

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \frac{e^{2\chi}}{1+e^{\chi}}\,dx$

ΘΕΜΑ 18

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e (\ln x)^2\,dx$

ΘΕΜΑ 19

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 (\chi^2-\chi+1).e^{\chi}\,dx$

ΘΕΜΑ 20

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{\ln 3\chi}{\chi^2}\,dx$

ΘΕΜΑ 21

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\pi}^{2\pi} ημ\chi\, συν2\chi\,dx$

ΘΕΜΑ 22

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{1}^{\frac{\pi}{4}} συν^4\chi\,dx$

ΘΕΜΑ 23

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{2} (fog)(\chi)\,dx$, όταν

$f(\chi)=\chi^2$ και $g(\chi)=\sqrt{|\chi-1|}$

ΘΕΜΑ 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\begin{cases} \lambda\chi e\chi^{-1}+2 & \text{αν } \chi\leq 1 \\ \chi^2-\lambda\chi+3 & \text{αν } \chi>1 \end{cases}$

α) Να βρεθει ο λεR ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση.

β) Για την τιμή του λ του α) ερωτήματος να βρείτε το $I=\int_0^3 f(\chi)dx$

ΘΕΜΑ 25

Αν $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\chi-2)\eta\mu^2\chi\, dx$ και $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\chi-2)\sigma\upsilon\nu^2\chi\, dx$, να υπολογίσετε

τα ολοκληρώματα

α) I+J

β) I-J

γ) I

δ) J

ΘΕΜΑ 26

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(\chi)=\int_e^{\chi^2+1} \ln t\, dt$

ΘΕΜΑ 27

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(\chi)=\int_{\chi-1}^{\eta\mu\chi}$ ¦ t.συνt dt

ΘΕΜΑ 28

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\int_1^{\chi} \frac{t-2}{e^t}\, dt$

α) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να βρείτε τα ακρότατα της f

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο χο=1

ΘΕΜΑ 29

Αν f συνεχής συνάρτηση στο R, δείξτε ότι είναι σταθερή η συνάρτηση:

$$F(\chi)= \int_0^{\chi} f(t)\,dt - \frac{1}{2} \int_{2\alpha-3\beta}^{2\chi-3\beta} f\left(\frac{t+3\beta}{2}\right) dt$$

Ποιός είναι ο τύπος της f;

ΘΕΜΑ 30

Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [1,+oo) τέτοια ώστε για κάθε $\chi \geq 1$

να ισχύει $\int_1^{\chi} \frac{f(t)}{t}\,dt = f^2(\chi)$

ΘΕΜΑ 31

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $E(t)= \int_1^{t} (2\chi-1)\ln x\,dx$, $\tau>1$

β) Να βρεθει το $\lim_{t\to+\infty} \frac{E'(t)}{t\ln t}$

γ) Να βρεθεί το $\lim_{t\to+\infty} (\ln t\, E''(t))$