ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων

ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 2^{O}

ΜΕΘΟΔΟΙ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Το

20ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Τα βασικά ορισμένα ολοκληρώματα τα υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \left[G(x)\right]_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$$

όπου G μια αρχική συνάρτηση της f .

- Ολοκλήρωμα συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Εξετάζουμε αρχικά την f ως προς τη συνέχεια στο διάστημα ολοκλήρωσης.

Στο σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ που η f αλλάζει τύπο ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{x_0} f_1(x)dx + \int_{x_0}^\beta f_2(x)dx$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

βαθμός $P(x)$ < βαθμό $Q(x)$

A Αν στον αριθμητή με κατάλληλο μετασχηματισμό εμφανίζεται η παράγωγος του παρονομαστή, δηλαδή $P(x) = \lambda Q'(x)$

τότε $I = \int_\alpha^\beta \frac{\lambda Q'(x)}{Q(x)}dx = \lambda \int_\alpha^\beta \frac{Q'(x)}{Q(x)}dx = \lambda \ln Q(x) + c$

B Αν το $P(x)$ δεν παίρνει τη μορφή $\lambda Q'(x)$ τότε αναλύουμε το $Q(x)$ σε γινόμενο παραγόντων.

Έστω: $Q(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)^3(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$, τότε:

$$\frac{P(x)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)^3(\alpha x^2+\beta x+\gamma)} = \frac{A}{x-\rho_1} + \frac{B}{x-\rho_2} + \frac{\Gamma}{(x-\rho_2)^2} + \frac{\Delta}{(x-\rho_2)^3} + \frac{Ex+Z}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

Κάνουμε ομώνυμα στο δεύτερο μέλος και απαιτούμε οι αριθμητές των δύο κλασμάτων να είναι ίσα πολυώνυμα. Έτσι δημιουργείται σύστημα, απ΄όπου βρίσκουμε τα A,B,Γ,Δ,E,Z,… Στη συνέχεια υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα με βάση τον τύπο $\int_\alpha^\beta \frac{\kappa}{\kappa x+\lambda}dx = \left[\ln|\kappa x+\lambda|\right]_\alpha^\beta$

βαθμός $P(x) \geq$ βαθμό $Q(x)$:Κάνουμε την διαίρεση των πολυωνύμων $P(x):Q(x)$ και έστω $\pi(x)$ το πηλίκο και $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο.Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι

$P(x) = Q(x)\pi(x) + \upsilon(x) \Leftrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$, τότε: $\int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int_\alpha^\beta \left(\pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{Q(x)}\right)dx$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$

Συνήθως τα ολοκληρώματα που εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση περιέχουν γινόμενα συναρτήσεων μέσα στις οποίες υπάρχουν $e^{\alpha x+\beta}$, $\eta\mu(\alpha x+\beta)$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)$, $\ln(h(x))$.

Η συνάρτηση η οποία επιλέγουμε για να αντικαταστήσουμε με την αρχική της για να εφαρμόσουμε τον τύπο, με σειρά επιλογής είναι:

- $\mathbf{e^{\alpha x+\beta}}$
- $\boldsymbol{\eta\mu(\alpha x+\beta)}$, $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)}$
- $\mathbf{g(x)}$ πολυώνυμο

1 (αν υπάρχει ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} \ln(g(x))dx$)

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx$ κάνουμε τα εξής:

- Θέτουμε $u = g(x)$ οπότε $du = g'(x)dx$
- Αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης: Για $x=\alpha$ είναι $u_1 = g(\alpha)$, ενώ για $x=\beta$ είναι $u_2 = g(\beta)$.Τότε $I = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$ και το υπολογίζουμε ανάλογα.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΡΙΖΕΣ

- $\int_{\alpha}^{\beta} \Pi\left(x, \sqrt[\nu]{(\alpha x+\beta)^{\kappa}}\right)dx$, $\nu,\kappa \in \mathbb{N}^*$

1ος τρόπος: Θέτουμε και $\alpha x+\beta = u \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}(u-\beta)$ *και* $dx = \frac{1}{\alpha}du$.

***2ος τρόπος*: Θέτουμε** $\sqrt[\nu]{(\alpha x+\beta)^{\kappa}} = u \Leftrightarrow (\alpha x+\beta)^{\kappa} = u^{\nu} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}\left(u^{\frac{\nu}{\kappa}} - \beta\right)$ (1) **άρα**

$dx = \frac{\nu}{\kappa\alpha}u^{\frac{\nu}{\kappa}-1}du$

Σε ασκήσεις που εμφανίζονται ριζικά διαφορετικής τάξεως αλλά με το ίδιο υπόριζο $\alpha x+\beta$, κάνουμε τα εξής:

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των τάξεων των ριζικών και έστω αυτό είναι ν .

Θέτουμε $\sqrt[\nu]{\alpha x+\beta}=u \Leftrightarrow \alpha x+\beta=u^{\nu}$ και $dx=\frac{\nu}{\alpha}u^{\nu-1}du$

- *Ολοκληρώματα της μορφής* $I_1=\int_{-\rho}^{\rho}\sqrt{\rho^2-x^2}\,dx$, $I_2=\int_0^{\rho}\sqrt{2\rho x-x^2}\,dx$

Επειδή $\rho^2-x^2\geq 0$ και $2\rho x-x^2\geq 0$

τα I_1,I_2 μπορούν να αντιμετωπιστούν ως εμβαδά.

Έστω $y=\rho^2-x^2 \Leftrightarrow y^2=\rho^2-x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=\rho^2$

Το I_1 είναι το εμβαδόν του ημικυκλικού δίσκου .
Επειδή για το εμβαδό του κύκλου ισχύει ότι

$E=\pi\rho^2$, *είναι* $I_1=\frac{E}{2}=\frac{\pi\rho^2}{2}$

Για το I_2 **έχουμε:** $y=2\rho x-x^2 \Leftrightarrow y^2=2\rho x-x^2 \Leftrightarrow$

$$x^2-2\rho x+y^2=0 \Leftrightarrow (x-\rho)^2+y^2=\rho^2$$

Δηλαδή το το I_2 είναι το εμβαδόν του

τεταρτοκυκλίου που έχει κέντρο $K(\rho,0)$ και ακτίνα ρ

του διπλανού σχήματος.

Άρα $I_2=\int_0^{\rho} 2\rho x-x^2\,dx=\frac{E_{(K,\rho)}}{4}=\frac{\pi\rho^2}{4}$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

- ***Ολοκληρώματα της μορφής*** $\int_{\alpha}^{\beta}\eta\mu^{\nu}x\sigma\upsilon\nu^{\mu}x\,dx$ **,** $\nu,\mu\in$

Αν ο ν ή ο μ είναι περιττός ακέραιος. Έστω $\mu=2\kappa+1$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\eta\mu^{\nu}x\sigma\upsilon\nu^{\mu}x\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\eta\mu^{\nu}x\sigma\upsilon\nu^{2\kappa+1}x\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\eta\mu^{\nu}x\sigma\upsilon\nu^{2\kappa}x\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\eta\mu^{\nu}x\left(1-\eta\mu^2x\right)^{\kappa}\sigma\upsilon\nu x\,dx$$

Στη συνέχεια θέτουμε $\eta\mu x=u$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα που προκύπτει. Αν

οι ν,μ είναι άρτιοι, τότε χρησιμοποιώντας τους τύπους αποτετραγωγνισμού:

$$\eta\mu^2x=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\ ,\quad \sigma\upsilon\nu^2x=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\quad \text{και}\quad \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\frac{\eta\mu 2x}{2}$$

το ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε άθροισμα ολοκληρωμάτων που υπολογίζονται ευκολότερα.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όταν θέλουμε να βρούμε το ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης $\mathbf{f}^{-1}$ μιας συνάρτησης **f** και δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της $\mathbf{f}^{-1}$ τότε:

Θέτουμε $\mathbf{f^{-1}(x)=u\ (1)}$ οπότε $\mathbf{f(f^{-1}(x))=f(u)}$ δηλαδή $\mathbf{x=f(u)\ (1)}$ άρα $\mathbf{dx=f'(u)du}$.Στην $\mathbf{(1)}$ για $\mathbf{x=\alpha}$ έχουμε $\mathbf{f(u)=\alpha}$.

Βρίσκουμε από τον τύπο της f την τιμή u_1 για την οποία $\mathbf{f(u_1)=\alpha}$ άρα $\mathbf{u=u_1}$, Όμοια για $\mathbf{x=\beta}$ θα είναι $\mathbf{f(u)=\beta=f(u_2)}$, δηλαδή $\mathbf{u=u_2}$

Άρα $$\mathbf{I=\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} uf'(u)du \overset{\text{παραγοντική}}{=} \left[uf(u)\right]_{u_1}^{u_2}-\int_{u_1}^{u_2} f(u)du}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma x+\delta)dx$, f άγνωστη

Σε ασκήσεις που υπάρχουν ολοκληρώματα που περιέχουν συναρτήσεις της παραπάνω μορφής, θέτουμε $\mathbf{\gamma x+\delta=u \Leftrightarrow x=\frac{1}{\gamma}(u-\delta)}$ και $\mathbf{dx=\frac{1}{\gamma}du}$. Τότε $\mathbf{\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma x+\delta)dx=\frac{1}{\gamma}\int_{\gamma\alpha+\delta}^{\gamma\beta+\delta} f(u)du}$

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

- Ανισοτική σχέση της μορφής $\mathbf{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx}$

Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε: $f(x) - g(x) \geq 0$ και

$$\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

- ***Ανισοτική σχέση της μορφής*** $\gamma \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \delta$

Μελετούμε την συνάρτηση **f** ως προς τα ακρότατα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν **m** η ελάχιστη τιμή της f και M η μέγιστη τιμή της f τότε: $m \leq f(x) \leq M$, οπότε και $\int_\alpha^\beta m dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta M dx \Leftrightarrow$

$$m(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΘΕΜΑ 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\chi^3}{\chi+1} d\chi$

ΘΕΜΑ 2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1+\eta\mu 2\chi}\, d\chi \quad 0<\chi<\pi/4$

ΘΕΜΑ 3

Να μελετηθει και να παρασταθει γραφικα η παραγωγοσ της συναρτησησ f οταν η C_f διερχεται απο την αρχη των αξονων και για καθε χεR ισχυει η σχεση $f'(\chi) \cdot e^{f(\chi)} = 2\chi$.

ΘΕΜΑ 4

Να υπολογισετε το ολοκληρωμα $\int \frac{\ln\chi+1}{\chi\ln x} d\chi$

ΘΕΜΑ 5

Να υπολογισετε το ολοκληρωμα $\int \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot \sqrt{\varepsilon\varphi\chi}} \, d\chi$

ΘΕΜΑ 6

Να υπολογισετε το ολοκληρωμα $\int \dfrac{\eta\mu(\ln x)}{\chi} \, d\chi$

ΘΕΜΑ 7

Να υπολογισετε το ολοκληρωμα $\int (\chi+1) \cdot e^{\chi} \cdot \sigma\upsilon\nu(\chi\, e^{\chi}) \, d\chi$

ΘΕΜΑ 8

Να υπολογισετε το ολοκληρωμα $\int \dfrac{2\chi-1}{\chi^2-\chi+12} \, d\chi$

ΘΕΜΑ 9

Ï

Να υπολογισετε το ολοκληρωμα $\int \dfrac{\chi}{\chi^2-\chi+12} \, d\chi$

ΘΕΜΑ 10

Να υπολογισετε το ολοκληρωμα $\int \dfrac{\chi^3}{\chi^2-7\chi+10} \, d\chi$

ΘΕΜΑ 11

Να υπολογισετε το ολοκληρωμα $\int \dfrac{1}{\ } \, d\chi$

$\chi\cdot\sqrt{\chi+1}$

ΘΕΜΑ 12

Να υπολογισετε το ολοκληρωμα $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2\chi+1} - \sqrt[4]{2\chi-1}}\, d\chi$

ΘΕΜΑ 13

Εστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(-\pi)=\dfrac{\pi-1}{\pi}$ και για κάθε $\chi<0$

ισχύει $f'(\chi)=\eta\mu\chi - \dfrac{f(\chi)}{\chi}$

α) Να βρεθεί η συνάρτηση f

β) Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)$