ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 8Ο

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Το

16ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΜΕΛΕΤΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

Κάνουμε πίνακα προσήμου της $\mathbf{f''}$.Όπου $\mathbf{f''(x) > 0}$ η f είναι κυρτή και όπου $\mathbf{f''(x) < 0}$ η f είναι κοίλη. Τα σημεία του $\mathbf{D_f}$ που η $\mathbf{f''}$ αλλάζει πρόσημο είναι σημεία καμπής.

- Συνάρτηση πολλαπλού τύπου

Σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου επιπλέον εξετάζουμε αν ορίζεται εφαπτομένη της $\mathbf{C_f}$ στο σημείο αλλαγής του τύπου. Αν ναι και αν η $\mathbf{f''}$ αλλάζει πρόσημο στο σημείο αυτό, τότε είναι σημείο καμπής.

- Παραμετρικές κυρτότητας

Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει σημείο καμπής το $\mathbf{A(x_0, y_0)}$, τότε:

Υποθέτουμε ότι ισχύει το ζητούμενο, οπότε ισχύει: $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ και $\mathbf{f(x_0) = y_0}$.

Από τις προηγούμενες σχέσεις υπολογίζουμε τις παραμέτρους.

Κάνουμε αντικατάσταση των τιμών των παραμέτρων στην f και επαληθεύουμε την υπόθεση.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Η συνεισφορά της κυρτότητας στις ανισώσεις είναι μέσω της μονοτονίας της $\mathbf{f'}$.

Αν η f είναι κυρτή, η $\mathbf{f'}$ είναι γνησίως αύξουσα και αν η f είναι κοίλη, η $\mathbf{f'}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ανίσωση της μορφής $\mathbf{f(x) \geq \lambda x + \beta}$ ή $\mathbf{f(x) \leq \lambda x + \beta}$, τότε εξετάζουμε αν η $\mathbf{y = \lambda x + \beta}$ είναι εφαπτομένη της $\mathbf{C_f}$ και αν η f είναι κυρτή ή κοίλη.

Αν η f είναι κυρτή, τότε βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, δηλαδή $\mathbf{f(x) \leq \lambda x + \beta}$, ενώ αν είναι κοίλη ισχύει το αντίθετο.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες, καθώς και τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων:

α. $h(x) = x^2 + 8/x$ **β.** $g(x) = 3x^5 - 5x^3$

γ. $g(x) = 1 + 2x^2 + 2x^2 \cdot (\ln x - 2)^2$ **δ.** $f(x) = x \cdot e^{-x}$

2. **α.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x + 2x \cdot \ln x + x^2 - 3$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο 1 .

3. Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 5\alpha x^4 + 10\beta x^3 + x^2$, $x \in$, $\alpha, \beta \in$, έχει τρία σημεία καμπής, να δείξετε ότι $\alpha^2 > \beta^2$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to$, για την οποία ισχύουν:

$$f(x) < x \quad \text{και} \quad f'(x) = \frac{x}{x - f(x)} , \quad \forall x > 0 .$$

Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

β. Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

5. Δίνεται ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta \cdot \ln x + \beta x$, όπου $\alpha, \beta \in$, έχει σημείο καμπής το Α (1, 3) .

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -1$.

β. Να βρείτε τα διαστήματα, όπου η C_f είναι κυρτή ή κοίλη.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.

δ. Να αποδείξετε ότι $4\sqrt{x} - \ln x \le x + 3$, $\forall x \ge 1$.

6. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο , με $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in$ και g συνάρτηση τέτοια, ώστε $g(x) \cdot f'(x) = 8 \cdot f(x)$, για κάθε $x \in$. Αν η C_f έχει σημείο καμπής το Α (2, f(2)) , να αποδείξετε ότι $g'(2) = 8$.

7. Να αποδείξετε ότι η C_f της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^4 + 4\alpha x^3 + 3(2\alpha^2 - 4\alpha + 5)\cdot x^2 + \alpha x + 1 ,\ \alpha\in$$

δεν έχει σημεία καμπής.

8. Η συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο . Να αποδείξετε ότι αν υπάρχει $\alpha\in$, ώστε $f(\alpha) = f\,'(\alpha) = 1$, τότε η εξίσωση $f(x) = 1$ είναι αδύνατη στο διάστημα (α, β) , $\forall\ \beta > \alpha$.

9. Έστω η συνάρτηση f: $\to$ με την ιδιότητα:

$$(x^2 + x + 1)\cdot f\,''(x) + x\cdot e^{f(x)} = 0 ,\ \text{για κάθε } x\in\ .$$

Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

10. Η συνάρτηση f έχει συνεχή 2η παράγωγο και $x\cdot f\,''(x) - ημ2x = 0$, για κάθε $x\in$. Να δείξετε ότι το Α $(0, f(0))$ δε μπορεί να είναι σημείο καμπής της C_f .

11. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο , με $f\,''$ γνησίως φθίνουσα στο , $f\,'(x) \neq 0$, $\forall\ x\in$, $f\,'(1) > 0$ και η συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(2 - x)$, $\forall\ x\in$.

α. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g.

β. Να βρείτε τα διαστήματα, που η g είναι κυρτή ή κοίλη, καθώς και τα σημεία καμπής της C_g .

12. Έστω μια κυρτή συνάρτηση f: $[0, +\infty) \to$, με $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)/x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

13. Αν $f(x) = 2e^{\lambda x} - x^2 - 2/\lambda^2$, με $\lambda > 0$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της f, για κάθε $\lambda\in(0, +\infty)$.

14. **α.** Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι για κάθε x_1 , $x_2 \in\Delta$ ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \text{(Jensen)}$$

β. Να αποδείξετε ότι: $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - 1 > \sqrt{(e^{\alpha}-1)(e^{\beta}-1)}$, $\forall\ \alpha \neq \beta \in {}_{+}$.

15. Έστω η συνάρτηση f(x) = ln(lnx) .

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο A_f .

β. Να αποδείξετε ότι: $\ln\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\ln\alpha \cdot \ln\beta}$, $\forall\ \alpha, \beta \in A_f$.

16. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\ \to\ $, που η γραφική της παράσταση στρέφει τα κοίλα άνω και περνά από την αρχή των αξόνων. Να δείξετε ότι για κάθε x∈ ισχύει ότι: $3f(x) \geq 4f(3x/4)$.

17. Η συνάρτηση f: (0, 1) → είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι: $f^2(x) + (x-4)\cdot f(x) + x = 0$, για κάθε x∈(0, 1). Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.