ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 10^{Ο}

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Το

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

A

► ΤΙ ΠΡΟΣΕΧΟΥΜΕ

►ΚΛΕΙΔΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Πρέπει να γνωρίζουμε καλά

- Ορισμούς και γεωμετρικές ερμηνείες παραγώγων
- Κανόνες παραγώγισης απλων και σύνθετων συναρτήσεων
- Την εξίσηση εφαπτόμενης καμπύλης και την αντίστοιχη θεωρία από το κεφάλαιο 2 Μαθηματικών κατεύθυνσης Β Λυκείου
- Τα θεωρήματα ROLLE και ΘΜΤ
- Τις συνέπειες ΘΜΤ
- Τα θεωρήματα Μονοτονίας και FERMAT
- Ορισμούς και θεώρημα κυρτών , κοίλων συνάρτησης.
- Ορισμούς ασυμπτώτων και το κριτήριο για την πλάγια ασύμπτωτη
- Τα θεωρήματα DE L HOSPITAL

2. ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

Μην ξεχνάμε ότι η εφαπτομένη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_o)$ και εξίσωση $y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$.

Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε το σημείο επαφής $(x_o,f(x_o))$.

Αν δεν δίνεται ή δεν προκύπτει από κάποιο δεδομένο υποθέτουμε ότι $A(x_o,f(x_o))$ είναι το σημείο επαφής και το προσδιορίζουμε χρησιμοποιώντας τις παρακάτω γνώσεις

- Αν δίνεται ότι η εφαπτόμενη ευθεία (ε) είναι παράλληλη σε γνωστή ευθεία (δ) τότε $\lambda_\varepsilon=\lambda_\delta$ δηλαδή $f'(x_0)=\lambda_\delta$
- Αν δίνεται ότι η εφαπτόμενη ευθεία (ε) είναι κάθετη σε γνωστή ευθεία (δ) τότε $\lambda_\varepsilon \lambda_\delta=-1$ δηλαδή $f'(x_0)\cdot\lambda_\delta=-1$
- Αν δίνεται ότι η εφαπτόμενη ευθεία (ε) είναι κάθετη στον άξονα χ΄χ τότε $\lambda_\varepsilon=0$ δηλαδή $f'(x_0)=0$
- Αν δίνεται ότι η εφαπτόμενη ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα χ΄χ υπό γνωστή γωνία ωτότε $\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi\omega$ δηλαδή $f'(x_0)=\varepsilon\varphi\omega$
- Αν δίνεται ότι η εφαπτόμενη ευθεία (ε) διέρχεται από γνωστό σημείο Α(α,β) τότε το οι συντεταγμένες του Α θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) $\psi-f(x_0)=f'(x_0)(\chi-x_0)$ οπότε θα έχουμε την εξίσωση $\beta-f(x_0)=f'(x_0)(\alpha-x_0)$ από την οποία και υπολογίζουμε το x_0

Στις ασκήσεις που αναφέρονται σε κοινή εφαπτόμενη των

C_f , C_g στο κοινό τος σημείο $A(x_o, f(x_o))$ χρησιμοποιούμε τους τύπους $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$

3. ΡΙΖΕΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Αν έχουμε ζητούμενο : « να δείξετε ότι υπάρχει x_o ώστε

$f(x_0) = k \ (1)$ ή $f'(x_0) = k \ (2)$...»

εργαζόμαστε σύμφωνα με την παρακάτω σειρά

- Ενδεχομένως να χρειάζεται μια απλή επίλυση εξίσωσης
- Χρησιμοποιούμε Θ. Bolzano ή Θ. Ενδιάμεσων Τιμών ή Σύνολο Τιμών αν έχουμε εξίσωση της μορφής (1)
- Χρησιμοποιούμε Θ. Rolle ή ΘΜΤ για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \kappa x$ αν έχουμε εξίσωση της μορφής (2)
- Fermat εφόσον διαπιστώνεται η ύπαρξη ακροτάτου

Μοναδικότητα ρίζας

Α. Αν έχουμε λύσει την εξίσωση τότε προκύπτει άμεσα.
Β. Με τη βοήθεια της μονοτονίας, «1-1»
Γ. Με τη βοήθεια του **Rolle** και **απαγωγή σε άτοπο.**

Το πολύ μια ρίζα

Α. Με τη βοήθεια της μονοτονίας
Β. Με τη βοήθεια του **Rolle** και **απαγωγή σε άτοπο.**

4. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

- Ελέγχουμε αν αποδεικνύεται άμεσα από τα δεδομένα
- **Με χρήση Μονοτονίας:** Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη οπότε θα είναι και 1-1 και κατά συνέπεια $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ......
- **Με χρήση Θ.FERMAT**

5. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ - ΠΡΟΣΗΜΟ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

- **Επίλυση ανίσωσης**: Μπορεί το πρόσημο να προκύπτει άμεσα από την επίλυση μιας εύκολης ανίσωσης
- **Χρήση Θ. Bolzano**: Αν η συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και $\neq$ 0 τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Το πρόσημό της μπορεί να

προκύψει αν γνωρίζουμε ή μπορούμε να βρούμε κάποια τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό, διαφορετικά απλά διατηρεί σταθερό πρόσημο.

- **Με χρήση του Θ. Μονοτονίας**: Για ανίσωση της μορφής $A(x) > B(x) \Leftrightarrow A(x) - B(x) > 0$ μεταφέρουμε τους όρους στο 1^0 μέλος και θεωρούμε την βοηθητική συνάρτηση $f(x) = A(x) - B(x)$

  Αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και κάπου μηδενίζει στο σημείο αυτό αλλάζει πρόσημο

  Πχ : Αν f γνησίως αύξουσα στο IR και $f(x_o) = 0$ τότε:

  για κάθε χε$(-\infty, x_o)$ ισχύει: $x<x_o \Leftrightarrow f(x) < f(x_o) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και

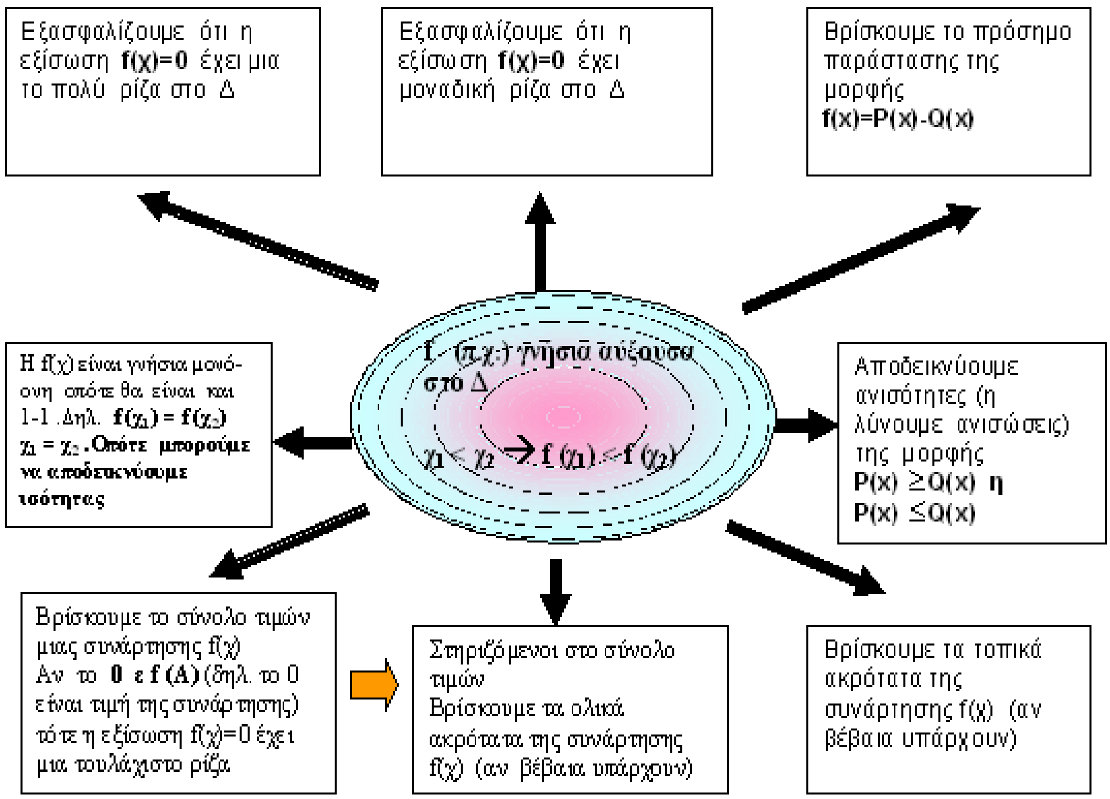
  για κάθε χε$(x_o, +\infty)$ ισχύει: $x>x_o \Leftrightarrow f(x) > f(x_o) \Leftrightarrow f(x) > 0$
- **Με χρήση του ΘΜΤ** όταν η ΄΄βοηθητική συνάρτηση΄΄ δεν είναι γνωστό ότι παραγωγίζεται οπότε δεν μπορουμε να εφαρμόσουμε άμεσα το θ μονοτονίας Δες τις ασκήσεις 3.48 Α και 3.89

- **Με χρήση Ακροτάτων:** Αν η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή έναν αριθμό κ τότε όλες οι τιμές της θα είναι μεγαλύτερες από τον αριθμό αυτό. Αν η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή έναν αριθμό κ τότε όλες οι τιμές της θα είναι μικρότερες από τον αριθμό αυτό.

- **Με χρήση Κυρτότητας:** Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ και Α $(x_o, f(x_o))$ ένα τυχαίο σημείο της με x_o ε Δ τότε η γραφική της παράσταση της f βρίσκεται πιο πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο Α. Αυτό είναι ισοδύναμο με την ανίσωση: $f(x) \geq y$ για κάθε x ε Δ, με $y = f^{/}(x_o(x - x_o) + f(x_o)$ Δηλαδή:

  $f(x) \geq f^{/}(x_o(x - x_o) + f(x_o)$ για κάθε x ε Δ, η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής δηλαδή για $x=x_o$.
- Ομοίως αν η f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ: $f(x) \leq f^{/}(x_o(x - x_o) + f(x_o)$ για κάθε x ε Δ, η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής δηλαδή για $x=x_o$
- **Με χρήση του Συνόλου τιμών .** Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης μας δείχνει ακριβώς ποιες είναι οι τιμές της συνάρτησης οπότε ενδεχομένως να προκύπτει και το πρόσημό της.

6. Τα ΄΄Πλοκάμια΄΄ επιρροών της μονοτονίας



7. Όταν η άσκηση δίνει ανισότητα ,τότε

Α. Η ανισότητα μπορεί να δίνεται για να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη κάποιου ζητούμενου, π.χ. την εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης, την εύρεση μιας άλλης ανισότητας, …..

Β. Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί κάποιο όριο με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής. ($f^2(x)+g^2(x)\le x^4$ για κάθε χ τότε f,g συνεχείς , παραγωγίσιμες στο 0;)

Γ. Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μαζί με την ιδιότητα των ορίων: Αν τα όρια των f,g στο x_o υπάρχουν και είναι αριθμοί και οι συναρτήσεις κοντά στο x_o είναι άνισες τότε και τα όριά τους θα είναι ομοιοτρόπως άνισα.

Δ. **Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη ότι μια συνάρτηση έχει ελάχιστο ή μέγιστο σε ένα εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη οπότε ….. FERMAT**.

8. Ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή σε ένα διάστημα, μπορούμε, εφόσον γίνεται, να δείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη και ότι έχει παράγωγο 0 .

9. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι δύο συναρτήσεις είναι ίσες σε ένα διάστημα , μπορούμε, εφόσον γίνεται, να δείξουμε ότι η διαφορά τους είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο 0, οπότε η διαφορά τους θα είναι c , κατόπιν δείχνουμε ότι το c είναι 0.

10. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [α , β] τότε το σύνολο τιμώντης συνάρτησης είναι $f(A)=\left[f(\alpha),f(\beta)\right]$
- Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα (α , β) τότε το σύνολο τιμώντης συνάρτησης είναι

$$f(A)=\left(\lim_{x\to\alpha^+}f(x),\lim_{x\to\beta^-}f(x)\right)$$

- Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα [α , β] τότε το σύνολο τιμώντης συνάρτησης είναι $f(A)=\left[f(\beta),f(\alpha)\right]$
- Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα (α , β) τότε το σύνολο τιμώντης συνάρτησης είναι

$$f(A)=\left(\lim_{x\to\beta^-}f(x),\lim_{x\to\alpha^+}f(x)\right)$$

B

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

3.1 Τι ονομάζουμε παράγωγο μιας συνάρτησης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

3.2 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in R$, τότε ισχύει

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} \quad ;$$

3.3 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να δείξετε ότι είναι συνεχής στο x_0 .Ισχύει ο αντίστροφο ;

3.4 Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης f στο x_0 ;

3.5 Έστω η συνάρτηση $f(x) = c$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f΄(x) = 0$.

3.6 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f΄(x) = 1$.

3.7 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f΄(x) = \nu x^{\nu-1}$.

3.8 Έστω η συνάρτηση $f(x) =$ ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f΄(x) =$ συνx.

3.9 Έστω η συνάρτηση $f(x) =$ συνx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f΄(x) =$ -ημx.

3.10 Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

α) $(\lambda f(x))' = \lambda(f(x))'$
β) $(f+g)'(x_o) = f'(x_o)+g'(x_o)$

3.11 Έστω η συνάρτηση f(x) =ln|x|. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $IR-\{0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

3.12 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\alpha^x \ln\alpha$

3.13 Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- οι f,g είναι συνεχείς στο *Δ* και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*,

τότε υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x)=g(x)+c$$

3.14 Να διατυπώσετε και να γράψετε τις γεωμετρικές ερμηνείες στα θεωρήματα ROLLE και Θ.Μ.Τ.

3.15 Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι *σ υ ν ε χ ή ς* σε ένα διάστημα *Δ*.

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η *f* είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η *f* είναι ησίως φθίνουσα σε όλο το *Δ*

3.16 Αν η f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα Δ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε να αποδειχθεί ότι $f'(x_0)=0$.

3.17 Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

3.18 Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

3.19 Σε κάθε μία περίπτωση από τις παρακάτω να βάλετε σε κύκλο το γράμμα (**Σ**) αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα (**Λ**) αν ο σχυρισμός είναι λάθος αιτιολογώντας την επιλογής σας.

a. Αν $f'(x)\rangle 0,\ \chi\in\Delta$ τότε $f\uparrow\ \chi\in\Delta$	**Σ**	**Λ**
b. Αν $f\uparrow\ \chi\in\Delta$ τότε $f'(\chi)\rangle 0,\ \chi\in\Delta$	**Σ**	**Λ**
c. Αν f παραγωγίσιμη $\chi\in\Delta$ τότε f συνεχής $\chi\in\Delta$	**Σ**	**Λ**
d. Αν f συνεχής $\chi\in\Delta$ τότε f παραγωγίσιμη $\chi\in\Delta$	**Σ**	**Λ**
e. $f'(x_0)=[f(x_0)]'$	**Σ**	**Λ**
f. Αν $f(2)=4$ τότε $f'(2)=(4)'=0$	**Σ**	**Λ**

3.20

Να απαντήσετε με Σ ή Λ

- Αν $f(x)=e^x$, τότε $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}$.
- Για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=(x-2)^2e^x$. Τότε η C_f στο σημείο (2, f (2)) δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.
- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, τότε ισχύει $(f(f(x)))'=(f'(x))^2$.

3.21

Να απαντήσετε με Σ ή Λ

- Σε κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού είναι η επιτάχυνση αυτού**.**
- Αν $f'(x)=4x^3$, τότε ισχύει πάντα $f(x)=x^4$.
- Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$, είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $(\alpha^x)'=x\alpha^{x-1}$.

Για μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R ισχύει

- αν η f είναι άρτια, τότε η f ΄ είναι περιττή
- αν η f είναι περιττή, τότε η f ΄ είναι άρτια

3.22

Να απαντήσετε με Σ ή Λ

- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και f (α) $\neq$ f (β), α, β$\in$ R, α < β, τότε ισχύει f ΄ (x) $\neq$ 0 για κάθε x $\in$ (α, β).
- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $x_0 \in$ R, τότε για κάθε x $\in$ R υπάρχει ξ $\in$ R ώστε f (x) - f (x_0) = f ΄ (ξ) (x - x_0).
- Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο ριζών της f, υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f ΄.
- Για τη συνάρτηση f (x) = ημx, x $\in$ R, υπάρχει ουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο μεγαλύτερο από κάποιο τοπικό μέγιστο
- Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f, με f ΄ (x) > 0 για 2 < x < 7. Αν f (3) = 5, τότε μπορεί να ισχύει f (5) = 4.
- Αν f ΄ (x) = x^2 + 2005, τότε η εξίσωση f (x) = 0 έχει το πολύ μια ρίζα.
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με f (α) = f (β) και f ΄΄ (x) > 0, για κάθε x $\in$ [α, β], τότε η εξίσωση f ΄ (x) = 0 έχει μια μόνο ρίζα στο (α, β).
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

3.23 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + x + 3$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη

α) στο σημείο $x_0 = 2$ και

β) στο σημείο $x_0 = 1$.

3.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} - x$

Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 9} + f(x) = 0$

3.25 Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0.

Στήλη Α συναρτήσεις	**Στήλη Β εφαπτόμενες**
α. $f(x)=3x^3$, $x_0=1$	1. $y=-2x+\pi$
β. $f(x)=ημ2x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$	2. $y=\frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x)=3\lvert x\rvert$, $x_0=0$	3. $y=9x-6$
δ. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$	4. $y=-9x+5$
	5. δεν υπάρχει

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2000

3.26 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = f(ημx)$

3.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha\sqrt{x^2+3}+\beta, & x\geq 1 \\ 3x^2+x+1, & x<1 \end{cases}$.Αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, να βρεθούν οι α , $\beta\in R$

3.28 Έστω η συνάρτηση f $f(x)=\begin{cases} x^5\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} & \alpha\nu\ x\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x=0 \end{cases}$.Να δείξετε ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

3.29 Για τη συνάρτηση f / R ισχύει ότι $f(2)=f'(2)=3$.Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-9}{x^2-3x+2}$

3.30 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και για κάθε x ε R ισχύει $f^3(x)-xf^2(x)+x^2f(x)=x^2\eta\mu x$ (1) να δείξετε ότι $f'(0)=1$

3.31 Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο R και ισχύει ότι $f(x^2+1)-f(x+1)=x^3+2x^2+3x+1$ για κάθε $x\in R$.Να βρείτε την παράγωγο της f(x) στο $x_0=1$

3.32 Αν για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι $|f(x)-f(\psi)|\leq x^2-2x\psi+\psi^2$ (1) για κάθε $x,\psi\in R$.Να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο R.

3.33 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ β) $g(x)=(1+2x^3)\ln x$ γ) $h(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

3.34 **(α)**Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με f(x)>0 $x\in\Re$. Να βρείτετην παράγωγο της συνάρτησης F με $F(x)=[f(x)]^x, x\in\Re$.

(β)Έστω α>0. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g με

$g(x)=\alpha^{\sqrt{x^2+1}}, x\in\Re$. **1991-ΔΕΣΜΕΣ**

3.35

Να λυθεί η εξίσωση : $z^3+[(1-\alpha)i-1]\cdot z^2+[\alpha+(\alpha-1)i]z-\alpha=0$.
Αν $A(z_1),B(z_2),\Gamma(z_3)$ οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης στο επίπεδο, z_3 είναι αυτή που περιέχει το α και το α απομακρύνεται πάνω στο θετικό ημιάξονα με ρυθμό $\upsilon=\frac{d\alpha}{dt}=5$ να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ όταν α=3.

3.36

Α.Μία συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $\Re$ και ισχύει

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-\sqrt{x^2+4}}{x}=1$ Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_o=0$

Β. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g με $f(0)=g(0)=0$ ώστε $f(x)\cdot g(x)=x$

3.37

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ άρτια και παραγωγίσιμη και $g:R\to R$ με $g(x)=\left(\frac{x^4}{4}+7x+1\right)f(x)+x^2$.Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon):\psi-7f(0)x+3=0$.

3.38

Οι συναρτήσεις f ,g ,h έχουν κοινό πεδίο ορισμού το R και ικανοποιούν τις σχέσεις $f(x)\le g(x)\le h(x)$ (1) ,f(2)=g(2)=h(2)=3
Επίσης οι g , h είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=2$ με f΄(2)=h΄(2)=2005 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $x_0=2$.

3.39

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x+1}$ και $g(x)=\frac{2}{x}$.
Να βρείτε τους α , β $\in R$ ώστε οι γραφικές τους παραστάσεις να τέμνονται σε σημείο της ευθείας $x=1$

3.40

Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει

$f(x-2)\le x^2-3x+2\le f(x-3)+2x-4 \quad x\in R$.

Έστω ε η μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M\left(-\frac{1}{2},0\right)$ και τέμνει τη C_f στα διαφορετικά σημεία Α και Β.

α)Να βρείτε τον τύπο της f

β)Να δείξετεβ ότι οι εφαπτόμενες στα Α,Β τεμνονται κάθετα και το σημείο τομής τους ανήκει στην σταθερή ευθεία $\psi=-\frac{1}{2}$

3.41

Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x)\sigma\upsilon\nu x+g(x)\eta\mu x=g(x)\sigma\upsilon\nu x$ και $g(0)=1992$ **1992-ΔΕΣΜΕΣ**

3.42

Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)-\alpha^3=f(\beta)-\beta^3$ (1).Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0)=3x_0^2$

3.43

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ 2 φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και η η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.Έστω οι αριθμοί α , β , γ , δ ανήκουν στο $(0,+\infty)$ τέτοιοι ώστε α<β<γ<δ και α+δ=β+γ και $A=f(\alpha)+f(\delta)$ και $B=f(\beta)+f(\gamma)$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

3.44

Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με

$f^2(x)+2005f(x)=e^{x+1}+x^5+x+2006$.

Δείξετε ότι δεν έχει τοπικά ακρότατα.

3.45

Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f(x) τέτοια ώστε $f(0)=1$ και $f(x)\le e^{-2x}$ για κάθε $x\in R$.Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$.

3.46

(α)Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - 2 + \ln(x+1)$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(β)Να δείξετε ότι η εξίσωση $2e^x = 2 - \ln(x+1)$ έχει μοναδική λύση την x=0

3.47

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία-ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$

3.47

Α. Έστω η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \geq 0$.Αν $f(0) = 0$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = 2003e^x + \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$.

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>
Στο Α ερώτημα δεν μπορούμε να εργαστούμε με χρήση βοηθητικής συνάρτησης , στην εύρεση του προσήμου της $h'(x)$ και αυτό γιατί δεν δίνεται ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R.

Β. Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$ και η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \geq 0$.Αν $f(0) = 0$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = x^3 + e^x + \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$.

3.48

Σημείο Μ κινείται μεταξύ δύο σημείων Α και Β που απέχουν 10m με ταχύτητα 2m/sec. Για κάθε θέση του σημείου Μ θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΜΓ και ΜΒΔ.

- i Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των 2 τριγώνων ως συνάρτηση του χρόνου.
- ii Σε ποια χρονική στιγμή το εμβαδό που ορίζεται από την παραπάνω συνάρτηση γίνεται ελάχιστο;
- iii Σε ποια θέση του σημείου Μ συμβαίνει αυτό και πόσο είναι το ελάχιστο αυτό;
- iv Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού όταν (ΑΜ) = 8m

3.49

Δείξτε ότι $\ln(1+x^2)^2 \geq 2x^2 - x^4 \quad \forall x \geq 0$

3.50

Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x-1-ημ2x$, x∈R, είναι γνησίως αύξουσα.

β. Η εξίσωση $x^3+2x-1=ημ2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (0,1). **2001-ΔΕΣΜΕΣ**

3.51

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{x^2+(\alpha x^2+\beta+1)e^{\nu x}}{2+e^{\nu x}}$

Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in R$ ώστε η $f(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στο R

3.52

Έστω μια συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο για $\chi\in[\alpha,\beta]$ Αν υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{f(\gamma)-f(\alpha)}<0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

3.53

Α. Δείξτε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ ισχύει $f'(x)=0$, τότε η f είναι σταθερή σ' όλο το διάστημα Δ, δηλαδή ισχύει $f(x)=c$ για κάθε $\chi\in\Delta$

Β. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f(0)=\alpha$ και $f'(x)=\alpha f(x)$ $\alpha\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot f(-x)$ είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της

3.54

Δίνεται η συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,3]$ και ισχύει $2f(2)=f(1)+f(3)$.Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,3)$: $f''(x_0)=0$.

3.55

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to R$ με $f(x)=ημ^2x-\sqrt{2}ημx+2\sqrt{2}$

3.56

Έστω η συνάρτηση f ,2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{f(x)}{x}+5$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της C_f σε κάθε σημείο της , βρίσκεται κάτω από την C_f.

3.57

Έστω η $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο [-1,1] για την οποία ισχύει:

$f(x)+[f(x)]^{1995}=x^3+x-2$ για κάθε $x\in[-1,1]$

a. Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται
b. Δείξτε ότι η $\mathbf{g(x)=\sqrt{f(x)}}$ δεν ορίζεται στο (-1,1)

3.58

α) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο (0,+∞).Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g(x)=lnf(x) χεΔ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση:

$f(x)f''(\chi)\geq[f'(x)]^2$ για κάθε χ ε Δ.

β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x)=\ln(x^2+2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

3.59

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g που έχουν πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση :

$f'(x)=g'(x)+\eta\mu^2 x+e^x$ για $x\in[0,+\infty)$

Να αποδείξετε ότι:

$f(0)+g(x)<g(0)+f(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

1996-ΔΕΣΜΕΣ

3.60

Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν :

- $f'(x)<f''(x)$ για κάθε $x\in R$ και
- $f'(0)=f(0)=0$

Να αποδείξετε ότι

α) $f'(x)<f(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και $f'(x)<f(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$

β)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$h(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ για $x\in R^*$.

3.61 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(e,+\infty)$ και για την οποία ισχύουν :

- $f(e^2)=0$ και
- $f(x)\le \ln x-2$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$

Να αποδείξετε ότι $e^2 f'(e^2)-1=0$.

3.62 Μια εταιρεία παράγει τον μήνα χ μονάδες ενός προϊόντος με κόστος $K(x)=(10000x+10^6)$ δρχ. Τις χ μονάδες τις πουλάει με τιμή $A(x)=(50000-20x)$δρ/ μονάδα. Να βρείτε:

Πόσες μονάδες πρέπει να παράγει, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος και ποια είναι τότε η τιμή πώλησης κάθε μονάδας.

II. Ποιο το μηνιαίο κέρδος στο παραπάνω επίπεδο παραγωγής

Ποια πρέπει να είναι η τιμή πώλησης για να προκύψει μέγιστο κέρδος όταν επιπλέον έχουμε επιβολή φόρου 4000 δρχ/ μονάδα

3.63 Έστω $f,g:R\to R$ είναι συναρτήσεις συνεχείς στο $\Re$ τέτοιες ώστε να ισχύει

$f(x)-g(x)=x-4$, για κάθε $x\in\Re$

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση ψ=3χ-7 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , καθώς $x\to+\infty$

α) Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{x\cdot f(x)-3x^2+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση ψ=2χ-3 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g καθώς $x\to+\infty$

2000- ΔΕΣΜΕΣ

3.64 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f(x+\psi)=\alpha x\psi+\psi^2+f(x)$ (1) με $x,\psi\in R$ και $\alpha\in R$. Δίνεται ακόμη ότι $f(1)=-1$ και $f(2)=2$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R

ii) Να βρείτε τον τύπο της f

3.65 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0 , 1] και ισχύει f ΄(x)>0 για κάθε $x\in(0\ ,\ 1)$. Αν f(0) = 2 και f(1) = 4 , να δείξετε ότι :

α) η ευθεία y = 3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0\ ,\ 1)$.

β) υπάρχει $x_1 \in (0\ ,\ 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \dfrac{f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5})}{4}$

γ) υπάρχει $x_2 \in (0\ ,\ 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2\ ,\ f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x+2000$. **ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ - 2000**

3.66

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ παραγωγίσιμη στο για την Οποία ισχύει ότι $f^3(x) + 4f(x) = 4x \quad (1) \quad x \in R$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της

ii Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής , αν υπάρχουν

iii) Αν $g(x) = 2x - f(x)$ να μελετήσετε τη g ωςπρος τη μονοτονία

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - x - 2) + 2x + 4 \le 2x^2$

3.67

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.Να δείξετε ότι

i) $f(\alpha) \neq f(\beta)$

ii) Υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοι ώστε $5f(x_0) = 2f(\alpha) + 3f(\beta)$

iii)Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) > 0$

Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ τέτοια ώστε :
$2xf(x) + (x^2+1)f\,'(x) = e^x$ για κάθε $x \in \Re$, με $f(0) = 1$.

3.68

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \Re$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ - 2000

3.69

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x + \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$

i)Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτινία

ii)Να λύσετε την ανίσωση

$(2^{x-1} + 3^{x-1}) \cdot 5^{1-3x} < (2^{1-3x} + 3^{1-3x}) \cdot 5^{x-1}$

3.70

Έστω η συνάρτηση $f:[2,4]\to[-2,2]$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ,με $f(2)=\frac{1}{2}$ και $f(4)=1$.Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+xf(x)$ με $x\in[2,4]$.

Να δείξετε ότι

i) Υπάρχει $x_0\in(2,4)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$

i i)Η εξίσωση $f'(x)\left(e^{f(x)}+x\right)+f(x)=0$,έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

i i i)Υπάρχει $\xi\in R$,τέτοιο ώστε $g''(\xi)=f'(\xi)\left[e^{f(\xi)}f'(\xi)+2\right]$

3.71

Έστω η συνάρτηση f ,δύο φορές παραγωγίσιμη στο R ,με $f(x)+xf'(x)>2f'(x)$,για κάθε $x\in R$.Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

3.72

Έστω η συνάρτηση f: [α, β]$\to$R, η οποία είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και f(α)=2β, f(β)=2α.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=2x έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, $\xi_2\in$(α, β) τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\, f'(\xi_2) = 4$.

2001-ΔΕΣΜΕΣ

3.73

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}, x \geq e$.

i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία

ii) Να δειχθεί ότι : $x^{x+2001} > (x+2001)^x$

iii) Να δειχθεί ότι: $x^{2001} > \left(1+\frac{2001}{x}\right)^x$

3.74

α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος (c) των εικόνων του μιγαδικού $\mathbf{z = x + yi, x, y \in \Re}$, για τον οποίο ισχύει:

$$4|z|^2 - 4\left(\mathrm{Im}(z) + \frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 0$$

β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της (c) οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρεθούν οι μιγαδικοί που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής των εφαπτομένων με την καμπύλη (c).

3.75

Να αποδείξετε ότι $\mathbf{e^x \geq x^2 + 1}$ για κάθε $\mathbf{x \geq 0}$.

3.76

Έστω f κυρτή συνάρτηση στο R και τέτοια ώστε $f(x) = f(4-x)$ για κάθε $x \in R$.

Να δείξετε ότι

α) $f'(2) = 0$

β) $f_{\min}(x) = f(2)$

3.77

Έστω η συνάρτηση f είναι δυό φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) + xf'(x) > f'(x)$,για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (x-1)f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f.

3.78

Έστω f: $(0,+\infty) \to \Re$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ και α, β, γ >0 με α<β<γ τέτοια ώστε f(α) = α , f(β) = β , f(γ) = γ . Να αποδειχθεί ότι :

i) Υπάρχουν κ, λ τέτοια ώστε $f(\kappa) = \kappa f'(\kappa)$ και $f(\lambda) = \lambda f'(\lambda)$

ii) Αν η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(κ, $f(\kappa)$) και Β(λ, $f(\lambda)$) διέρχεται και από το σημείο Ο(0,0) , να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 > 0 : f''(x_0) = 0$

3.79

Για την συνάρτηση $f : R \to R$ ισχύει ότι

$2x-3 \le f(x) \le \dfrac{2x^3+3x^2+1}{x^2}$,για κάθε $x \ne 0$.

Να εξεταστεί αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

3.80

Αν η συνάρτηση $f : R \to R$ είναι παραγωγίσιμη και $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 2004$,να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη.

3.81

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ , λ με κ<λ και η συνάρτηση $f(x) = (x-\kappa)^5(x-\lambda)^3$ με $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{5}{x-\kappa} + \dfrac{3}{x-\lambda}$, για κάθε $x \ne \kappa$ και $x \ne \lambda$.

β) Η συνάρτηση $g(x)=\ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ , λ) .

1995- ΔΕΣΜΕΣ

3.82

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Re$ για την οποία ισχύει : $2f(x)+f(2006-x)+x=0$, για κάθε $x \in \Re$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{\ln x}$.

3.83

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα [α , β]. Αποδείξτε ότι

- αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο [α , β] τότε $f(f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) < \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2})$
- αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο [α , β] τότε f $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) > \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ JENSEN

3.84

Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, τέτοια ώστε : $f(25) + f(20) = f'(35) + f(10)$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (10, 35)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (10, 35)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

3.85

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο IR με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = -f(2-x) \quad \text{και} \quad f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^o .

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ - 2004-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

3.86

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x$, $x \in \Re$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.

γ) Θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της , να βρείτε την παράγωγο της f^{-1} στο σημείο 1 .

3.87

α) Έστω f μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση στο (α, β) αν και μόνο αν $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^7 + x^5 + 2x - \lambda = 0$ έχει λύση στο $(-1, 1)$ αν και μόνο αν $\lambda \in (-4, 4)$.

3.88

Αν η f κυρτή στο IR και $f(0) = 0$ βρείτε το πρόσημο της

$$g(x) = f(x) - xf'(x)$$

3^0 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΧΡΟΝΟΣ 3 ΩΡΕΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ Παράγωγοι
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ

ΘΕΜΑ 1^0

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, δείξτε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

Β. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως (Σ) σωστό ή (Λ) λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν για την f ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε η γραφική παράσταση της f έχει σ' ένα τουλάχιστον σημείο της οριζόντια εφαπτομένη.
ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ii) Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$ τότε η f δεν έχει ρίζα στο (α,β). **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

iii) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε $f'(x)>0$ στο Δ.
ΜΟΝΑΔΕΣ 2

iv) Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του Q(x), δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.
ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ΘΕΜΑ 2^0

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, α,β,γ $\in$R. Αν ισχύει:

$\dfrac{5}{2}f''(-1)=f'(1)+f(1)-\beta$ τότε είναι:

α. 2α=β+γ, **β.** α=β+γ, **γ.** 3α=β+γ

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sigma\varphi(h+\frac{\pi}{3})-\sigma\varphi(\frac{\pi}{3})}{h}$ ισούται με

α. $-\frac{\pi}{3}$ **β.** -3 **γ.** $-\frac{1}{3}$ **δ.** $-\frac{4}{3}$ **ε.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ. Αν η συνάρτηση $f(x)=ax^3+3x^2+x+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο R τότε:
α. α>0 **β.**α<ο **γ.** α=1 **δ.** α>3 **ε.** $\alpha\geq 3$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν: $f(1)=2,\ g'(2)=3=f'(1),$ τότε η $(gof)'(1)$ είναι ίση με:
α. 9 **β.**8 **γ.**6 **δ.**3 **ε.**5

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Ε. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' υπάρχει το πολύ μία ρίζα της f.
Σωστό ή Λάθος;

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 3^0

Α. Να βρείτε τη συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο R και ικανοποιεί τη σχέση: $f'(x)\cdot e^x+f(x)\cdot e^x=2x$ για κάθε $x\in$R αν είναι γνωστό ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α(0, f (0)) διέρχεται από το σημείο Μ(-1,2).

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

Β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και για κάθε x$\in R$ ισχύει $f(x)\cdot \eta\mu x\leq x^2+x$, να δείξετε ότι f(0)=1.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Γ. Να δείξετε ότι για κάθε x>0 ισχύει $e^x>x+1+\frac{x^2}{2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 4^0

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύουν: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $f'(x)=\dfrac{2}{1+e^{f(x)}}$ για κάθε $x\in\Re$ με $f'(0)=1$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f:

i) είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ii) στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\Re$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

iii) έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

Β) Να αποδείξετε ότι:

i) ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=2x+1$ για κάθε $x\in\Re$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντιστροφή της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

iii) Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων. **ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

Γ)

i) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

i) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΛΥΣΕΙΣ

3.1 έως και 3.18 δες αντίστοιχη θεωρία

3.19.

a) (Σ) από θεωρία

b) (Λ) γιατί μπορεί η f να μην έχει παράγωγο

c) (Σ) από θεωρία

d) (Λ) γιατί ισχύει μόνο το αντίστροφο

e) (Λ) γιατί $[f(x_0)]'=0$ για κάθε $x_0\in R$ αφού f (x_o) είναι αριθμός ενώ $f'(x_0)\neq 0$ γενικά

f) (Λ) γιατί αν πχ $f(x)=x^3$ τότε $f'(x)=3x^2$ άρα $f(2)=2^3=8$ ενώ $f'(2)=3\cdot 2^2=12$

3.20 **Σ ,Σ ,Λ**

3.21 **Σ , Λ , Λ ,Σ,Σ**

3.22 **Λ , Λ , Σ ,Λ , Λ , Σ , Σ , Σ**

3.23 $E\iota\nu\alpha\iota\ f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geq 2\\ 5 & x<2\end{cases}$ και παίρνουμε πλευρικά όρια του λόγου μεταβολών στο x_0 =2.Για την παράγωγο στο x_0 = 1 παίρνουμε το 2^0 τύπο……

3.24 Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\left(x^2+9\right)'-1=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1$ οπότε $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+9}+f(x)=$ $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1\right)\sqrt{x^2+9}+f(x)=\ldots=0$

3.25
α→3
β→1
γ→5
δ→2

3.265. $f'(x)=\dfrac{x'\left(x^2+1\right)-x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}$ ....= $\dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$ (1)

$g'(x)=...=-f'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x = = \dfrac{-\eta\mu^2 x+1}{\left(\eta\mu^2 x+1\right)^2}\sigma\upsilon\nu x$

3.27 Αφού η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 =1θα είναι και συνεχής και κατά συνέπεια θα έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$ (1)

Όμως $f(1)=3\cdot 1^2+1+1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\alpha\sqrt{x^2+3}+\beta\right)=2\alpha+\beta$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3x^2+x+1\right)=3+1+1=5$.

Οπότε λόγω της (1) θα έχουμε 2α+β=5 (2) .

- Για $x<1$ έχουμε

$$\lambda(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\left(3x^2+x+1\right)-(2\alpha+\beta)}{x-1}\overset{(1)}{=}\frac{\left(3x^2+x+1\right)-5}{x-1}=\frac{(x-1)(3x+4)}{x-1} \quad (3)$$
$$=3x+4$$

- Για $x>1$ έχουμε $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=...=\dfrac{\alpha(\sqrt{x^2+3}-2)}{x-1}=$

$$\alpha\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\alpha\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}==\alpha\frac{x+1}{\sqrt{`x^2+3}+2}$$ (4) οπότε παίρνουμε τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολών και έχουμε

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\lambda(x)\overset{(3)}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}(3x+4)=3+4=7$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\lambda(x)\overset{(4)}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\alpha\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\dfrac{\alpha}{2}$

Όμως λόγω υπόθεσης η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στι χ_0=1, οπότε θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^-}\lambda(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\lambda(x)\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{2}=7\Leftrightarrow\alpha=14$ και από (1) θα είναι και β=-23

3.28 Είναι $|f(x)|=\left|x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right|=|x|^3\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right|\le|x|^3$ οπότε $-|x|^3\le f(x)\le|x|^3$ και επειδή

$\lim_{x\to 0}\left(-|x|^3\right)=\lim_{x\to 0}|x|^2=0$ από ΚΠ θα έχουμε ότι $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$ και κατά συνέπεια η f θα είναι συνεχής στο χ_0=0.

Για $x\neq 0$ είναι $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}-0}{x}=x^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}$ και

$|\lambda(x)|=\left|x^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right|=|x|^2\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right|\leq|x|^2$ οπότε $-|x|^2\leq\lambda(x)\leq|x|^2$ και επειδή

$\lim_{x\to 0}\left(-|x|^2\right)=\lim_{x\to 0}|x|^2=0$ από κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\lambda(x)=0$

3.29 Λόγω υπόθεσης θα έχουμε $f'(2)=\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=3$ (1)

Θέτουμε $\dfrac{f(x)-3}{x-2}=g(x)\Leftrightarrow f(x)-3=(x-2)g(x)$ (2)

Είναι ακόμη $\lim_{x\to 2}g(x)=3$ και $\lim_{X\to 2}f(x)=3$ (3)

Έχουμε $\lim_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-9}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(f(x)-3)(f(x)+3)}{(x-2)(x-1)}\overset{(2)}{=}$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{(x-2)g(x)(f(x)+3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)(f(x)+3)}{x-1}\overset{(3)}{=}\dfrac{3\cdot(3+3)}{0-1}=-18$

3.30 Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$,θα είναι και συνεχής στο χ_0 και κατά συνέπεια θα ισχύει $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=L\in R$ (2).

Παίρνουμε όρια στη σχέση (1) και έχουμε $\lim_{x\to 0}(f^3(x)-xf^2(x)+x^2f(x))=\lim_{x\to 0}(x^2\eta\mu\chi)\Leftrightarrow$

$L^3-L^2+L=0\Leftrightarrow L\left(L^2-L+1\right)=0\Leftrightarrow L=0$ (Αφού η εξίσωση $L^2-L+1=0$ έχει Δ=-3<0 και κατά συνέπεια δεν έχει πραγμ. ρίζες). Οπότε η (2)$\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ (3)

❖ Στη σχέση (1) διαιρούμε με χ^3 και έχουμε :

$$\frac{f^3(x)}{x^3}-\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}=\frac{\eta\mu x}{x}\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)^3-\left(\frac{f(x)-f(x)}{x-0}\right)^2+\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\eta\mu x}{x}\ (4)$$

Οπότε παίρνοντας όρια , στη σχέση (1) για $x\to 0$ έχουμε,

$L^3-L^2+L=1\Leftrightarrow L^3-L^2+L-1=0\Leftrightarrow L^2(L-1)+(L-1)=0\Leftrightarrow(L-1)(L^2+1)=0\Leftrightarrow$

$L=1$.Δηλαδή $f'(0)=1$.

σχόλιο

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$

θα είναι $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=L\in R$

3.31 Παραγωγίζουμε τη δοσμένη ισότητα(αφού μας δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R) και έχουμε:

$\left[f(x^2+1)-f(x+1)\right]' = (x^3+2x^2+3x+1)' \Leftrightarrow 2xf'(x^2+1)-f'(x+1)=3x^2+4x+3 \Leftrightarrow$ (θέτουμε χ=0)
$-f'(0)=3 \Leftrightarrow f'(0)=-3$

3.32. Η δοσμένη σχέση γράφεται
$|f(x)-f(\psi)| \le (x-\psi)^2 \Leftrightarrow |f(x)-f(\psi)| \le |x-\psi|^2$ (1)
Θέτουμε στην (1) όπου χ το χ+h και όπου ψ το χ και έχουμε
$|f(x+h)-f(x)| \le |x+h-x|^2 \Leftrightarrow |f(x+h)-f(x)| \le |h|^2$ (διαιρούμε με |h|>0)
$\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} \le \frac{|h|^2}{|h|} \Leftrightarrow \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \le |h| \Leftrightarrow -|h| \le \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le |h|$ (2)
Όμως $\lim_{h\to 0}(-|h|)=\lim_{h\to 0}|h|=0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι και
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0\in R$ κατά συνέπεια η f είναι παραγωγίσιμη στο R και $f'(x)=0$.

3.33 α) $f'(x)=\frac{(1+\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-(1+\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{(\sigma\upsilon\nu x)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x-(1+\eta\mu x)(-\eta\mu x)}{(\sigma\upsilon\nu x)^2}=$
$\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu x+\eta\mu^2x}{(\sigma\upsilon\nu x)^2}=\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2x}$

β) $g'(x)=(1+2x^3)'\ln x+(1+2x^3)(\ln x)'=6x^2\ln x+(1+2x^3)\frac{1}{x}$

γ) $h'(x)=\frac{(1-\sqrt{x})'(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}=$
$\frac{\frac{-2}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}=-\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

3.34. (α)Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R και f(x)>0, $x\in\Re$ για την F' θα έχουμε ότι :
$F'(x)=\left\{[f(x)]^x\right\}'=\left[e^{x\ln f(x)}\right]'=e^{x\ln f(x)}[x\ln f(x)]'=[f(x)]^x\left\{(x)'\ln f(x)+x[\ln f(x)]'\right\}=$
$=[f(x)]^x\left\{\ln f(x)+x\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}, x\in\Re.$
(β)Για το πεδίο ορισμού της g έχουμε ότι D(g)=R. Επίσης η g είναι παραγωγίσιμη στο R σαν σύνθεση των παραγωγισίμων στο R συναρτήσεων ω με $\omega(x)=\sqrt{x^2+1}$ και σ με $\sigma(x)=\alpha^x$ συνεπώς θα έχουμε για την $g'(x)$
$g'(x)=\left(\alpha^{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\alpha^{\sqrt{x^2+1}}\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\alpha^{\sqrt{x^2+1}}\ln\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{\alpha^{\sqrt{x^2+1}}\ln x}{\sqrt{x^2+1}} \quad x\in\Re.$

3.35 Προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η z=1. Άρα από το σχήμα Horner έχω ότι η εξίσωση γίνεται : $(z-1)\left(z^2+(1-\alpha)iz+\alpha\right)=0$. Έστω η : $\left(z^2+(1-\alpha)iz+\alpha\right)=0$.

Η $\Delta=(1-\alpha)^2\cdot(-1)-4\alpha=-\left(\alpha^2+2\alpha+1\right)=-(\alpha+1)^2$

Η $z_3=\dfrac{(\alpha-1)i+i(\alpha+1)}{2}=\alpha\cdot i$. Η $z_2=\dfrac{(\alpha-1)i-i(\alpha+1)}{2}=-i$.

Το Γ κυμαίνεται από 0 εως $+\infty$. Ζητάμε το $\dfrac{d\left(\theta_1+\theta_2\right)}{dt}=\dfrac{d\theta_1}{dt}+\dfrac{d\theta_2}{dt}\overset{\theta_1=c}{\Rightarrow}\dfrac{d\left(\theta_1+\theta_2\right)}{dt}=0+\dfrac{d\theta_2}{dt}$.

Όμως : $\varepsilon\varphi\theta_2=\dfrac{\alpha}{1}\Rightarrow\dfrac{d\varepsilon\varphi\theta_2}{dt}\cdot\dfrac{d\theta_2}{dt}=\upsilon\Rightarrow$ $\begin{array}{l}\dfrac{d\theta_2}{dt}=\sigma\upsilon\nu^2\theta_2\cdot\upsilon\\ \sigma\upsilon\nu^2\theta_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2=\dfrac{1}{1+\alpha^2}\end{array}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{d\theta_2}{dt}=\dfrac{\upsilon}{1+\alpha^2}\underset{\alpha=3}{\overset{\sigma\tau\eta\nu}{=}}\dfrac{5}{1+3^2}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$.

3.36 Α. Πρέπει να βρω το $f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}$

Θέτω $g(x)=\dfrac{f'(x)-\sqrt{x^2+4}}{x}\Rightarrow f'(x)=xg(x)+\sqrt{x^2+4}(1)$

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1(2)$

Από $(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[xg(x)+\sqrt{x^2+4}\right]\xrightarrow{(2)}f'(0)=0\cdot1+2\Rightarrow f'(0)=2(3)$ όπου $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$ γιατί η $f'(x)$ είναι συνεχής

Άρα

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{xg(x)+\sqrt{x^2+4}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{xg(x)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}g(x)+\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=1+\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=1$$

Β.Έστω υπάρχουν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g**.** Είναι

$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=\chi'\Rightarrow f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=1\overset{x=0}{\Rightarrow}f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=1\Rightarrow0=1$

άτοπο

3.37 Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και

$$g'(x)=\left(\frac{x^4}{4}+7x+1\right)'f(x)+\left(\frac{x^4}{4}+7x+1\right)f'(x)+\left(x^2\right)'=$$

$$=(x^3+7)f(x)+\left(\frac{x^4}{4}+7x+1\right)f'(x)+2x$$

οπότε $g'(0)=7f(0)+f'(0)$ (2)

Όμως η συνάρτηση f είναι άρτια οπότε θα είναι $f(-x)=f(x)$ $x\in R$,άρα και $\left(f(-x)\right)'=f'(x)$ $\Leftrightarrow-f'(-x)=f'(x)$ και για x=0 γράφεται

$-f'(0)=f'(0)\Leftrightarrow 2f'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=0$.
Άρα από $(2)\Leftrightarrow$ $g'(0)=7f(0)$ δηλαδή η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): \psi-7f(0)x+3=0$.

3.38 Από τη σχέση (1) έχουμε $f(x)-3 \le g(x)-3 \le h(x)-3$ άρα και
$f(x)-f(2) \le g(x)-g(2) \le h(x)-h(2)$ (2)

- Αν χ>2 από (2) έχουμε $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} \le \dfrac{g(x)-g(2)}{x-2} \le \dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}$
- Αν χ<2 από (2) έχουμε $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} \ge \dfrac{g(x)-g(2)}{x-2} \ge \dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}$

Όμωςλόγω υπόθεσης $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=2005$

Και $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}=h'(2)=2005$

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι και

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=2005$.

Κατά συνέπεια η την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $\chi_0=2$ είναι
$\psi-g(2)=g'(2)(x-2)\Leftrightarrow \psi-4=2005(x-2)$.......

3.39

Έστω $A(x_0, y_0)$ το (κοινό) σημείο επαφής των C_f, C_g. Προφανώς $x_0=1$ και $y_0=2$ (αφού $g(1)=2$). Για να είναι το Α κοινό σημείο των C_f, C_g πρέπει $f(1)=g(1)$ (I) και για να έχουν κοινή εφαπτομένη πρέπει $f'(1)=g'(1)$ (II)

Έχουμε $f'(x)=\dfrac{x^2+2x+\alpha-\beta}{(x+1)^2}$, $x\neq -1$ και $g'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$, $x\neq 0$

Οι (I) και (II) δίνουν $\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha-\beta=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=7\end{cases}$ που είναι οι ζητούμενες τιμές.

3.40 α)

Έχουμε: $f(x-2)\le x^2-3x+2 \underset{t=x-2}{\overset{t=x-2}{\Rightarrow}} f(t)\le (t+2)^2-3(t+2)+2\Leftrightarrow f(t)\le t^2+t$ (I)

Επίσης $f(x-3) \geq x^2 - 5x + 6 \underset{x=t+3}{\overset{t=x-3}{\Rightarrow}} f(t) \geq (t+3)^2 - 5(t+3) + 6 \Leftrightarrow f(t) \geq t^2 + t$ (II)

Άρα από (I) και (II) έχουμε: $x^2 + x \leq f(x) \leq x^2 + x$ για κάθε $x \in R$ $\Leftrightarrow f(x) = x^2 + x$, $x \in R$

β)

Η ΑΒ έχει εξίσωση $y = \lambda \cdot (x + \frac{1}{2})$

[Αφού τέμνει τη C_f σε δύο σημεία δεν μπορεί να είναι παράλληλα με τον $y'y$, δηλαδή της μορφής $x = x_0$]

Οι τετμημένες x_1, x_2 των $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ είναι λύσεις της εξίσωσης

$x^2 + x = \lambda \cdot (x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow 2x^2 + 2(1-\lambda)x - \lambda = 0$. Άρα $x_1 + x_2 = \lambda - 1$ και $x_1 \cdot x_2 = -\frac{\lambda}{2}$

Οι εφαπτόμενες της C_f στα Α, Β έχουν συντελεστές διευθύνσεων $\lambda_1 = f'(x_1) = 2x_1 + 1$ και

$\lambda_2 = f'(x_2) = 2x_2 + 1$. Άρα $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 4x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1 = 4\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 2(\lambda - 1) + 1 = -1$.

Άρα οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των εφαπτόμενων της C_f στα Α και Β ικανοποιούν τις σχέσεις: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ και $y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$. Έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \\ y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \end{Bmatrix} \underset{f'(x_1)}{\overset{f'(x_2)}{\Leftrightarrow}} \begin{Bmatrix} f'(x_2)y - f'(x_2)f(x_1) = -(x - x_1) \\ f'(x_1)y - f'(x_1)f(x_2) = -(x - x_2) \end{Bmatrix}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$y(f'(x_2) - f'(x_1)) + f'(x_1)f(x_2) - f'(x_1)f(x_2) = (x_1 - x_2) \Leftrightarrow 2y(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Αφού $f'(x_1)f(x_2) - f'(x_1)f(x_2) = 0$ γιατί

$$(2x_1 + 1)(x_2^2 + x_2) - (2x_2 + 1)(x_1^2 + x_1) = 2x_1x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2 - 2x_1^2x_2 - 2x_1x_2 - x_1^2 - x_1 =$$
$$2x_1x_2(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + (x_2 - x_1) = (2x_1x_2 + (x_2 + x_1) + 1)(x_2 - x_1) =$$
$$= \left[2 \cdot \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + (\lambda - 1) + 1\right](x_2 - x_1) = 0$$

3.41 Ισχύει από υπόθεση ότι $g'(x)\sigma\upsilon\nu x + g(x)\eta\mu x = g(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$$g'(x)\sigma\upsilon\nu x - g(x)(\sigma\upsilon\nu x)' = g(x)\sigma\upsilon\nu x \overset{:\sigma\upsilon\nu^2 x}{\Leftrightarrow} \frac{g'(x)\sigma\upsilon\nu x - g(x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{g(x)\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \overset{A}{\Leftrightarrow} \frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = ce^x \Leftrightarrow g(x) = ce^x\sigma\upsilon\nu x \quad (1) \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Για χ=0 η $(1) \Leftrightarrow g(0) = ce^0\sigma\upsilon\nu 0 \overset{\upsilon\pi o\theta}{\Leftrightarrow} 1992 = c$

Οπότε από $(1) \Leftrightarrow g(x) = 1992e^x\sigma\upsilon\nu x$

3.42 Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x^3$.

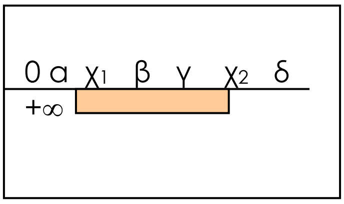
- Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ (σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων)
- Είναι $h'(x) = f'(x) - 3x^2$ ορίζεται στο (α,β) κατά συνέπεια η συνάρτηση $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο (α,β).
- Από (1) προκύπτει ότι $h(\alpha) = h(\beta)$.

Για την $h(x)$ ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ.Rolleστο $[\alpha,\beta]$,κατά συνέπεια υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $h'(x_0) = 0$.

Δηλαδή $f'(x_0) = 3x_0^2$

3.43 Για τη συνάρτηση f ισχύει φανερά το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\gamma,\delta]$.Κατά συνέπεια υπάρχουν $x_1 \in (\alpha,\beta)$ και $x_2 \in (\gamma,\delta)$ ώστε $f'(x_1) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

και $f'(x_2) = \dfrac{f(\delta) - f(\gamma)}{\delta - \gamma}$ (1)



Λόγω υπόθεσης η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$,κατά συνέπεια και στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Είναι $x_1 < x_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x_1) < f'(x_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \dfrac{f(\delta) - f(\gamma)}{\delta - \gamma} \Rightarrow$ (αφού α+δ=β+γ $\Rightarrow$ α-β=γ-δ)

$f(\beta) - f(\alpha) < f(\delta) - f(\gamma) \Rightarrow f(\beta) + f(\gamma) < f(\alpha) + f(\delta) \Rightarrow B < A \Rightarrow A > B$

3.44 Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R ,αν παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο ,θα έχουμε ,σύμφωνα με το θεώρημα του FERMAT ότι $f'(x_0) = 0$. (1)

Με παραγώγιση της δοσμένης ισότητας έχουμε

$2f(x)f'(x) + 2005f'(x) = e^{x+1} + 5x^4 + 1$ και για $x = x_0$ γράφεται

$$2f(x_0)f'(x_0) + 2005f'(x_0) = e^{x_0+1} + 5x_0^{\ 4} + 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} e^{x_0+1} + 5x_0^{\ 4} + 1 = 0$$

Άτοπο αφού $e^{x_0+1} + 5x_0^{\ 4} + 1 > 0$.

Κατά συνέπεια η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα

3.45 Η δοσμένη σχέση $f(x)\le e^{-2x}$ γράφεται ισοδύναμα $f(x)-e^{-2x}\le 0$.Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^{-2x}$

Η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R,άρα και στο $x_0=0$

- Είναι $g(x)\le 0 \Rightarrow g(x)\le g(0)$, δηλαδή η g έχει ακρότατο στο $x_0=0$
  Κατά συνέπεια από το θεώρημα του Fermat θα ισχύει
  $g'(0)=0$ (1)
  Όμως $g'(x)=f'(x)-e^{-2x}(-2x)'=f'(x)+2e^{-2x}\Rightarrow g'(0)=f'(0)+2\Rightarrow$
  $0=f'(0)+2\Rightarrow f'(0)=-2$
- Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=0$ έχει εξίσωση
  $\psi-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow \psi-1=-2x\Leftrightarrow \psi=-2x+1$

3.46 (α) Το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι $A=[-1,+\infty)$.

Είναι $f'(x)=2e^{x}+\dfrac{1}{x+1}>0$ για κάθε χ>-1 και κατά συνέπεια η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(β)Είναι $f(0)=2e^{0}-2+\ln 1=0$ δηλαδή η χ=0 είναι ρίζα της $f(x)=0$

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα και κατά συνέπεια η χ=0 είναι μοναδική λύση.

3.47 Το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι $A=R-\{0\}$

Είναι $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}/R-\{0\}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ οπότε έχουμε τον πίνακα

X	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	
			M				**E**		

3.47 **Α.** Είναι $h'(x)=2003e^{x}+\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ (1)

Εφαρμόζουμε για τη συνάρτηση $f(x)$ Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,x]$.

- Η $f(x)$ λόγω υπόθεσης είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ άρα και συνεχής στο $[0,x]$.
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ άρα και στο $(0,x)$.
  Κατά συνέπεια από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(0,x)$ ώστε
  $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} f(x)=xf'(\xi)$.
  Κατά συνέπεια η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται
  $h'(x)=2003e^{x}+\dfrac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x^2}=2003e^{x}+\dfrac{x[f'(x)-f'(\xi)]}{x^2}$ (2)

Όμως η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε
Για $\xi \in (0,x)$ είναι $0<\xi<x$ οπότε $f'(0)<f'(\xi)<f'(x)$.
Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $h'(x)>0$ ία κάθε χ>0 και κατά συνέπεια η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε

B. Είναι $h'(x)=3x^2+e^x+\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ (1)

Αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη θα ισχύει ότι $f''(x)\geq 0$

Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $g(x)=xf'(x)-f(x)$.
Είναι $g'(x)=x'f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$.
Κατά συνέπεια η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x>0$.

3.48 Αν με χ συμβολίσουμε την απόσταση ΑΜ για την τυχαία θέση του Μ τότε $x=\upsilon t \Leftrightarrow x=2t$ οπότε
$MB=10-2t=2(5-t)$

$5-t>0 \Leftrightarrow t<5$ άρα $(AM\Gamma)=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}=t^2\sqrt{3}$

$(MB\Gamma)=\dfrac{4(5-t)^2\sqrt{3}}{4}=(5-t)^2\sqrt{3}$

άρα $f(t)=t^2\sqrt{3}+(5-t)^2\sqrt{3}=$
$2\sqrt{3}t^2-10\sqrt{3}t+25\sqrt{3}$

i. Η συνάρτηση f(t) είναι συνεχής ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με παράγωγο
$f'(t)=2t\sqrt{3}-10\sqrt{3}$

t	0		5/2		5
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		↘		↗	

ΕΛΑΧΙΣΤΟ

$f'(t)=0 \Leftrightarrow 2t\sqrt{3}-10\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 2t\sqrt{3}=10\sqrt{3} \Leftrightarrow t=5/2$

Άρα για t = 5/2 έχω την ελάχιστη τιμή της f(t) δηλ το ελάχιστο εμβαδό $f(5/2)=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

ii. Άρα για $t=5/2$ έχω: $x=2t \Leftrightarrow x=2\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x=5m \Leftrightarrow (AM)=5m$ και επειδή $(AB)=10m$
το ελάχιστο εμβαδό δημιουργείται όταν το Μ βρίσκεται στο μέσο του ΑΒ.
Όταν $(AM)=8m$ επειδή $(AM)=x=\upsilon t \Leftrightarrow 8=2t \Leftrightarrow t=4sec$ άρα ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $\left.\dfrac{df(t)}{dt}\right|_{t=4}=f'(4)=4\sqrt{3}4-10\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

3.49. Θεωρώ συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x^2)^2-2x^2+x^4$ για $x\geq 0$

$f'(x)=...=\dfrac{4x^5}{1+x^2}\geq 0$ για κάθε $\chi\geq 0$ άρα η f είναι ↑ στο R_+

Άρα για κάθε $x\geq 0\Rightarrow f(x)\geq f(0)\Rightarrow \ln(1+x^2)^2-2x^2+x^4\geq 0\Rightarrow \ln(1+x^2)^2\geq 2x^2-x^4$

3.50α] $\mathbf{f'(x)=3x^2+2-2\sigma\upsilon\nu 2x=3x^2+2(1-\sigma\upsilon\nu 2x)\geq 0}$ για κάθε $x\in\Re$.
Αρα f γνησίως αύξουσα στο R.
β] για την παραπάνω f (x) ισχύει το Θ.BOLZANO, αφού

- f συνεχής στο [0,1]

f (0) = -1 < 0 , f(1) = 2 –ημ2 > 0 δηλαδή f(0)f(1) < 0 , άρα υπάρχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (0,1) η οποία είναι μοναδική αφού f γνησίως αύξουσα στο R άρα και στο

3.51

Αν $x=0$, τότε: $f(0)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{\beta+1}{3}=\dfrac{\beta+1}{3}$

Αν $x\succ 0$, είναι: $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{e^{\nu x}}+(\alpha x^2+\beta+1)}{\dfrac{2}{e^{\nu x}}+1}=\alpha x^2+\beta+1$

Αν $x\prec 0$, είναι: $f(x)=\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{x^2+(\alpha x^2+\beta+1)\dfrac{1}{e^{-\nu x}}}{2+\dfrac{1}{e^{-\nu x}}}=\dfrac{x^2}{2}$

Άρα η f έχει τύπο: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, \forall x\in(-\infty,0)\\ \alpha x^2+\beta+1, \forall x\in(0,+\infty)\\ \dfrac{\beta+1}{3},\ \text{αν } x=0\end{cases}$

Όπως φαίνεται από τον τύπο της, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{0\}$. Εξετάζουμε την παράγωγο στο 0. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο 0, πρέπει να είναι συνεχής στο 0. Άρα:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{2}=\lim_{x\to 0^+}\left(\alpha x^2+\beta+1\right)=\frac{\beta+1}{3}\Leftrightarrow 0=\beta+1=\frac{\beta+1}{3}\Rightarrow \beta=-1$$

Έτσι είναι: $$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, \forall x\in(-\infty,0)\\ \alpha x^2, \forall x\in(0,+\infty)\\ 0, x=0\end{cases}$$

Για να υπάρχει η $f'(0)$ πρέπει :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x^2}{2}}{x}\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\alpha x=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{2}\Leftrightarrow 0=0$$

Επομένως είναι $\alpha\in\mathbb{R}$ (οποιοδήποτε) και $\beta=-1$.

3.52 Εφαρμόζω ΘΜΤ για τη συνάρτηση f(x) στα διαστήματα $[\alpha,\gamma]$και$[\gamma,\beta]$

Άρα υπάρχει $\chi\in(\alpha,\gamma)$ ώστε $f'(x_1)\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}$

Και $\chi_2\in(\gamma,\beta)$ ώστε $f'(x_2)=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$

Επειδή τα $f(\gamma)-f(\alpha)$καιf$(\beta)-f(\gamma)$ είναι ετερόσημα εξ υποθέσεως και γ-α>0, β-γ>0 άρα $f'(x_1), f'(x_2)$ ετερόσημα άρα $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$

Εφαρμόζω το Θ.Bolzano για την f'στο$[\chi_1,\chi_2]$ αφού f' συνεχής και $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\chi_1,\chi_2)\subset(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$

3.53

A. Θεωρία σχολικού βιβλίου

B. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με :

$$g'(x)=f'(x)f(-x)-f(x)f'(-x)=\alpha f(x)f(-x)-\alpha f(x)f(-x)=0$$

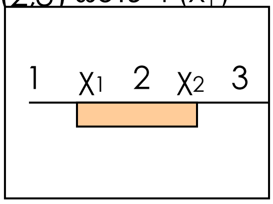
Άρα η g είναι σταθερή δηλ για κάθε $x\in R$ $g(x)=c$

Είναι $g(x)=f(x)f(-x)\xrightarrow{x=0}g(0)=f(0)f(0)=\alpha^2$ και επειδή η g είναι σταθερή είναι $g(x)=\alpha^2$

3.54 Για τη συνάρτηση f ισχύει φανερά το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα

$[1,2]$ και $[1,3]$.Κατά συνέπεια υπάρχουν $x_1 \in (1,2)$ και $x_2 \in (2,3)$ ώστε $f'(x_1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ και

$f'(x_2) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$ (1)



Λόγω υπόθεσης η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,3]$.

Κατά συνέπεια

- Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2).
- Ισχύει ότι $f'(x_1) = f'(x_2)$ αφού

$$f'(x_1) = f'(x_2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} \Leftrightarrow f(2)-f(1) = f(3)-f(2)$$

$\Leftrightarrow 2f(2) = f(1)+f(3)$ που ισχύει λόγω υπόθεσης

Οπότε για τη συνάρτηση f ισχύεει το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Κατά συνέπεια υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0 \in (x_1, x_2): f''(x_0) = 0$.

3.55 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με

$$f'(x) = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x\left(2\eta\mu x - \sqrt{2}\right)$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\left(2\eta\mu x - \sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ ή} \\ \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \text{ ή} \\ x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

- Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι συνx>0 , άρα το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του $2\eta\mu x - \sqrt{2}$
- Η συνάρτηση $h(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

οπότε :αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι $x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \eta\mu x < \eta\mu\frac{\pi}{4} \Rightarrow \eta\mu x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$2\eta\mu x - \sqrt{2} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

αν $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $x > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \eta\mu x > \eta\mu\frac{\pi}{4} \Rightarrow \eta\mu x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$2\eta\mu x - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.Έτσι έχουμε τον πίνακα μεταβολών

χ	0		π/4		π/2
f′		-		+	
f	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗	τ.μ.

Σύμφωνα με τον πίνακα μεταβολών έχουμε

- Τ.Ελάχιστο $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu^2\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\eta\mu\frac{\pi}{4} + 2\sqrt{2} =$

$\frac{4\sqrt{2}-1}{2}$

- Τ.Μέγιστο $f(0)=2\sqrt{2}$
- Τ.Μέγιστο $f(\frac{\pi}{2})=1+\sqrt{2}$

3.56 Πολλαπλασιάζουμε τη δοσμένη σχέση με χ και έχουμε :
$xf'(x)=f(x)+5x$ ή
$f'(x)x-f(x)x'=5x$ ή (διαιρούμε με χ^2)
$\frac{f'(x)x-f(x)x'}{x^2}=\frac{5x}{x^2}$ ή $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(5\ln x)'$ οπότε $\frac{f(x)}{x}-5\ln x=c$
(με $c\in R$) ή $f(x)=5x\ln x+cx$ οπότε $f'(x)=5\ln x+5x\frac{1}{x}+c=5\ln x+c+5$
$\Rightarrow f''(x)=\frac{5}{x}>0$
για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
Άρα η C_f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,+\infty)$ και κατά συνέπεια η εφαπτόμενη της C_f σε κάθε σημείο της , βρίσκεται κάτω από την C_f.

3.57
$f(x)+[f(x)]^{1995}=x^3+x-2\Rightarrow\left(f(x)+[f(x)^{1995}]\right)'=(x^3+x-2)'\Rightarrow$
$f'(x)+1995[f(x)]^{1994}f'(x)=3x^2+1$
$f'(x)[1+1995f(x)^{1994}]=3x^2+1\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2+1}{1+1995(f(x))^{1994}}>0$

Άρα η f ↑ άρα f 1-1 άρα υπάρχει η f^{-1}
Αρκεί να δείξω ότι $f(x)<0, x\in(-1,1)$
Ισχύει ότι: $f(x)+[f(x)^{1995}]=x^3+x-2, x\in[-1,1]$
Θέτω χ = 1 και έχω $f(1)+[f(1)]^{1995}=0\Rightarrow f(1)[1+(f(1))^{1994}]=0\Rightarrow f(1)=0$
Επειδή f ↑ *και* $\chi<1$ έχω $f(x)<f(1)\Rightarrow f(x)<0$

3.58 α)Για κάθε χ ε Δ είναι $g'(\chi)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ και

$g''(\chi)=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$ (1)

Η g στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν $g''(\chi)\geq 0$ για κάθε χ ε Δ και επειδή $f(x)>0$ είναι $[f(x)]^2>0$ άρα
$g''(\chi)\geq 0 \Leftrightarrow f''(x)f(x)-[f'(x)]^2\geq 0 \Leftrightarrow f(x)f''(\chi)\geq[f'(x)]^2$ για κάθε χ ε Δ

β)Η συνάρτηση g είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο R σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρήσεων και είναι :

g΄(χ)= $\frac{2x}{x^2+2}$ επίσης g΄΄(χ)= $\frac{2(x^2+2)-4x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{2(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$ οπότε

g΄΄(χ) ≥0 ⇔(αφού $(χ^2+2)^2>0$) $2 - χ^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\sqrt{2} - χ)(\sqrt{2} + χ) \geq 0 \Leftrightarrow χ \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Επομένως το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g στρέφει τα κοίλα άνω είναι το $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

3.59 Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$

Είναι $h'(x) = f'(x) - g'(x) \overset{υπ}{=} ημ^2x + e^x > 0$.

Κατά συνέπεια η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα,οπότε

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $x > 0 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x) > h(0) \Rightarrow f(x) - g(x) > f(0) - g(0) \Rightarrow$
$f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$

3.60 α)Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) - f(x)$.Είναι

$g'(x) = f''(x) - f'(x) \overset{υποθ}{>} 0$

Όμως η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα ,οπότε έχουμε

- Για χ < 0 είναι $g(x) < g(0) \Rightarrow f'(x) - f(x) < f'(0) - f(0) \Rightarrow f'(x) - f(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < f(x)$
- Για χ > 0 είναι $g(x) > g(0) \Rightarrow f'(x) - f(x > f'(0) - f(0) \Rightarrow f'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > f(x)$

β) Είναι $h'(x) = \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = \frac{e^x[f'(x) - f(x)]}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ οπότε

- Για χ < 0 είναι $f'(x) < f(x)$ άρα και $h'(x) < 0$ δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα
- Για χ > 0 είναι $f'(x) > f(x)$ άρα και $h'(x) > 0$ δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα.

3.61 Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \ln x + 2 \leq g(e^2) = 0$. (1)

- Είναι $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x}$ οπότε η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(e, +\infty)$,άρα θα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = e^2$.
- Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η συνάρτηση g έχει ακρότατο στο $x_0 = e^2$. Κατά συνέπεια από το θεώρημα του Fermat έχουμε
  $g'(e^2) = 0$ άρα $f'(e^2) - \frac{1}{e^2} = 0 \Rightarrow e^2 f'(e^2) - 1 = 0$

3.62

I. Το συνολικό κέρδος θα δίνεται από τον τύπο:

χ	0	1000	+∞
P'(χ)	+	0	-
P(χ)	↗		↘

$$P(x) = x \cdot A(x) - K(x) = x(50000 - 20x) - \left(10000x + 10^6\right) =$$
$$50000x - 20x^2 - 10000x - 10^6 = -20x^2 + 40000x - 10^6$$

$$P'(x) = \left(-20x^2 + 40000x - 10^6\right)' = -40x + 40000 = -40(x - 1000)$$
$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -40(x - 1000) = 0 \Leftrightarrow x - 1000 = 0 \Leftrightarrow x = 1000$$

Η P(χ) παρουσιάζει μέγιστο για χ = 1000 άρα πρέπει να παράγει 1000 μονάδες ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος της. Η τιμή πώλησης κάθε μονάδας θα είναι:
$A(1000) = 50000 - 20 \cdot 1000 \Leftrightarrow$ <u>A(1000) = 30.000 δρχ.</u>

ΙΙ. Το μηνιαίο κέρδος για χ = 1000 θα είναι:
$P(1.000) = -20 \cdot 1.000^2 + 40.000 \cdot 1.000 - 10^6 = -20 \cdot 10^6 + 40 \cdot -10^6 = 19 \cdot 10^6$ δρχ
δηλ. P(1.000)=19.000.000 δρχ

ΙΙΙ. Ο νέος τύπος του κέρδους είναι: $P_1(\chi) = P(\chi) - 4.000\chi \Leftrightarrow$
$P_1(\chi) = -20\chi^2 + 40.000\chi - 10^6 - 4.000\chi = -20\chi^2 + 36.000\chi - 10^6$
$P_1'(\chi) = -40\chi + 36.000 = -40(\chi - 900)$
$P_1'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi - 900 = 0 \Leftrightarrow \chi = 900$
`Αρα για να μεγιστοποιηθεί το κέρδος η τιμή πώλησης θα γίνει:

3.63 α) Από f(x) - g(x) = x- 4 g(x) = f(x) –x + 4 , για $x \in \Re$. Η ευθεία y = 3x-7 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , καθώς $x \to +\infty$, θα έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 3x) = -7$. Έτσι είναι :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - x + 4}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 1 + \frac{4}{x}\right) = 3 - 1 + 0 = 2$$
. Ακόμη :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{g(x)}{x} + 3 + \frac{\eta\mu 2x}{x}}{(f(x) - 3x) + \frac{1}{x}} = \frac{2 + 3 + 0}{-7 + 0} = -\frac{5}{7}$$
, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 0$ (για κάθε x > 0 : $-\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu 2x}{x} \le \frac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

άρα θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 0$) .

β) Για να δείξουμε ότι η ευθεία με εξίσωση y = 2x-3 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g , καθώς $x \to +\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}$ (g(x) – 2x) = -3 . Η ισότητα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ = 2 έχει αποδειχθεί στο (α) . Έχουμε :

$\lim\limits_{x\to+\infty}$ (g(x) – 2x) = $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (f(x) –x + 4 - 2x) = $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (f(x) – 3x) + 4 = -7 + 4 = -3

3.64

i. Είναι:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\overset{(1)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\alpha xh+h^2+f(x)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(\alpha x+h)=\alpha x$$

Άρα είναι $f'(x)=\alpha x, \forall x\in\mathbb{R}$, επομένως η f παραγωγίζεται.

ii. Η (1) για $x=1, y=1$, δίνει:

$f(2)=\alpha\cdot 1+1+f(1)\Leftrightarrow 2=\alpha+1-1\Leftrightarrow \alpha=2$

Άρα είναι και $f'(x)=2x$. Επομένως $f(x)=x^2+c$ (διότι $\left(x^2+c\right)'=2x$).

Έχουμε $f(1)=1+c=-1\Leftrightarrow c=-2$.

Έτσι είναι $f(x)=x^2-2$.

3.65 α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της ευθείας y = 3 και της C_f βρίσκονται αν λύσουμε την εξίσωση f(x) = 3 $\Leftrightarrow$ f(x)-3 = 0 . Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x) = f(x)-3 , x$\in$[0 , 1] . Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση h(x) = 0 έχει ακριβώς μία λύση στο (0 , 1) . Η f είναι παραγωγίσιμη στο [0 , 1] άρα θα είναι και συνεχής σε αυτό .Επειδή η h είναι συνεχής στο [0 , 1] (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων) και h(0)h(1) = (f(0)-3)(f(1) -3) =(2-3)(4-3) = -1 < 0 , σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in$(0 , 1) τέτοιο ώστε h(x_o) = 0. Ακόμη έχουμε h΄(x) = f ΄(x)-(3)΄=f ΄(x) > 0 , x$\in$(0 , 1) . Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0 , 1) συνεπώς η εξίσωση h(x) = 0 έχει το πολύ μία ρίζα στο (0 , 1). Επομένως το $x_o\in$(0 , 1) τέτοιο ώστε h(x_o) = 0 είναι μοναδικό .

β) Εφόσον η f είναι συνεχής στο [0 , 1] και f ΄(x)>0 για κάθε x$\in$(0 , 1) , η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0 , 1] . Άρα έχουμε :

$0<\frac{1}{5}<1\Rightarrow f(0)<f(\frac{1}{5})<f(1)\Rightarrow 2<f(\frac{1}{5})<4$,

$0<\frac{2}{5}<1\Rightarrow f(0)<f(\frac{2}{5})<f(1)\Rightarrow 2<f(\frac{2}{5})<4$,

$0<\frac{3}{5}<1\Rightarrow f(0)<f(\frac{3}{5})<f(1)\Rightarrow 2<f(\frac{3}{5})<4$,

$0 < \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f(\frac{4}{5}) < f(1) \Rightarrow 2 < f(\frac{4}{5}) < 4$. Άρα θα έχουμε :

$2+2+2+2 < f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5}) < 4+4+4+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 < f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5}) < 16$ (1) .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \dfrac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4}$, $x \in [0 , 1]$.

Η g είναι συνεχής στο [0 , 1] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων .Ακόμη είναι :

$$g(0) = 2 - \frac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4} = \frac{8-[f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})]}{4} \overset{(1)}{<} 0 ,$$

$$g(1) = 4 - \frac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4} = \frac{16-[f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})]}{4} \overset{(1)}{>} 0 ,$$

δηλαδή $g(0)g(1)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in (0 , 1)$, τέτοιο

ώστε $g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) - \dfrac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = \frac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4} .$$

γ) Η f είναι συνεχής στο [0 , 1] και παραγωγίσιμη στο (0 , 1) . Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0 , 1)$ τέτοιο ώστε

$f'(x_2) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = 4-2 = 2$.Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία $y = 2x+2000$ (τον αριθμό 2) άρα είναι παράλληλες .

3.66

i. $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε $3f^2(x)f'(x)+4f'(x)=4 \Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+4\right)=4 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{4}{3f^2(x)+4}$. ②.

Προφανώς $f'(x)>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Από ① για x = 0 έχουμε: $f^3(0)+4f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+4\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$. Άρα η x = 0 είναι ρίζα της f και επειδή είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική στο $\mathbb{R}$.

Τότε: $\forall x > 0$ έχουμε $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

και $\forall x < 0$ έχουμε $f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$

ii. Από τη ① η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με $f''(x) = \dfrac{-4\left(3f^2(x)+4\right)'}{\left(3f^2(x)+4\right)^2} = \dfrac{-24f(x)f'(x)}{\left(3f^2(x)+4\right)^2}$.

Από **i.** έχουμε ότι $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ $\forall x > 0$ $f(x) < 0$ $\forall x < 0$ και $f(0) = 0$.

Άρα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$		$\cap$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $A(0, 0)$

iii. Η g είναι παταγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγισίμων με $g'(x) = 2 - f'(x) \overset{①}{=} 2 - \dfrac{4}{3f^2(x)+4} = \dfrac{6f^2(x)+8-4}{3f^2(x)+4}$

άρα $g'(x) = \dfrac{6f^2(x)+4}{3f^2(x)+4} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iv. $f(x^2-x-2)+2x+4 < 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4-f(x^2-x-2) > 0 \Leftrightarrow 2(x^2-x-2)-f(x^2-x-2) > 0$.

Από **iii.** έχουμε ότι $g(x) = 2x - f(x)$ άρα $g(x^2-x-2) = 2(x^2-x-2)-f(x^2-x-2)$.

Άρα $2(x^2-x-2)-f(x^2-x-2) > 0 \Leftrightarrow g(x^2-x-2) > 0$.

Όμως $g(0) = 0$ άρα $g(x^2-x-2) > 0 \Leftrightarrow g(x^2-x-2) > g(0) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2-x-2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

3.67

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

i. Έστω ότι $f(\alpha)=f(\beta)$ και η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\zeta\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\zeta)=0$.

Άτοπο γιατί $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in[\alpha,\beta]$. Άρα $f(\alpha)\neq f(\beta)$

ii. Έστω $g(x)=5f(x)-2f(\alpha)-3f(\beta)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών

$g(\alpha)=5f(\alpha)-2f(\alpha)-3f(\beta)=3(f(\alpha)-f(\beta))$

$g(\beta)=5f(\beta)-2f(\alpha)-3f(\beta)=-2(f(\alpha)-f(\beta))$

δηλαδή $g(\alpha)g(\beta)=-6[f(\alpha)-f(\beta)]^2<0$ γιατί $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$g(x_0)=0\Leftrightarrow 5f(x_0)=2f(\alpha)+3f(\beta)$ ①

iii. Η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ άρα και στο $[\alpha,x_0]\subset[\alpha,\beta]$. Άρα από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει

$x_1\in(\alpha,x_0)\subset(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha}$.

Ομοίως από Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x_0,\beta]\subset[\alpha,\beta]$ υπάρχει $x_2\in(x_0,\beta)\subset(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$f'(x_2)=\dfrac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}$.

Από ① έχουμε $5f(x_0)=2f(\alpha)+3f(\beta)\Leftrightarrow 2f(x_0)-2f(\alpha)=3f(\beta)-3f(x_0)\Leftrightarrow 2(f(x_0)-f(\alpha))=3(f(\beta)-f(x_0))$

τότε $2f'(x_1)=\dfrac{2(f(x_0)-f(\alpha))}{x_0-\alpha}$

και $3f'(x_2)=\dfrac{3(f(\beta)-f(x_0))}{\beta-x_0}=\dfrac{2(f(x_0)-f(\alpha))}{\beta-x_0}$.

Άρα $6f'(x_1)f'(x_2)=\dfrac{4(f(x_0)-f(\alpha))^2}{(x_0-\alpha)(\beta-x_0)}$. Όμως $x_0-\alpha>0$, $\beta-x_0>0$ και $f(x_0)-f(\alpha)\neq 0$ γιατί αν $f(x_0)=f(\alpha)$ από

Θ. Rolle στο $[\alpha,x_0]$ θα υπάρχει $\zeta_1\in(\alpha,x_0)$ τέτοιο ώστε $f'(\zeta_1)=0$. Άτοπο γιατί $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in[\alpha,\beta]$.

Άρα $6f'(x_1)f'(x_2)>0\Leftrightarrow f'(x_1)f'(x_2)>0$

3.68 α) Για κάθε $x\in\Re$ είναι $2xf(x)+(x^2+1)f'(x)=e^x \Leftrightarrow (x^2+1)'f(x)+(x^2+1)f'(x)=(e^x)'$
$\Leftrightarrow [(x^2+1)f(x)]'=(e^x)' \Leftrightarrow (x^2+1)f(x)=e^x+c$ (1) , όπου c πραγματική σταθερά .
Όμως $f(0)=1$ και η (1) για $x=0$ γράφεται $(0^2+1)f(0)=e^0+c \Leftrightarrow 1=1+c\Leftrightarrow c=0$.

Έτσι από την (1) προκύπτει ότι $(x^2+1)f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \Re$.

β) Για κάθε $x \in \Re$ είναι $f'(x) = \dfrac{(e^x)'(x^2+1) - e^x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^x(x^2+1) - e^x 2x}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$, με το = να ισχύει μόνο για x = 1 .Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

3.69

i. Είναι $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln\frac{2}{5}$. Επειδή $\ln\frac{3}{5} < 0$, $\ln\frac{2}{5} < 0$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x > 0$, $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$, θα είναι και $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{2^{x-1}+3^{x-1}}{5^{x-1}} < \frac{2^{1-3x}+3^{1-3x}}{5^{1-3x}} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} < \left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x-1) < f(1-3x)$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $f(x-1) < f(1-3x)$. Άρα θα είναι και $x-1 > 1-3x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

3.70

i. Η f είναι συνεχής στο [2, 4] ως παραγωγίσιμη και $-2 \leq f(x) \leq 2$. Από Θεώρημα Μέγιστης Ελάχιστης Τιμής υπάρχουν $x_1, x_2 \in [2,4]$ έτσι ώστε $f(x_1)$ ελάχιστο και $f(x_2)$ μέγιστο.

Επειδή $f(2)=\frac{1}{2}$ και $f(4)=1$ έχουμε ότι $x_1, x_2 \in (2,4)$ τότε από Θεώρημα Fermat $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο [2, 4] ως σύνθεση και πράξεις παραγωγισίμων με

$g'(x)=\left[e^{f(x)}+xf(x)\right]'=f'(x)e^{f(x)}+f(x)+f'(x)x$

$g'(x_1)=e^{f(x_1)}\cdot f'(x_1)+f(x_1)+x_1f'(x_1)=f(x_1)=-2$ γιατί $f(x_1)$ ελάχιστο

$g'(x_2)=e^{f(x_2)}\cdot f'(x_2)+f(x_2)+x_2f'(x_2)=f(x_2)=2$ γιατί $f(x_2)$ μέγιστο

δηλαδή $g'(x_1)\cdot g'(x2)=-4<0$.

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1,x_2)\subset(2,4)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$

ii. Από **i.** έχουμε $g'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+f(x_0)+x_0f'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)\left[e^{f(x_0)}+x_0\right]+f(x_0)=0$

iii. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ με $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ από Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε

$f''(\xi)=0$. Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ με $g''(x)=f''(x)\cdot e^{f(x)}+(f'(x))^2\cdot e^{f(x)}+2f'(x)+x\cdot f''(x)$.

Άρα

$g''(\xi)=f''(\xi)\cdot e^{f(\xi)}+(f'(\xi))^2\cdot e^{f(\xi)}+2f'(\xi)+\xi\cdot f''(\xi)=$

$=(f'(\xi))^2\cdot e^{f(\xi)}+2f'(\xi)=f'(\xi)\left[f'(\xi)\cdot e^{f(\xi)}+2\right]$

3.71

Η αρχική γίνεται $\left[(x\text{-}2)\cdot f(x)\right]'>0$

Η $h(x)=(x\text{-}2)\cdot f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα με $h(2)=0$

τότε για $x<2$ ισχύει $h(x)<h(2)$ αρα $(x\text{-}2)\, f'(x)<0 \rightarrow f'(x)>0$ για $x<2$.

Όμοια δείχνουμε $f'(x)>0$ για $x>2$ άρα $f'(x)>0$ $\forall x\in \mathbb{R}\text{-}\{2\}$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

3.72

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση g(x) = f(x) - 2x , η οποία είναι συνεχής στο [α , β] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων . Ακόμη είναι g(α) = f(α) – 2α =2(β – α) > 0 και g(β) = f(β) – 2β = -2(β – α) < 0 , αφού β > α . Άρα g(α)g(β) < 0 , επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση g(x) = 0 $\Leftrightarrow$ f(x) = 2x , έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\gamma\in(\alpha , \beta)$.

β) Είναι f(γ) = 2γ . Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α , γ] και παραγωγίσιμη στο (α , γ) οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in(\alpha , \gamma)\subset(\alpha , \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} = 2\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο [γ , β] και παραγωγίσιμη στο (γ , β) , σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\gamma , \beta) \subset (\alpha , \beta)$ τέτοιο ώστε $f\,'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma} = 2\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} = 2\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$. Άρα υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in (\alpha , \beta)$ τέτοια ώστε $f\,'(\xi_1)f\,'(\xi_2) = 2\dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}2\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} = 4$.

3.73 i) Για κάθε $x \in (e,+\infty)$ έχουμε:

$f\,'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$, $x > e \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow 1-\ln x < 0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$

ii) Είναι $x < x+2001$ και f γν. φθίνουσα στο $[e,+\infty)$, άρα

$$f(x) > f(x+2001) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > \frac{\ln(x+2001)}{x+2001} \Leftrightarrow (x+2001).\ln x > x.\ln(x+2001) \Leftrightarrow$$

$$\ln x^{x+2001} > \ln(x+2001)^x \Leftrightarrow x^{x+2001} > (x+2001)^x \quad (1)$$

iii) Θέτουμε στην (1) $x=\pi$:

$$\pi^{\pi+2001} > (\pi+2001)^\pi \Leftrightarrow \pi^\pi.\pi^{2001} > (\pi+2001)^\pi \Leftrightarrow$$

$$\pi^{2001} > \frac{(\pi+2001)^\pi}{\pi^\pi} \Leftrightarrow \pi^{2001} > \left(\frac{\pi+2001}{\pi}\right)^\pi \Leftrightarrow \pi^{2001} > \left(1+\frac{2001}{\pi}\right)^\pi$$

3.74 α) Είναι $|z|^2 = x^2+y^2$ και $\mathrm{Im}(z) = y$, οπότε:

$$4|z|^2 - 4\left(\mathrm{Im}(z)+\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2+y^2) - 4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow y = x^2+1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η παραβολή $(c): y = f(x) = x^2+1$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f'(x) = 2x$

Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής μιας εφαπτομένης που διέρχεται από το $O(0,0)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι : $\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(x_0^2+1) = 2x_0(x-x_0)$ **(1)**

Από την (1) για $x = y = 0$ παίρνουμε $x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$

Άρα τα σημεία επαφής είναι τα $A(1,f(1)) \Rightarrow A(1,2)$ και $B(-1,f(-1)) \Rightarrow B(-1,2)$

Από την (1) για $x_0 = 1$ και $x_0 = -1$ προκύπτουν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της (c) στα σημεία Α και Β που είναι αντίστοιχα $\varepsilon_1 : y = 2x$ και $\varepsilon_2 : y = -2x$

γ) Οι μιγαδικοί που έχουν εικόνες τα σημεία Α και Β είναι οι: $z_1 = 1 + 2i$ και

3.75 Έστω f η συνεχής συνάρτηση με $f(x) = e^x - x^2 - 1$, $x \geq 0$.
Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία της.
Είναι $f'(x) = e^x - 2x$, $f''(x) = e^x - 2$ και
$f''(x) > 0 \Rightarrow e^x - 2 > 0 \Rightarrow e^x > 2 \Rightarrow \ln e^x > \ln 2 \Rightarrow x > \ln 2$
Από τον πίνακα μεταβολών για την f' έχουμε

x		0	ln2	+∞
$f''(x)$		−	0	+
$f'(x)$		↘	Ο.Ε.	↗

Η f' έχει ολικό ελάχιστο στο $x = \ln 2$ επομένως $f'(x) \geq f'(\ln 2) \Rightarrow$
$f'(x) \geq e^{\ln 2} - 2\ln 2 \Rightarrow f'(x) \geq 2 - 2\ln 2 \Rightarrow f'(x) \geq 2(1 - \ln 2) \Rightarrow$
$f'(x) \geq 2(\ln e - \ln 2) > 0$
Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 0$ άρα
$f(0) \leq f(x) \Rightarrow e^0 - 0^2 - 1 \leq e^x - x^2 - 1 \Rightarrow 0 \leq e^x - x^2 - 1 \Rightarrow$ $x^2 + 1 \leq e^x$ για $x \geq 0$.

3.76

α) Η f ως κυρτή στο $\mathbb{R}$ είναι και παραγωγίσιμη σ' αυτό. Παραγωγίζοντας λοιπόν τη σχέση της υπόθεσης έχουμε:

$$f'(x) = -f'(4-x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Η παραπάνω σχέση για $x = 2$ δίνει:

$$f'(2) = -f'(2) \Leftrightarrow 2f'(2) = 0 \Leftrightarrow f'(2) = 0$$

β) f κυρτή στο $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f' \uparrow \mathbb{R}$

Για την f λοιπόν διαπιστώνουμε ότι:

- $f'(2) = 0$ (από το α) ερώτημα)
- $x < 2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(2) \overset{\alpha)}{=} 0$

  $x > 2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(2) \overset{\alpha)}{=} 0$

Άρα $f_{min} = f(2)$

3.77

α) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) + (x-1)f''(x) = f'(x) + xf''(x) - f''(x) \overset{υπ.}{>} 0$

άρα $g \uparrow \mathbb{R}$

β) Παρατηρούμε ότι:

- $x<1 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)<g(1) \Rightarrow (x-1)f'(x)<0 \overset{x-1<0}{\Rightarrow} f'(x)>0$
- $x>1 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)>g(1) \Rightarrow (x-1)f'(x)>0 \overset{x-1>0}{\Rightarrow} f'(x)>0$

Δηλαδή

$f'(x)>0, \quad \forall x \in (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και f συνεχής στο 1 (ως παραγωγίσιμη)

άρα $f\uparrow \mathbb{R}$.

3.78 Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ με 0 <α<β<γ . Προφανώς ισχύουν :

- g(α) = g(β) = g(γ) =1
- Η g είναι συνεχής στα [α, β} και [β, γ] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- Η g είναι παραγωγίσιμη στα (α, β) και (β , γ) με

$$g'(x)=\frac{f'(x).x-f(x)}{x^2} \quad (1)$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχουν κ∈(α, β) και λ∈(β, γ), ώστε : g΄(κ)=0 = g΄(λ) και λόγω της (1) προκύπτει κ.f΄ (κ) = f (κ) και λ.f΄ (λ) = f (λ) (2)

ii) Βρίσκουμε τους συντελεστές διεύθυνσης των ΟΑ και ΟΒ :

$$\lambda_{OA}=\frac{f(\kappa)}{\kappa}\overset{(2)}{=}f'(\kappa)$$

$$\lambda_{OB}=\frac{f(\lambda)}{\lambda}\overset{(2)}{=}f'(\lambda)$$

Εφόσον όμως είναι συνευθειακά τα σημεία Α, Β, Ο θα ισχύει : $\lambda_{OA}=\lambda_{OB}$ δηλαδή f΄(κ) =f΄(λ)

Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στο [κ, λ] , όπου η f ΄ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη : υπάρχει $\chi_0 \in (\kappa,\lambda)$, ώστε $f''(\chi_0)=0$

3.79

Αρκεί να βρεθεί ευθεία $y=\lambda x+\beta$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$ ή

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$. Από τη δοσμένη σχέση, για $x\neq 0$, έχουμε:

$2x+3 \le f(x) \le 2x+3+\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow 0 \le f(x)-(2x+3) \le \dfrac{1}{x^2}$.

Άρα από το κρ. παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+3)]=0$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2x+3)]=0$, δηλαδή αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και το $-\infty$ την ευθεία $y=2x+3$.

3.80

Αν η C_f είχε στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη θα έπρεπε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\beta\in R$. Για κάθε $x\in R$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $[x, x+1]$ οπότε σύμφωνα με το ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in(x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f(x+1)-f(x)$ (I).

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\beta$ οπότε από την (I) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. Άτοπο.

Άρα η C_f δεν έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη.

3.81 α) Για κάθε $x\in\Re$ είναι $f'(x)=5(x-\kappa)^4(x-\lambda)^3+3(x-\kappa)^5(x-\lambda)^2$, άρα για κάθε

$x\in\Re-\{\kappa,\lambda\}$ έχουμε $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{5(x-\kappa)^4(x-\lambda)^3}{(x-\kappa)^5(x-\lambda)^3}+\dfrac{3(x-\kappa)^5(x-\lambda)^2}{(x-\kappa)^5(x-\lambda)^3}\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{5}{x-\kappa}+\dfrac{3}{x-\lambda}$.

β) Για κάθε $x\in(\kappa , \lambda)$ ισχύει $\kappa<x<\lambda \Rightarrow \begin{cases} x-\kappa>0 \\ x-\lambda<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)<0 \Rightarrow g(x)=\ln(-f(x))$,

επομένως $g'(x)=\dfrac{-f'(x)}{-f(x)}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{5}{x-\kappa}+\dfrac{3}{x-\lambda}$ και

$g''(x)=\dfrac{-5}{(x-\kappa)^2}+\dfrac{-3}{(x-\lambda)^2}<0$.Άρα η g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο (κ , λ).

3.82 α) Θέτουμε όπου x το 2006-x και από το σύστημα που προκύπτει βρίσκουμε $f(x)=668-x$.

β) Είναι $g(x)=\dfrac{668-x}{\ln x}$, $x\in(0 , 1)\cup(1 ,+\infty)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ =…=0 και $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (g(x)-0·x)=…= $-\infty \notin \Re$, η C_f δεν έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες .Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}$ g(x)=0 $\in \Re$ και $\lim\limits_{x\to1^+}$ g(x)= $+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}$ g(x)= $-\infty$ οπότε η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x =1 .

3.83 Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}]$, $[\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2})$, $\xi_2 \in (\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

. Αν η f είναι κυρτή (κοίλη) τότε η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) οπότε $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ $(f'(\xi_1) > f'(\xi_2))$ και μετά τις πράξεις παίρνουμε το ζητούμενο .

3.84) Η δοθείσα ισότητα γράφεται f (20) - f (10) = f(35) - f (25) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(20)-f(10)}{20-10} = \frac{f(35)-f(25)}{35-25}$$

. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα [10 , 20] και [25 , 35] και συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ξ_1 , ξ_2 τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, με $\xi_1 \in (10, 20)$ και $\xi_2 \in (25, 35)$.

β) Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την f ΄ στο $[\xi_1, \xi_2]$.

3.85…………………………….

3.86 α) Για κάθε $x \in \Re$ είναι $f'(x) = e^x + 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ η f είναι γνησίως αύξουσα $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η f είναι 1 – 1 $\Rightarrow$ η f είναι αντιστρέψιμη .

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το $f(\Re)$ =

$= (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = \Re$.

β) Παρατηρούμε ότι f(0) = 1 , άρα $f^{-1}(1) = 0$. Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, αφού αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν α , β $\in \Re$ με α < β και $f^{-1}(\alpha) \geq f^{-1}(\beta)$ θα είχαμε $f(f^{-1}(\alpha)) \geq f(f^{-1}(\beta)) \Rightarrow \alpha \geq \beta$ (άτοπο) .

Άρα η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την x = 1 .

γ) Για κάθε y$\in\Re$ έχουμε : $f(f^{-1}(y)) = y \Rightarrow f\,'(f^{-1}(y))\,(f^{-1})'(y) = (y)' \Rightarrow$

$\Rightarrow (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Για y = 1 : $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$.

3.87 α) Αν f(α)f(β) < 0 τότε από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση f(x) = 0 έχει λύση στο (α , β) .

Έστω τώρα ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει λύση τον αριθμό ξ$\in$(α , β) . Τότε θα είναι : f(α) < f(ξ) < f(β)$\Leftrightarrow$ f(α) < 0 < f(β) , αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή f(α) > f(ξ) > f(β)$\Leftrightarrow$ f(α) > 0 > f(β) , αν η f είναι γνησίως φθίνουσα . Σε κάθε περίπτωση είναι f(α)f(β) < 0 .

β) Έστω $f(x) = x^7 + x^5 + 2x - λ$, x$\in$[-1 , 1] . Η f είναι γνησίως αύξουσα στο [-1 , 1] και συνεχής σε αυτό , οπότε σύμφωνα με το (α) : η f(x) = 0 έχει λύση στο (-1 , 1) $\Leftrightarrow$ f(-1)f(1) < 0$\Leftrightarrow$λ$\in$(- 4 , 4

3.88 Αν $x<0$ στο διάστημα [χ , 0] ισχύει το Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει x_o μεταξύ του χ και του 0 ώστε: $f^{/}(x_o)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}$. Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της $f^{/}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα αφού f κυρτή στο IR ως εξής: $χ<χ_o<0$ άρα $f^{/}(x)<f^{/}(x_o)<f^{/}(0) \;\Leftrightarrow\; f^{/}(x)<\dfrac{f(x)}{x}<f^{/}(0)$ πολλαπλασιάζουμε την πρώτη ανισότητα με το αρνητικό χ , αλλάζοντας τη φορά της : $xf^{/}(x)>f(x)$ επομένως: $g(x)<0$ για κάθε χε(-∞,0).
Με τον ίδιο τρόπο αν χ>0 θα συμπεράνουμε ότι: $g(x)<0$ για κάθε χε(0,+ ∞).

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 - 12x$

β. $f(x) = ημx + x$, $x \in [-π, π]$

γ. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

δ. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2. Αν Μ το σημείο του διαγράμματος της f με $f(x) = x \cdot \ln x - λx + 3$, που αντιστοιχεί στο τοπικό της ελάχιστο, να βρεθεί η απόσταση ΟΜ, όταν ο ρυθμός μεταβολής του ΟΜ ως προς λ γίνει μηδέν.

3. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^{\circ}$, για το οποίο ισχύουν τα εξής: η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(-4, 0)$, η κορυφή Α είναι στο διάστημα $[0, 4]$ του άξονα x΄x και η κορυφή Β είναι σημείο της παραβολής $y = 4x - x^2$. Για ποια τιμή των συντεταγμένων του Β το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ γίνεται μέγιστο;

ΓΕΝΙΚΕΣ - ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ

4. Μια συνεχής συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(-2, +\infty)$, δε μηδενίζεται πουθενά και $f(0) = 1/2$. Αν μια αρχική της f είναι η $1/f$ τότε:

α. Να βρείτε τον τύπο της f.

β. Να μελετήσετε την f, ως προς τα κοίλα,

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

5. Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο $[α, β]$, με $α > 0$, παραγωγίσιμη στο $(α, β)$. Αν για τους μιγαδικούς $z = α + i \cdot f(α)$ και $w = β + i \cdot f(β)$ ισχύει η σχέση $|z + iw| = |z - iw|$, να αποδειχτεί ότι υπάρχει, τουλάχιστον έναν, $x_0 \in (α, β)$, ώστε $f΄(x_0) = f(x_0) / x_0$.

6. **α.** Αν για τους μιγαδικούς z_1 , z_2 ισχύει $||z_1| - |z_2|| = |z_1 + z_2|$ (1) , να δείξετε ότι $\text{Im}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = 0$.

β. Έστω η συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] . Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = f(\alpha) + i \cdot f(\beta)$ και $z_2 = f(\beta) - i \cdot f(\alpha)$, για τους οποίους ισχύει η ισότητα (1), του προηγούμενου ερωτήματος. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \neq \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

7. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \to$, ισχύει ότι:

$$2\frac{f(x)}{\ln x} + x \cdot f'(x) = 0 \ .$$

Αν f(e) = 1 τότε:

α. Να βρεθεί ο τύπος της f.

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αν ισχύει ότι:

$$z \cdot \bar{z} - (z^2 + \bar{z}^2) + \lim_{x \to e}\left(f'(x) + \frac{2}{e} \right) = -1$$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, παραγωγίσιμες στο (0, +∞), για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = g(x) + \alpha \cdot x \cdot e^{\frac{1}{x}} \ , \forall \ x > 0 \ .$$

Έστω, επιπλέον, ο αριθμός αρνητικός, πραγματικός α και ο θετικός, πραγματικός β, για τον οποίο ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \beta$.

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία y = αx + α + β είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

β. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z = α + βi, α, β ∈ , βρίσκεται στην ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, όταν x → +∞ και το μέτρο του είναι $\sqrt{2}$, τότε να γράψετε τους μιγαδικούς αριθμούς $w_1 = z^2/2$ και $w_2 = z^{2003}/2^{1001}$ στη μορφή x + yi .

γ. Να αποδείξετε ότι: $f(x) \leq g(x) + \alpha \cdot e$, ∀ x > 0 .

9. Έστω οι μιγαδικοί w = x + yi και $\bar{z} = \bar{w} \cdot (3 + 4i) + w(3 - 4i)$, x, y ∈ .

Α. Να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Β. Να βρεθεί ο μιγαδικός w αν ισχύει ότι $|w|^2 = z - 25$.

Γ. Έστω $z = 50$.

α. Να βρείτε το σύνολο των σημείων M(w), που είναι εικόνες των μιγαδικών w.

β. Να βρεθεί ο μιγαδικός w με το μικρότερο μέτρο.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο [α, β], παραγωγίσιμες στο (α, β), με $g(x)\cdot g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και οι μιγαδικοί $w = 2\cdot f(\alpha) - i\cdot g(\beta)$, $z = g(\alpha) - 2i\cdot f(\beta)$, ώστε να ισχύει: $|2w + \overline{z}| = |2\overline{w} + z|$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $\mathrm{Re}(z\cdot w) = 0$

β. υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0$.