



ΜΑΘΗΜΑ 2^ο
Πολύωνυμα

Διαίρεση

Πολυωνύμων

ΕΝΟΤΗΤΑ 9^Η

Πολύωνυμα

Διαίρεση
πολυωνύμων.

ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

ΕΡΩΤΗΣΗ 1^η: Τι λέγεται μονώνυμο του χ ;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2^η: Τι λέγεται πολώνυμο του χ ;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3^η: Τι λέγονται όροι ενός πολωνύμου;

ΕΡΩΤΗΣΗ 4^η: Τι λέγονται συντελεστές ενός πολωνύμου;

ΕΡΩΤΗΣΗ 5^η: Τι λέγεται σταθερός όρος ενός πολωνύμου
 $P(\chi) = a_n \chi^n + a_{n-1} \chi^{n-1} + \dots + a_1 \chi + a_0$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 6^η: Τι λέγονται σταθερά πολώνυμα;

ΕΡΩΤΗΣΗ 7^η: Τι λέγεται μηδενικό πολώνυμο;

ΕΡΩΤΗΣΗ 8^η: Πότε θα λέμε ότι δύο πολώνυμα θα είναι ίσα;

ΕΡΩΤΗΣΗ 9^η: Τι λέγεται βαθμός ενός πολωνύμου;

ΕΡΩΤΗΣΗ 10^η: Πως κατασκευάζεται ο πίνακας του σχήματος HORNER;

ΕΡΩΤΗΣΗ 11^η: Ποιες πράξεις ορίζονται μεταξύ των πολωνύμων;

β) Ερωτήσεις θεωρίας για τα κριτήρια αξιολόγησης

ΕΡΩΤΗΣΗ 10^η: Τι λέγεται αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου $P(x)$ ή τιμή του $P(x)$ για $x=r$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 11^η: Τι λέγεται ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 12^η: Ποια είναι η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης;

ΕΡΩΤΗΣΗ 13^η: Ποια διαίρεση λέγεται τέλεια;

ΕΡΩΤΗΣΗ 14^η: Δείξτε ότι:

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με $x-r$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=r$. Είναι δηλαδή $υ = P(r)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 15^η: Δείξτε ότι:

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-r$ αν και μόνο αν το r είναι ρίζα του $P(x)$ δηλαδή αν και μόνο αν $P(r)=0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 17^η: Ποια είναι η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης για τα πολυώνυμα;

ΕΡΩΤΗΣΗ 18^η: Τι λέγεται ατελής διαίρεση;

ΕΡΩΤΗΣΗ 19^η: Πότε λέμε ότι το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$ ή το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$;

Β. ΠΑΡΑΔΕΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - \kappa x^2 + 5x + \kappa$.
2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους το πολυώνυμο $f(x) = 3x^2 - 7x + 5$ παίρνει τη μορφή $f(x) = \alpha x(x+1) + \beta x + \gamma$.
3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ έχει ρίζες το -2 και το 3.
4. Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες το $x-1$ είναι παράγοντας του $g(x) = \kappa^2 x^4 + 3\kappa x^2 - 4$.
5. Να υπολογίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + 1$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

β) Συμπληρωματικά παραδείγματα και εφαρμογές.

6. Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα της μορφής $x-p$ που δίνονται είναι παράγοντες του $P(x)$.

α) $P(x) = x^4 - 25x^2 + 144$ $x+3$

β) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ $x-1 - \sqrt{3}$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{3}{x-1}$ και $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $\frac{f}{g}$.

8. Να επιλύσετε την εξίσωση $9x^3 - 6x^2 + x = 2(9x^2 - 1) - (1-3x)(x+3)$

9. Αν n είναι άρτιος θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι το $x+\psi$ είναι παράγοντας του $x^n - \psi^n$.

10. Να αποδείξετε ότι, αν το n είναι παράγοντας του μ , τότε και το $x^n - \alpha^n$ είναι παράγοντας του $x^\mu - \alpha^\mu$ (μ, n θετικοί ακέραιοι).

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Τι πολυώνυμο είναι το τριώνυμο
 $αχ^2+βχ+γ = 0$, $α \neq 0$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Κάθε μονώνυμο είναι
πολυώνυμο. Ισχύει το
αντίστροφο;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Ποιος είναι ο βαθμός του
πολυωνύμου $P(x)+Q(x)$ αν
 $P(x) = 3x^ν+5$, $Q(x)=8x^κ+7$
με $ν > κ$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Το μηδενικό πολυώνυμο είναι
σταθερό πολυώνυμο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Αν $υ(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης
 $\frac{\Delta(x)}{\delta(x)}$, τότε το $\delta(x)$ διαιρεί το
 $\Delta(x)-υ(x)$.

2. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
Μονώνυμο του χ	$\Delta(\chi) = \delta(\chi) \cdot \pi(\chi) + \upsilon(\chi)$
Πολυώνυμο του χ	$0\chi^v + 0\chi + 0$
Μηδενικό πολυώνυμο	$\alpha \chi^v, \alpha \neq 0, v \in \mathbb{N}^*$
Αριθμητική τιμή πολυωνύμου για $\chi = \rho$	$P(\chi) = (\chi - \rho) \pi(\chi) + P(\rho)$
Αλγοριθμική διαίρεση	$\alpha_v \chi^v + \dots + \alpha_1 \chi + \alpha_0$
Διαίρεση πολυωνύμου με $\chi - \rho$	$P(\rho)$

Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις.

α) Αν το άθροισμα δύο μη μηδενικών είναι μη πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το $\chi - \rho$ είναι

γ) Ένα πολυώνυμο $P(\chi)$ έχει παράγοντα το $\chi - \rho$ αν και μόνο αν

Διατάξτε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

Διατάξτε τα παρακάτω πολυώνυμα ανάλογα με το βαθμό τους από τον μεγαλύτερο στο μικρότερο .

α) $P(\chi) = \chi^2 - 7\chi + 5$, $Q(\chi) = 3\chi - 4\chi^3$ $\Pi(\chi) = 0\chi^4 + 2\chi$

β) $P(\chi) + Q(\chi)$, $P(\chi) \cdot \Pi(\chi)$, $\frac{Q(x)}{\Pi(x)}$, $[Q(x)]^2$ όπου $P(\chi)$, $Q(\chi)$, $\Pi(\chi)$ τα πολυώνυμα

του α) ερωτήματος.

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Τι βαθμού είναι το πολυώνυμο $P(x) = 3x^2 - 7x^5 + 8$; Είναι

Α 1^ο βαθμού

Β 2^ο βαθμού

Γ 5^ο βαθμού.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Δύο πολυώνυμα είναι του ίδιου βαθμού με ίσο αριθμό όρων.

Α Τα πολυώνυμα είναι ίσα.

Β Τα πολυώνυμα μπορεί να είναι ίσα.

Γ Δεν είναι ίσα ποτέ τα πολυώνυμα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Το άθροισμα δύο μη μηδενικών πολυώνυμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο με βαθμό

Α ίσο με τον μέγιστο των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

Β μικρότερο ή ίσο με τον μέγιστο των βαθμών.

Γ μεγαλύτερο του μέγιστου των βαθμών.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Η διαίρεση δύο πολυωνύμων

Α γίνεται πάντοτε

Β γίνεται όταν ο βαθμός του $\delta(x)$ είναι \leq του βαθμού του $\Delta(x)$.

Γ γίνεται όταν το υπόλοιπο είναι μηδέν.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Η διαίρεση δύο πολυωνύμων είναι τέλεια όταν

Α το πηλίκο είναι τέλειο τετράγωνο.

Β το $v(x)$ είναι μηδέν.

Γ ο διαιρέτης είναι δευτέρου βαθμού.

4.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε.....

με όταν...

Ερώτηση α)

..... η παράσταση

$a_n \chi^n + \dots + a_1 \chi + a_0$ είναι
πολύνυμο;

Ερώτηση β)

..... ο αριθμός ρ είναι ρίζα
του πολυωνύμου $P(\chi)$;

Ερώτηση γ)

..... ένα πολύνυμο $P(\chi)$ είναι
σταθερό;

Ερώτηση δ)

..... ένα πολύνυμο $P(\chi)$ είναι
μηδενικό;

Ερώτηση ε)

..... δύο πολύνυμα είναι ίσα;

Ερώτηση στ)

..... η διαίρεση $\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ είναι
τέλεια;

Ερώτηση ζ)

..... το πολύνυμο $Q(\chi)$
διαιρεί το πολύνυμο $P(\chi)$;

Ερώτηση η)

..... ένα πολύνυμο $P(\chi)$ έχει
παράγοντα το $\chi - \rho$;

5.ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ**Διατυπώσεις των θεμάτων.**

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6$ και $g(x) = 5x^2 - 3x + 6$.
Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f-g$ και $f.g$.
12. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x+1)^{2v} - x^{2v} - 2x - 1$, $v \neq 0$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $2x^3 + 3x^2 + x$.
13. ι) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $ax + \beta$,
 $a \neq 0$ είναι $v = P(-\frac{\beta}{a})$.
ιι) Να βρείτε, για τις οποίες το πολυώνυμο $ax^3 + \beta$ διαιρείται με το $ax + \beta$.
14. Με την βοήθεια του σχήματος HORNER μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο
 $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και να βρείτε το ηλίκο.
15. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $(2x+1)P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3x + 1$.

6. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

16. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ , για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + \mu x + 6$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει $P(-2) = -12$.

17. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x) = (9\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (9\lambda^2 - 4)x - 3\lambda + 2$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

18. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq -1$ να ισχύει

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x + 1}$$

19. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο. Δείξτε ότι οι διαιρέσεις $P(x+1) : (x-1)$

και $P(x + \frac{3}{2}) : (x - \frac{1}{2})$ έχουν το ίδιο υπόλοιπο.

20. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 3x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.