ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων

ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 3Ο

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Το

21ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β] , με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [α, β]$. Έστω, επίσης, Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = α$, $x = β$.

- Χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους :

$$\mathbf{\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}}$$

με τη βοήθεια των σημείων :

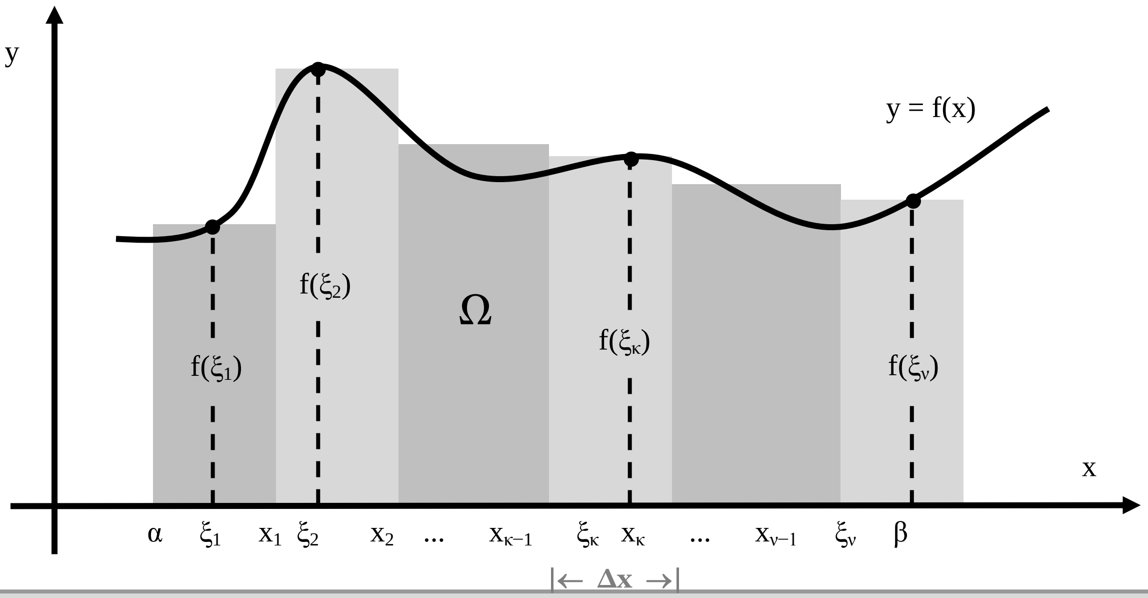
$$\mathbf{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta}$$

- Σε κάθε υποδιάστημα $[\, x_{κ-1} , x_κ \,]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο $ξ_κ$ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια, με βάση Δx και ύψη τα αντίστοιχα $f(ξ_κ)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι :

$$\mathbf{S_\nu = f(\xi_1)\cdot\Delta x + f(\xi_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\cdot\Delta x =}$$
$$\mathbf{= [\, f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_\nu) \,]\cdot\Delta x}$$

- Υπολογίζουμε το : $\mathbf{\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu}$

Αποδεικνύεται ότι το όριο αυτό υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων $ξ_κ$. Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν του επίπεδου χωρίου Ω και συμβολίζεται E(Ω) , με $E(Ω) \geq 0$.



Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β] .

- Χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους :

$$\mathbf{\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}}$$

με τη βοήθεια των σημείων :

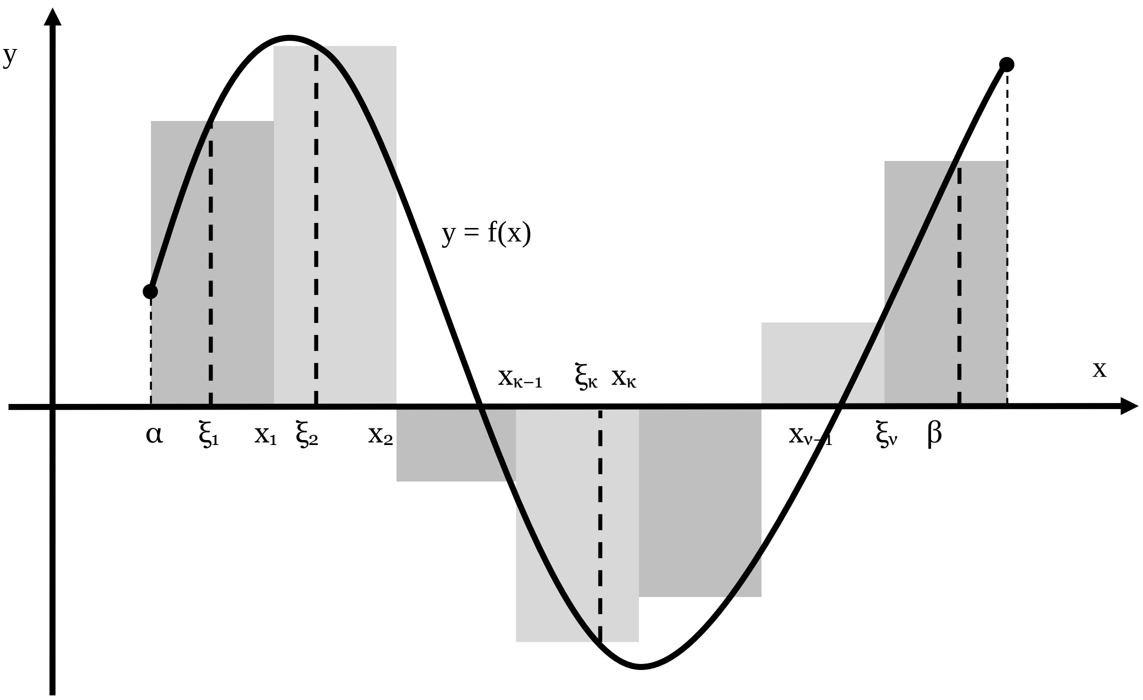
$$\mathbf{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta}$$

- Στη συνέχεια, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [\, x_{\kappa-1}, x_\kappa \,]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα :

$$\mathbf{S_\nu = f(\xi_1)\cdot\Delta x + f(\xi_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\cdot\Delta x}$$

το οποίο συμβολίζουμε, συντομότερα, ως εξής:

$$\mathbf{S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x}$$



Αποδεικνύεται ότι το όριο του αθροίσματος S_ν , δηλαδή το $\mathbf{\lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x\right)}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ .

Το παραπάνω όριο ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx}$ και διαβάζεται «ολοκλήρωμα της f από το α στο β». Δηλαδή :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx} = \lim_{\nu \to +\infty} \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \mathbf{f(\xi_\kappa)} \cdot \mathbf{\Delta x} \right)$$

Παρατηρήσεις

- Τονίζεται ότι ο παραπάνω ορισμός έχει «χτιστεί» πάνω στην προϋπόθεση η f να είναι συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα [α, β].
- Η μεταβλητή x καλείται **μεταβλητή της ολοκλήρωσης** .
- Το σύμβολο dx καλείται **διαφορικό της ολοκλήρωσης** .
- Το ορισμένο ολοκλήρωμα παριστάνει, τελικά, ένα σταθερό πραγματικό αριθμό $c \in \mathbb{R}$, ο οποίος εξαρτάται **μόνο** από τη συνάρτηση f και τα όρια α και β και **όχι** από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Έτσι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(t)dt} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(u)du} = \ldots$$

Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος

Βασικές ιδιότητες, που προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό:

1. Αν α > β τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx} = -\int_{\beta}^{\alpha} \mathbf{f(x)dx}$

2. Αν α = β τότε: $\int_{\alpha}^{\alpha} \mathbf{f(x)dx} = 0$

3. Αν f(x) ≥ 0 για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου Ω , που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β .

4. Από το προηγούμενο συνάγεται ότι:

$$\textbf{Αν } \mathbf{f(x) \geq 0} \textbf{ , τότε } \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx} \geq 0$$

5. **Θεώρημα**

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] και λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν :

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

και, γενικά, για οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό των f, g :

- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)]dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

6. Θεώρημα

Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α, β, γ $\in \Delta$, τότε ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$, το προηγούμενο θεώρημα δηλώνει ότι:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

όπου :

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

$$E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$$

$$E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

7. Θεώρημα

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β] . Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$$

8. Αποδεικνύεται επίσης ότι, για οποιοδήποτε $c \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} c\, dx = c\,(\beta - \alpha)$$

Μεθοδολογία

Προκειμένου να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\, dx$, κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων της f και βγάζουμε την απόλυτη τιμή. Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε κανονικά ή, αν χρειάζεται, κατά διαστήματα.

ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΩΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Όταν σε σχέση εμφανίζεται πολλές φορές ένα ορισμένο ολοκλήρωμα, τότε μπορούμε να το θέσουμε ίσο με έναν αριθμό λ και να υπολογίσουμε το λ από τη δοθείσα σχέση.

Όταν δίνεται μια σχέση της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{g(x)f(x)dx = f(x) + h(x)}$ $\mathbf{(1)}$

όπου **g** , **h** γνωστές συναρτήσεις και ζητείται ο τύπος της **f** τότε:

Θα θεωρούμε $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{g(x)f(x)dx = c \in}$ και αντικαθιστώντας στην (1) θα υπολογίζουμε το c.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

Σε ασκήσεις που εμφανίζεται το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ όπου η f είναι άγνωστη συνάρτηση, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την αρχική F της f και να αντικαταστήσουμε το ολοκλήρωμα με $F(\beta) - F(\alpha)$.

M_3: Για να αποδείξουμε ότι ένα ολοκλήρωμα ισούται με κάποια αριθμητική ποσότητα, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες ολοκληρωμάτων, πρέπει να έχουμε υπ' όψη μας τις ιδιότητες:

I_1: $\int_{\alpha}^{\beta}$ f(χ) dx = 0

I_2: $\int_{\alpha}^{\beta}$ f(χ) dx = - $\int_{\alpha}^{\beta}$ f(χ) dx

I_3: $\int_{\alpha}^{\beta}$ f(χ) dx = $\int_{\alpha}^{\gamma}$ f(χ) dx + $\int_{\gamma}^{\beta}$ f(χ) dx

I_4: $\int_{\alpha}^{\beta}$ λ.f(χ) dx = λ. $\int_{\alpha}^{\beta}$ f(χ) dx

I_5: $\int_{\alpha}^{\beta}$ (λ.f(χ) + μ.g(ψ)) dx = λ. $\int_{\alpha}^{\beta}$ f(χ) dx + μ. $\int_{\alpha}^{\beta}$ g(χ) dx

M_4: Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα I= $\int_{\alpha}^{\beta}$ f(χ) dx , το οποίο υπάρχει πάντα όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία :

α) Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], οπότε θα είναι ολοκληρώσιμη σ΄ αυτό.

β) Χωρίζουμε το διάστημα [α,β] με τα ενδιάμεσα σημεία

α = χο<χ1<....<χν=β, στα ν ίσα υποδιαστήματα

$[\alpha,\chi_1],[\chi_1,\chi_2],.....,[\chi_{\nu-1},\beta]$, το καθένα από τα οποία έχει πλάτος

$$\frac{\beta - \alpha}{\nu} = d_\nu \rightarrow 0 .$$

ν

γ) Γράφουμε το δεξιό άκρο κάθε υποδιαστήματος στη μορφή

$\chi_i = \alpha + i\delta\chi_i = \alpha + i\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$,i=1,2,...,ν και εκλέγουμε τα σημεία ξ1,ξ2,

,....,ξν έτσι ώστε ξi=χi, i=1,2,...,ν.

δ) Σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\,\delta\chi_i = \sum_{i=1}^{\nu} f\left(\alpha + i\,\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right) \cdot \frac{\beta-\alpha}{\nu}$$

ε) Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{\nu \to +\infty} S_\nu$, το οποίο είναι και το ζητούμενο

ολοκλήρωμα I .

M_5: Για να αποδείξουμε μία διπλή ανισότητα της μορφής

$\kappa \leq \int_\alpha^\beta f(\chi)\,dx \leq \lambda$,(1), με κ,λεR συγκεκριμένοι αριθμοί, ακολουθού-

με την παρακάτω διαδικασία.

α) Θεωρούμε την συνάρτηση f και εξετάζουμε αν είναι συνεχής στο

[α,β], οπότε η f θα είναι ολοκληρώσιμη στο [α,β].

β) Μελετάμε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα στο [α,β] , με βάση

την παράγωγο , και βρίσκουμε έτσι το ελάχιστο της μ και το

μέγιστό της M .

γ) Αντικαθιστούμε στον τύπο $\mu(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(\chi)\,dx \leq M(\beta-\alpha)$, τα παρα-

πάνω αποτελέσματα και κάνουμε πράξεις μέχρι να καταλήξουμε στην

μορφή (1).

M_6: Για να αποδείξουμε μια σχέση απλής ανισότητας σε σχέση με

ολοκλήρωμα συνάρτησης , χρησιμοποιούμε το θεώρημα διάταξης:

" Για τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α,β] ισχύει:

Αν για κάθε χε[α,β] είναι f(χ)≥ 0, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)\,d\chi \geq 0$ ".

Μ7: Για να αποδείξουμε μια σχέση απλής ανισότητας σε σχέση με

ολοκληρώματα δύο συναρτήσεων , χρησιμοποιούμε το θεώρημα διάταξης

για δύο συναρτήσεις:

" Για δύο συναρτήσεις f,g συνεχείς στο διάστημα [α,β] ισχύει:

Αν για κάθε χε[α,β] είναι f(χ) ≥ g(χ) τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)\,dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(\chi)\,dx \text{ "}$$

M_8: Για να αποδείξουμε μια σχέση απλής ανισότητας σε σχέση με
ολοκλήρωμα συνάρτησης τοποθετειμένης σε απόλυτη τιμή,
χρησιμοποιούμε το θεώρημα διάταξης:

" Για την συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α,β] ισχύει:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)\,dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\chi)|\,dx \text{ ".}$$