

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**  
**ΣΤΑ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	No 6
Τάξη : Β΄ Λυκείου Μάθημα : Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης Κεφάλαιο : 3 <sup>ο</sup> Διδακτική ενότητα : Όλες Ημερομηνία : 10-03-2019 Διδάσκων καθηγητής : Ηλίας Ράιδος	

# ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ

### ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

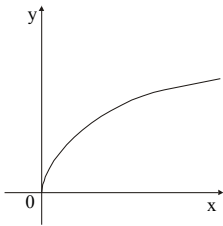
Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 1. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 = a$ ( $a > 0$ ) παριστάνει κύκλο.  | Σ | Λ |
| 2. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 + κx + λy = 0$ με $κ, λ \neq 0$ παριστάνει πάντα κύκλο.   | Σ | Λ |
| 3. * Ο κύκλος με κέντρο $K(1, -1)$ που περνά από το σημείο $(-1, 1)$ , έχει πάντα εξίσωση: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$ .  | Σ | Λ |
| 4. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 + a(x + y + 1) = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε θετικό $a$ .  | Σ | Λ |
| 5. * Το σημείο $(\frac{\eta\mu\theta}{2}, \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{2})$ ανήκει στον κύκλο $4(x - \eta\mu\theta)^2 + 4(y - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό $\theta$ . | Σ | Λ |
| 6. * Οι κύκλοι $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ και $x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$ είναι ομόκεντροι.   | Σ | Λ |
| 7. * Το σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ με τετμημένη 2 βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$ .   | Σ | Λ |
| 8. ** Οι κύκλοι $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ και $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ εφάπτονται εξωτερικά   | Σ | Λ |
| 9. * Ο κύκλος $(x + 1)^2 + y^2 = 18$ τέμνει την ευθεία $y = x + 1$ .  | Σ | Λ |
| 10. ** Τα σημεία $(-2, 2)$ και $(4, 2)$ του κύκλου $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ είναι αντιδιαμετρικά.  | Σ | Λ |
| 11. * Οι κύκλοι $x^2 + (y - 1)^2 = 3$ και $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{10}{3}$ έχουν δύο κοινά σημεία.  | Σ | Λ |
| 12. * Η εξίσωση $(x + y)^2 - 4 = 2xy$ παριστάνει κύκλο.   | Σ | Λ |
| 13. * Οι εξισώσεις $x = \rho\eta\mu\phi$ και $y = \rho\sigma\upsilon\nu\phi$ , $\phi \in [0, 2\pi)$ λέγονται παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ .                              | Σ | Λ |

\* Μία εφαπτομένη ευθεία του κύκλου  $x^2 + y^2 = 1$  στο σημείο με τετμημένη 1, έχει εξίσωση  $x + y = 1$ .

Σ      Λ

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 15.* Η εξίσωση $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 5$ παριστάνει κύκλο με<br>έντρο<br>το σημείο $(1, 0)$ .   | Σ | Λ |
| 6.* Η καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$ , είναι<br>γραφική παράσταση συνάρτησης.  | Σ | Λ |
| 17.* Η σχέση $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ είναι τύπος συνάρτησης που<br>παριστάνει ημικύκλιο $(-a \leq x \leq a)$ .  | Σ | Λ |
| 18.** Ένας κύκλος έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = x$ . Έχει<br>πάντα εξίσωση $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ .   | Σ | Λ |
| 19.* Ένα σημείο $(x_1, y_1)$ είναι εσωτερικό ενός κύκλου με<br>κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα $\rho$ . Ισχύει: $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < \rho^2$ . | Σ | Λ |
| 20.** Η παραβολή με εστία το σημείο $(1, 0)$ έχει παράμετρο<br>$p = 2$ .   | Σ | Λ |
| 21.* Η ευθεία που έχει εξίσωση $y = 3$ είναι παράλληλη στη<br>διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 16x$ .  | Σ | Λ |
| 22.* Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxy$ η παραβολή<br>$y^2 = 2px$ βρίσκεται πάντα στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο<br>άξονας $y'y$ και η εστία $E$ .            | Σ | Λ |
| 23.* Ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής<br>$x^2 = 8y$ .  | Σ | Λ |
| 24. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$<br>στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι $yy_1 = p(x + x_1)$ .  | Σ | Λ |
| 25.** Μια ευθεία και μια παραβολή έχουν ένα κοινό σημείο.<br>Η ευθεία είναι εφαπτομένη της παραβολής.  | Σ | Λ |
| 26.* Μια παραβολή με άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ έχει<br>πάντα εξίσωση της μορφής $x^2 = 2py$ .   | Σ | Λ |

27. \* Μια παραβολή με κορυφή το  $O(0, 0)$  και διευθετούσα την  $y = -\frac{p}{2}$ , έχει άξονα συμμετρίας τον  $x'x$ . Σ Λ
28. \* Κάθε σημείο της παραβολής  $y^2 = 8x$  ισαπέχει από την ευθεία  $x = -2$  και το σημείο  $(4, 0)$ . Σ Λ
- 29.\*\* Όλα τα σημεία της  $y^2 = 2px$  με  $p > 0$  εκτός του  $(0, 0)$ , έχουν θετική τετμημένη. Σ Λ
- 30.\* Η διευθετούσα της  $y^2 = 3x$  είναι η ευθεία  $x = -\frac{3}{4}$ . Σ Λ
- 31.\* Η διευθετούσα της  $x^2 = 4y$  είναι η ευθεία  $y = -1$ . Σ Λ
- 32.\*\* Ο κύκλος  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  και η παραβολή  $y^2 = -2x$  εφάπτονται. Σ Λ
- 33.\* Η εστία της παραβολής  $x^2 = y$  βρίσκεται πάνω στην ευθεία  $y = x$ . Σ Λ
- 34.\* Στο σημείο  $(x_0, y_0)$  της παραβολής  $y^2 = 2px$  η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = \frac{p}{y_0}$  ( $y_0 \neq 0$ ). Σ Λ
- 35.\* Ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 1$  περνά από την εστία της παραβολής  $y^2 = 4x$ . Σ Λ
- 36.\* Η εξίσωση  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ , παριστάνει καμπύλη της μορφής του διπλανού σχήματος. Σ Λ
- 
- 37.\* Δύο από τις κορυφές και οι εστίες οποιασδήποτε έλλειψης, βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Σ Λ
- 38.\* Όσο η εκκεντρότητα μιας έλλειψης πλησιάζει προς το 0, τόσο η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Σ Λ
- 39.\* Η εξίσωση  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  παριστάνει έλλειψη μόνο αν  $\alpha > \beta$ . Σ Λ
- 40.\*\* Η εστιακή απόσταση μιας έλλειψης είναι το μισό του μεγάλου άξονα. Η εκκεντρότητα αυτής της έλλειψης είναι  $\frac{1}{2}$ . Σ Λ
- 41.\* Μια ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με μια έλλειψη, είναι πάντοτε εφαπτομένη της. Σ Λ
- 42.\* Η εξίσωση  $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = \frac{3}{2}$  παριστάνει έλλειψη. Σ Λ
- 43.\* Το σημείο  $(\kappa, \lambda)$  ανήκει σε κάθε έλλειψη με κέντρο

- Ο, η οποία περιέχει το σημείο  $(-κ, -λ)$ . Σ    Λ
- 44.\* Δύο ελλείψεις που έχουν τις ίδιες εστίες, είναι όμοιες. Σ    Λ
- 45.\* Δύο όμοιες ελλείψεις έχουν πάντα τις ίδιες εστίες. Σ    Λ
- 46.\* Το σημείο  $A(2, -2)$  βρίσκεται έξω από την έλλειψη  $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Σ    Λ
- 47.\* Η εξίσωση  $x^2 + ky^2 = 1$  παριστάνει έλλειψη μόνο όταν  $κ > 0$ . Σ    Λ
- 48.\* Η έλλειψη  $x^2 + 2y^2 = 1$  και ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 1$  δεν έχουν κοινό σημείο. Σ    Λ
- 49.\*\* Τα σημεία της έλλειψης  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  είναι εσωτερικά της έλλειψης  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ . Σ    Λ
- 50.\* Η ευθεία  $y = -3$  είναι εφαπτομένη της έλλειψης  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Σ    Λ
- 51.\* Η ευθεία  $x = 2$  είναι εφαπτομένη της έλλειψης  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ . Σ    Λ
- 52.\* Εστιακή απόσταση μιας έλλειψης ονομάζεται η απόσταση δύο σημείων της που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της. Σ    Λ
- 53.\* Η εφαπτομένη της έλλειψης  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  στο σημείο της  $M(\alpha\sigma\upsilon\theta, \beta\eta\mu\theta)$  είναι  $(\sigma\upsilon\theta)x + (\eta\mu\theta)y = 1$ . Σ    Λ
- 54.\* Η εκκεντρότητα της έλλειψης  $4x^2 + y^2 = 4$  είναι  $\epsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Σ    Λ
- 55.\*\* Οι ελλείψεις  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  και  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$  είναι όμοιες. Σ    Λ
- 56.\* Η εξίσωση μιας υπερβολής είναι  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .  
Ισχύει πάντα  $a > \beta$ . Σ    Λ
- 57.\* Η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  Σ    Λ

σε δύο σημεία.

58.\* Όσο πιο μεγάλη είναι η εκκεντρότητα, τόσο πιο ανοικτή είναι η υπερβολή. Σ Λ

59.\* Η ισοσκελής υπερβολή  $x^2 - y^2 = a^2$  έχει εκκεντρότητα  $e = \sqrt{2}$ . Σ Λ

60.\* Η υπερβολή  $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$  έχει ασύμπτωτες τις ευθείες  $\epsilon_1: y = \frac{\alpha}{\beta} x$  και  $\epsilon_2: y = -\frac{\alpha}{\beta} x$ . Σ Λ

61.\* Η εξίσωση  $x^2 - 9y = 0$  παριστάνει υπερβολή. Σ Λ

62.\* Το ορθογώνιο βάσης μιας υπερβολής έχει κοινά σημεία με την υπερβολή. Σ Λ

63.\*\* Το σημείο (5, 4) ανήκει σε μια διευθετούσα ευθεία της υπερβολής  $16x^2 - 25y^2 = 40$ . Σ Λ

64.\* Υπάρχουν υπερβολές που οι ασύμπτωτές τους είναι κάθετες μεταξύ τους. Σ Λ

65.\* Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός. Σ Λ

66.\* Η εξίσωση  $kx^2 + ly^2 = 0$  παριστάνει υπερβολή για κάθε  $k, l \in \mathbb{R}$ . Σ Λ

67.\* Η υπερβολή  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στα σημεία (0, 2) και (0, -2). Σ Λ

68.\*\* Η υπερβολή  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$  έχει τέσσερα κοινά σημεία με τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 4$ . Σ Λ

69.\* Η ευθεία  $y = \frac{1}{2} x$  εφάπτεται της υπερβολής  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ . Σ Λ

70.\* Η διχοτόμος της γωνίας  $xOy$  τέμνει την υπερβολή  $x^2 - y^2 = 4$  σε δύο σημεία. Σ Λ

71.\*\* Κάθε ασύμπτωτη της υπερβολής  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  είναι κάθετη σε μία από τις ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ . Σ Λ

72.\* Υπάρχει  $\theta \in \mathbb{R}$ , ώστε το σημείο  $(\eta\mu\theta, 1)$  ανήκει στην

υπερβολή  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ .

Σ      Λ

73.\*\* Οι υπερβολές  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$  και  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  έχουν

τις ίδιες εστίες.

Σ      Λ

## Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. \* Το σημείο  $M(-2, 3)$  ανήκει στη γραμμή με εξίσωση  
 Α.  $x = 3$                       Β.  $x = -2$                       Γ.  $x^2 + y^2 = 1$   
 Δ.  $(x + 2)^2 + (x - 3)^2 = 1$     Ε.  $y^2 = -2x$
2. \* Το κέντρο του κύκλου που έχει διάμετρο  $AB$  με  $A(1, -3)$  και  $B(7, 5)$ , έχει συντεταγμένες  
 Α.  $(4, 4)$     Β.  $(3, 4)$     Γ.  $(4, -4)$     Δ.  $(4, 1)$     Ε.  $(4, -1)$
3. \* Η ακτίνα του κύκλου  $x^2 + y^2 = 8$  είναι  
 Α. 2            Β.  $2\sqrt{2}$             Γ.  $4\sqrt{2}$     Δ. 4            Ε. 8
4. \* Το κέντρο του κύκλου  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$  είναι  
 Α.  $(3, -2)$     Β.  $(2, -3)$     Γ.  $(2, 3)$     Δ.  $(-2, 3)$     Ε.  $(-3, 2)$
5. \* Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο  $(-1, -1)$  και διέρχεται από το σημείο  $(4, -3)$ , είναι  
 Α.  $x^2 + y^2 = 29$                       Β.  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{29}$   
 Γ.  $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{29}$     Δ.  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 29$   
 Ε.  $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 29$
6. \* Ένας κύκλος που διέρχεται από το σημείο  $(3, 9)$  και έχει ακτίνα 9, έχει εξίσωση  
 Α.  $x^2 + y^2 = 81$                       Β.  $x^2 + y^2 = 3$                       Γ.  $x^2 + y^2 = 9$   
 Δ.  $(x - 3)^2 + y^2 = 81$             Ε.  $(x - 3)^2 + y^2 = 49$
7. \*\* Ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο  $(1, 2)$  και εφάπτεται στον άξονα των  $x'x$ , έχει εξίσωση  
 Α.  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$                       Β.  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$   
 Γ.  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$                       Δ.  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$   
 Ε.  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$
8. \*\* Η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = 5$  στο σημείο  $(2, 1)$  είναι παράλληλη στην ευθεία  
 Α.  $x - 2y + 1 = 0$                       Β.  $2x + 3y + 7 = 0$                       Γ.  $x + 2y = 4$   
 Δ.  $4x + 2y + 1 = 0$                       Ε.  $y = x$
9. \*\* Ο κύκλος  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \rho^2$  εφάπτεται του άξονα  $x'x$ . Η τιμή του  $\rho$  είναι  
 Α. 1                      Β. 2                      Γ. 3                      Δ. 5  
 Ε. καμία από τις προηγούμενες
10. \* Ο κύκλος  $x^2 + y^2 - 6x - 8ky + k^2 - 2k + 1 = 0$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η τιμή του  $k$  είναι  
 Α. 4                      Β. 3                      Γ. 2                      Δ. 1                      Ε. 0



11. \*\* Ο κύκλος που έχει κέντρο το  $(x_0, 0)$ , εφάπτεται στον άξονα  $y'y$ .  
 Η εξίσωσή του είναι  
 Α.  $(x - x_0)^2 + y^2 = x_0^2$       Β.  $x^2 + y^2 = x_0^2$       Γ.  $(x - x_0)^2 + y^2 = \rho^2$   
 Δ.  $(x - \rho)^2 + y^2 = \rho$       Ε.  $(x - x_0)^2 + y^2 = x_0$
12. \*\* Ο κύκλος  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$  ( $\alpha, \beta, \rho$  θετικοί) εφάπτεται στους δύο θετικούς ημιάξονες  $Ox, Oy$ , όταν  
 Α.  $\alpha = \beta \neq \rho$       Β.  $\alpha \neq \beta = \rho$       Γ.  $\alpha > \beta$   
 Δ.  $\alpha = \rho = \beta$       Ε. κανένα από τα προηγούμενα
13. \*\* Ο κύκλος που έχει εξίσωση την  $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$   
 Α. διέρχεται από το σημείο  $A(\alpha, \alpha)$   
 Β. διέρχεται από το σημείο  $A(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha})$   
 Γ. έχει το κέντρο του στην  $y = x + 1$   
 Δ. έχει το κέντρο του στην ευθεία  $y = -x$   
 Ε. εφάπτεται στους άξονες  $x'x$  και  $y'y$
14. \*\* Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις  $C_1: (x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$  και  $C_2: x^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$  ( $\alpha \neq 0$ ).  
 Α. Η απόσταση των κέντρων τους είναι  $2\alpha$   
 Β. Η απόσταση των κέντρων τους είναι  $|\alpha|\sqrt{2}$   
 Γ. Η απόσταση των κέντρων τους είναι  $2\alpha^2$   
 Δ. Το κέντρο του  $C_1$  είναι εσωτερικό του  $C_2$   
 Ε. Το κέντρο του  $C_2$  βρίσκεται πάνω στον  $C_1$
15. \*\* Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει πάντα κύκλο, όταν  
 Α.  $A^2 + B^2 - 4\Gamma$  είναι τέλειο τετράγωνο      Β.  $|A| + |B| \neq 0$   
 Γ.  $A^2 + B^2 > 4\Gamma$       Δ.  $4A^2 + 4B^2 - \Gamma < 0$   
 Ε.  $A^2 + B^2 < 4\Gamma$
16. \*\* Ο κύκλος  $x^2 + y^2 + x = 0$   
 Α. εφάπτεται στον  $x'x$       Β. εφάπτεται στον  $y'y$   
 Γ. τέμνει τον  $y'y$  σε δύο σημεία      Δ. δεν τέμνει κανένα άξονα  
 Ε. εφάπτεται και στους δύο αξόνες
17. \*\* Ο κύκλος  $x^2 + y^2 - 2\alpha(x + y) = -\alpha^2$ ,  $\alpha > 0$  έχει κέντρο  
 Α.  $(\alpha, \alpha)$       Β.  $(2\alpha, \alpha)$       Γ.  $(\frac{\alpha}{2}, 2\alpha)$       Δ.  $(\alpha, -2\alpha)$       Ε.  $(\alpha^2, \alpha)$

18. \*\* Δίνεται το σημείο  $A \left( \frac{1}{2} \eta\mu\theta, \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu\theta \right)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  και ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 1$ .

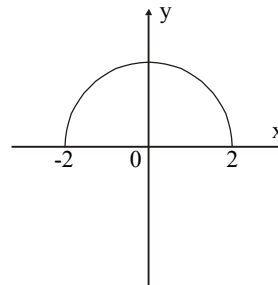
- A. Το σημείο  $A$  ανήκει στον κύκλο, για κάθε  $\theta \in \mathbb{R}$
- B. Το σημείο  $A$  ανήκει στον κύκλο, αν  $\theta \in (0, \pi)$
- Γ. Το σημείο  $A$  βρίσκεται έξω από τον κύκλο
- Δ. Το σημείο  $A$  βρίσκεται μέσα στον κύκλο
- Ε. Το σημείο  $A$  βρίσκεται άλλοτε μέσα και άλλοτε έξω από τον κύκλο

19. \*\* Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο  $K (-1, -2)$  και περνά από το σημείο  $(2, 2)$ , είναι

- A.  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$
- B.  $x^2 + y^2 + 2x + 2y = -3$
- Γ.  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$
- Δ.  $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 3$
- Ε.  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

20. \*\* Η εξίσωση του ημικυκλίου του διπλανού σχήματος είναι

- A.  $x^2 + y^2 = 2$
- B.  $x^2 + y^2 = 4$
- Γ.  $y = \sqrt{4 - x^2}$
- Δ.  $x = \sqrt{4 - y^2}$
- Ε.  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$



21. \*\* Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 5$  και το σημείο του  $M (-1, 2)$ . Η εφαπτομένη του στο  $M$  έχει εξίσωση

- A.  $2x - y = 5$
- B.  $-x - 2y = 5$
- Γ.  $x + 2y - 5 = 0$
- Δ.  $x - 2y + 5 = 0$
- Ε.  $2x + y = 5$

22. \*\* Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 3$  και το σημείο του  $M (+\sqrt{2}, -1)$ . Η εφαπτομένη του  $M$  είναι

- A.  $-\sqrt{2}x + y - 3 = 0$
- B.  $\sqrt{2}x - y - 3 = 0$
- Γ.  $x - y = 3$
- Δ.  $\sqrt{2}x + y = 3$
- Ε.  $-x + \sqrt{2}y = 3$

23. \*\* Η παραβολή που έχει εστία  $E (0, 4)$  και κορυφή το  $O (0, 0)$ , έχει εξίσωση

- A.  $y^2 = 8x$
- B.  $y^2 = -8x$
- Γ.  $y^2 = 16x$
- Δ.  $x^2 = 16y$
- Ε.  $x^2 = 8y$

24. \*\* Η εφαπτομένη της παραβολής  $y^2 = 16x$  στο σημείο  $(1, 4)$  είναι παράλληλη στην ευθεία

- A.  $y = x$
- B.  $y = -x$
- Γ.  $y = 2x + 1$
- Δ.  $y = x + 2$
- Ε.  $4y = x$

25. \* Τα κοινά σημεία της παραβολής  $y^2 = 8x$  και της ευθείας  $x - y = 0$  είναι

- A.  $(0, 0)$  και  $(1, 1)$
- B.  $(8, 8)$  και  $(2, 1)$
- Γ.  $(0, 0)$  και  $(8, 8)$

Δ.  $(1, \sqrt{8})$  και  $(-1, \sqrt{8})$     Ε.  $(2, 4)$  και  $(4, 2)$

26. \*\* Το σημείο Α  $(κ, 4)$  ανήκει στην παραβολή  $y^2 = 8x$ . Το συμμετρικό σημείο Α΄ του Α ως προς τον άξονα  $x'x$  είναι

Α.  $(4, 4)$     Β.  $(-4, 4)$     Γ.  $(2, 4)$     Δ.  $(2, -4)$     Ε.  $(2, -2)$

27. \*\* Μια παραβολή με κορυφή το Ο  $(0, 0)$  έχει διευθετούσα την  $x = \frac{3}{2}$ .

Η παραβολή αυτή έχει εξίσωση

Α.  $y^2 = 6x$     Β.  $y^2 = -6x$     Γ.  $y^2 = 3x$     Δ.  $x^2 = -6y$     Ε.  $x^2 = -3y$

28. \*\* Η εξίσωση  $y = ax^2$ ,  $a \neq 0$  παριστάνει παραβολή

Α. της μορφής  $y^2 = 2px$  με  $p = \frac{a}{2}$

Β. της μορφής  $y^2 = 2px$  με  $p = 2a$

Γ. η οποία βρίσκεται στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο

Δ. της μορφής  $x^2 = 2py$  με  $p = \frac{a}{2}$

Ε. με άξονα συμμετρίας τον  $y'y$

29. \*\* Η εξίσωση  $y^2 = 4ax$

Α. παριστάνει παραβολή, μόνο αν  $a > 0$

Β. παριστάνει παραβολή, μόνο αν  $a = \frac{1}{2} p$  ( $p > 0$ )

Γ. παριστάνει παραβολή για κάθε  $a \neq 0$

Δ. παριστάνει παραβολή για κάθε  $a$  πραγματικό αριθμό

Ε. παριστάνει παραβολή μόνο όταν  $a$  ρητός

30. \*\* Οι παραβολές  $y^2 = ax$  και  $x^2 = ay$  ( $a \neq 0$ )

Α. έχουν ένα μόνο κοινό σημείο

Β. εφάπτονται στο Ο  $(0, 0)$

Γ. έχουν ένα ή δύο κοινά σημεία ανάλογα με το  $a$

Δ. έχουν πάντα δύο κοινά σημεία

Ε. υπάρχει τιμή του  $a$  για την οποία δεν τέμνονται

31. \* Η εφαπτομένη της παραβολής  $y^2 = 2px$  στο σημείο της  $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$  έχει συντελεστή διεύθυνσης

Α.  $\lambda = \frac{p}{y_1}$     Β.  $\lambda = \frac{2p}{y_1}$     Γ.  $\lambda = \frac{y_1}{p}$     Δ.  $\lambda = \frac{y_1}{2p}$     Ε.  $\lambda = 2p$

32. \*\* Οι εφαπτόμενες της παραβολής  $y^2 = 2px$  στα σημεία  $(x_1, y_1)$  και  $(x_1, -y_1)$

Α. είναι παράλληλες

Β. είναι πάντα κάθετες

- Γ. τέμνονται σε σημείο του άξονα  $y'y$
- Δ. τέμνονται σε σημείο του άξονα  $x'x$
- Ε. σχηματίζουν πάντα οξεία γωνία

33. \*\* Η εξίσωση  $y^2 = 16|x|$

- Α. παριστάνει μια παραβολή
- Β. παριστάνει δύο παραβολές
- Γ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν  $x > 0$
- Δ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν  $x < 0$
- Ε. παριστάνει δύο ευθείες

34. \*\* Το σημείο Α (2, 4) της παραβολής  $y^2 = 8x$  απέχει από τη διευθετούσα απόσταση

- Α. 2
- Β. 4
- Γ. 8
- Δ. 16
- Ε.  $\sqrt{8}$

35. \* Αν  $E', E$  οι εστίες μιας έλλειψης με μεγάλο άξονα μήκους  $2a$  και Α τυχόν σημείο της έλλειψης, τότε

- Α.  $(AE') - (AE) = a$
- Β.  $(AE') + (AE) = a$
- Γ.  $(AE') = (AE)$
- Δ.  $(AE') + (AE) = 2a$
- Ε.  $(AE') - (AE) = 2a$

36. \*\* Η απόσταση του κέντρου της έλλειψης  $\frac{25x^2}{9} + 4y^2 = 1$  από τη μια εστία της είναι

- Α.  $\frac{7}{6}$
- Β.  $\frac{\sqrt{11}}{10}$
- Γ.  $\frac{\sqrt{11}}{5}$
- Δ.  $\frac{5}{2}$
- Ε.  $\frac{4}{3}$

37. \*\* Η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες  $E' (0, -2)$  και  $E (0, 2)$  και μικρό άξονα 10, είναι

- Α.  $\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{25} = 1$
- Β.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$
- Γ.  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$
- Δ.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{29} = 1$
- Ε.  $2x^2 - 2y^2 = 10$

38. \*\* Από τις παρακάτω ελλείψεις με εστίες στον άξονα  $y'y$  και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, έχει εστιακή απόσταση 6 η

- Α.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
- Β.  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$
- Γ.  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$
- Δ.  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1$
- Ε.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

39. \* Έστω η έλλειψη C:  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  με εστιακή απόσταση  $2\gamma$  και μεγάλο άξονα  $2\alpha$ . Τότε θα είναι

πάντα

A.  $\alpha > \beta > \gamma$

B.  $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$

Γ.  $0 < \alpha < \beta$

Δ.  $\gamma > \alpha$

E.  $\gamma < \alpha$

40. \*\* Η έλλειψη που έχει την ίδια εκκεντρότητα με την C:  $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ , είναι

A.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

B.  $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

Γ.  $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$

Δ.  $\frac{y^2}{4^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1$

E.  $\frac{4x^2}{3^2} + \frac{4y^2}{5^2} = 1$

41. \* Η έλλειψη  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$  έχει μια εστία στο σημείο

A. (2, 3)

B. (0,  $\sqrt{2}$ )

Γ. ( $\sqrt{3}$ , 0)

Δ. (-1, 0)

E. (0, -1)

42. \*\* Οι ελλείψεις  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  και  $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$  έχουν

A. δύο μόνο κοινά σημεία

B. τέσσερα κοινά σημεία

Γ. ένα μόνο κοινό σημείο

Δ. κανένα κοινό σημείο

E. άπειρα κοινά σημεία

43. \*\* Η εξίσωση  $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ ,  $\alpha, \beta \neq 0$

A. παριστάνει πάντα μία έλλειψη

B. παριστάνει πάντα έναν κύκλο

Γ. παριστάνει δύο τεμνόμενες ευθείες

Δ. παριστάνει μία έλλειψη, αν  $\alpha \neq \beta$

E. παριστάνει μία έλλειψη, αν  $\alpha = \beta$

44. \*\* Η έλλειψη  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  είναι όμοια με την

A.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

B.  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$

Γ.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Δ.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

E.  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

45. \*\* Μια από τις ελλείψεις με εστίες τα σημεία E' (-2, 0) και E (2, 0) είναι και η

A.  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$

B.  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

Γ.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

Δ.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

E.  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$

46. \*\* Δίνεται η έλλειψη C:  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$  και το σημείο της M  $(-\sqrt{5}, 0)$ .

Η εφαπτομένη της στο M θα είναι

A.  $\sqrt{5}y - 5 = 0$       B.  $+\sqrt{5}x + 5 = 0$       Γ.  $\sqrt{5}x - 15 = 0$

Δ.  $-\sqrt{5}x + y - 15 = 0$       E.  $-3\sqrt{5}x - 15 = 0$

47. \*\* Δίνεται η έλλειψη C:  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 2$  και το σημείο της M  $(\sqrt{2}, -1)$ .

Η εφαπτομένη της στο M θα έχει εξίσωση

A.  $x - \sqrt{2}y = 4$       B.  $\sqrt{2}x - 2y - 4 = 0$       Γ.  $\sqrt{2}x + 2y = 4$

Δ.  $x - 2y - 4 = 0$       E.  $-\sqrt{2}x - 2y = 4$

48. \* Μια ασύμπτωτη της υπερβολής  $16x^2 - 25y^2 = 400$  είναι

A.  $y = \frac{5}{4}x$       B.  $y = \frac{4}{5}x$       Γ.  $y = \frac{16}{25}x$

Δ.  $y = \frac{25}{16}x$       E. καμία από τις προηγούμενες

49. \*\* Η εξίσωση της υπερβολής που έχει εστιακή απόσταση  $2\gamma = 8$  και εκκεντρότητα  $\frac{4}{3}$  είναι

A.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$       B.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$       Γ.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$

Δ.  $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$       E.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

50. \*\* Μια υπερβολή έχει εξίσωση C:  $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ . Τότε

A. η C έχει τις εστίες της στον άξονα  $y'y$

B. έχει ασύμπτωτες τις  $y = \pm \frac{4}{3}x$

Γ. έχει εστίες E' (-5, 0), E (5, 0)

Δ. είναι  $\alpha = 3$  και  $\beta = 4$

E. έχει κορυφές A' (-3, 0), A (3, 0)

51. \*\* Οι υπερβολές C<sub>1</sub>:  $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$  και C<sub>2</sub>:  $\alpha^2y^2 - \beta^2x^2 = \alpha^2\beta^2$  έχουν

A. την ίδια εκκεντρότητα

B. τις ίδιες εστίες

Γ. την ίδια εστιακή απόσταση

Δ. διαφορετικές ασύμπτωτες

E. τις ίδιες κορυφές

52. \*\* Η υπερβολή  $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  και η έλλειψη  $C_2: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  έχουν

- A. την ίδια εστιακή απόσταση
- B. τις ίδιες εστίες
- Γ. την ίδια εκκεντρότητα
- Δ. δύο από τις κορυφές της  $C_2$  ταυτίζονται με τις κορυφές της  $C_1$
- E. τέσσερα κοινά σημεία

53. \*\* Δίνεται η υπερβολή  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  και ένα σημείο της  $M_1 (x_1, y_1)$ .

Η εφαπτομένη της στο  $M_1$  θα έχει εξίσωση

A.  $\frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$       B.  $\frac{xx_1}{\beta^2} - \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$       Γ.  $\beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2$

Δ.  $\alpha^2 x_1 x - \beta^2 y_1 y = 1$       E.  $xx_1 - yy_1 = 1$

54. \*\* Η εξίσωση  $kx^2 + \lambda y^2 = \mu$  με  $k, \lambda, \mu \neq 0$  παριστάνει πάντα υπερβολή με

A.  $\mu = 1$       B.  $k\lambda < 0$       Γ.  $\mu < 0$       Δ.  $k \neq \lambda$       E.  $k = \mu$  ή  $\lambda = \mu$

55. \*\* Οι υπερβολές  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  και  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$  έχουν

- A. την ίδια εκκεντρότητα
- B. τις ίδιες ασύμπτωτες
- Γ. τις ίδιες εστίες
- Δ. τις ίδιες κορυφές
- E. μία μόνο κοινή εστία

56. \*\* Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{3} \sqrt{16x^2 - 144}$

( $x \geq 3$  ή  $x \leq -3$ ) είναι

- A. κύκλος με ακτίνα  $\rho = 12$
- B. έλλειψη με  $\alpha = 3$  και  $\beta = 4$
- Γ. υπερβολή με εστίες  $(-5, 0), (5, 0)$
- Δ. τα δύο άνω τμήματα υπερβολής με εστίες  $(-5, 0), (5, 0)$
- E. παραβολή με διευθετούσα  $x = -\frac{5}{4}$

57. \*\* Τα σημεία  $M(x, y)$  για τα οποία ισχύει:  $|(AM) - (BM)| = 6$  με  $A(-5, 0)$  και  $B(5, 0)$

- A. ανήκουν στην έλλειψη  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$
- B. ανήκουν στην υπερβολή  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$
- Γ. ανήκουν στην υπερβολή  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
- Δ. ανήκουν στην υπερβολή  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$

Ε. ανήκουν στην υπερβολή  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

58. \* Δίνεται η υπερβολή  $x^2 - y^2 = 3$  και το σημείο της Μ (- 2, 1). Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο Μ είναι

- Α.  $x - 2y = 3$                       Β.  $2x + y = 3$                       Γ.  $- 2x + y = 3$   
 Δ.  $2x + y + 3 = 0$                       Ε.  $2x - y + 3 = 0$

59. \* Ένα σημείο της υπερβολής  $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$  είναι το Μ (1, 2). Η εφαπτομένη της στο Μ έχει εξίσωση

- Α.  $x + y + 1 = 0$                       Β.  $2x - y = 2$                       Γ.  $x - 2y + 2 = 0$   
 Δ.  $2x - y = - 2$                       Ε.  $x - y + 1 = 0$

## Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. \*\* Σε κάθε κύκλο της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη του στη στήλη Β. Το σημείο επαφής είναι το  $(x_0, y_0)$ .

στήλη Α	στήλη Β
κύκλος	εφαπτόμενη ευθεία
1) $x^2 + y^2 = 1$ (0, 1)	Α) $y = 0$
2) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ (2, 0)	Β) $x + 4(y + 2) = 5$
3) $x^2 + y^2 = 25$ (3, 4)	Γ) $y = 1$
4) $x^2 + (y + 2)^2 = 5$ (1, 2)	Δ) $y = x$
	Ε) $3x + 4y = 25$
	ΣΤ) $x - 2y = 1$



2. \*\* Σε κάθε κύκλο της στήλης Α να αντιστοιχίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα του ρ.

στήλη Α κύκλος	στήλη Β κέντρο - ακτίνα
1) $x^2 + y^2 - \sqrt{\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$	Α) Κ (α, 1) $\rho = \frac{\alpha}{2}$
2) $x^2 + y^2 - 2x + 2\alpha y = -\alpha^2$	Β) Κ (-1, $\frac{3}{2}$ ) $\rho = \frac{3}{2}$
3) $(x + \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = 2\alpha x + 2\alpha^2,$ $\alpha \neq 0$	Γ) Κ (0, 0) $\rho = \sqrt[4]{\alpha}$ Δ) Κ (α, α) $\rho =  \alpha $
4) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y = -2$	Ε) Κ (1, -α) $\rho = 1$ ΣΤ) Κ (0, α) $\rho =  \alpha $

3. \*\* Να αντιστοιχίσετε κάθε παραβολή της στήλης Α με την εστία της στη στήλη Β.

στήλη Α παραβολή	στήλη Β εστία
1) $y^2 = px$	Α) $(-\frac{p}{2}, 0)$
2) $x^2 = py$	Β) $(\frac{p}{8}, 0)$
	Γ) $(\frac{p}{4}, 0)$
3) $y^2 = -2px$	Δ) $(0, \frac{p}{2})$
	Ε) $(0, \frac{p}{4})$
4) $y^2 = \frac{p}{2}x$	ΣΤ) $(0, -\frac{p}{2})$

4. \*\* Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 2x$ . Σε κάθε σημείο της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη της παραβολής σ' αυτό το σημείο που γράφεται στη στήλη Β.

στήλη Α σημείο	στήλη Β εφαπτομένη παραβολής
1) (0, 0)	Α) $y = x + \frac{1}{2}$
2) $(\frac{1}{2}, 1)$	Β) ο άξονας $y'y$
	Γ) $-2y = x + 2$
3) $(\frac{1}{2}, -1)$	Δ) $y = x - 2$
4) (2, 2)	Ε) $-y = x + \frac{1}{2}$
	ΣΤ) $2y = x + 2$

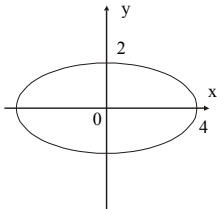
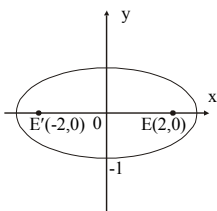
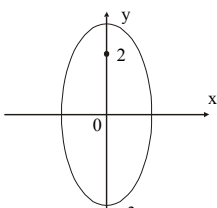
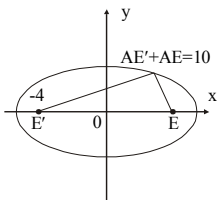
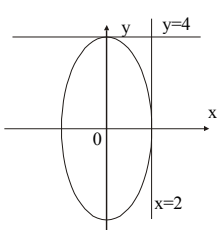
5. \*\* Στη στήλη (Α) δίνεται σε κάθε γραμμή η εστία E και η διευθετούσα δ μιας παραβολής, της οποίας η εξίσωση γράφεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα στοιχεία της πρώτης στήλης με αυτά της δεύτερης.

στήλη Α εστία - διευθετούσα	στήλη Β εξίσωση παραβολής
1) E (- 2, 0) και δ: x - 2 = 0	Α) $x^2 = 16y$
2) E (0, 4) και δ: y + 4 = 0	Β) $y^2 = - 8x$
3) E (3, 0) και δ: x + 3 = 0	Γ) $y^2 = 8x$
	Δ) $y^2 = 12x$
	Ε) $x^2 = - 16y$

6. \*\* Στη στήλη (Α) δίνεται σε κάθε γραμμή η εξίσωση μιας παραβολής που έχει εστία E και διευθετούσα δ, που γράφονται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α	στήλη Β
1) $y^2 = x$	Α) E (- 1, 0) και δ: x + 1 = 0
2) $y^2 = - 4x$	Β) E ( $\frac{1}{4}$ , 0) και δ: x + $\frac{1}{4}$ = 0
3) $x^2 = 20y$	Γ) E (- 5, 1) και δ: x + 1 = 0
	Δ) E (- 1, 0) και δ: x - 1 = 0
	Ε) E (0, 5) και δ: y + 5 = 0

7. \*\* Να αντιστοιχίσετε σε κάθε έλλειψη της στήλης (Α) την εξίσωσή της στη στήλη (Β).

στήλη Α έλλειψη	στήλη Β εξίσωση έλλειψης
<p>1)</p> 	<p>Α) <math>\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1</math></p>
<p>2)</p> 	<p>Β) <math>\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1</math></p>
<p>3)</p> 	<p>Γ) <math>\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1</math></p>
<p>4)</p> 	<p>Δ) <math>x^2 + 5y^2 = 5</math></p>
<p>5)</p> 	<p>Ε) <math>x^2 + 2y^2 = 1</math></p> <p>ΣΤ) <math>\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1</math></p>

8. \*\* Κάθε κωνική της στήλης (Α) έχει εξίσωση που βρίσκεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α είδος κωνικής	στήλη Β εξίσωση γραμμής
1) κύκλος	Α) $x + y = 1$
2) παραβολή	Β) $x^2 + y^2 = 0$
3) έλλειψη	Γ) $x^2 = 9 - (y - 1)^2$
4) υπερβολή	Δ) $9x^2 = 63 + 7y^2$
	Ε) $y^2 - 16x = 0$
	ΣΤ) $4x^2 = 100 - 25y^2$

9. \*\* Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση υπερβολής της στήλης (Α) με τις ασύμπτωτές της στη στήλη (Β).

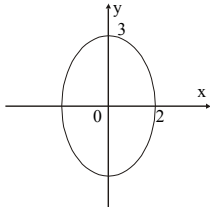
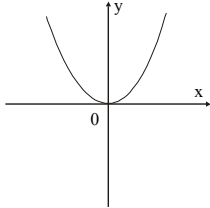
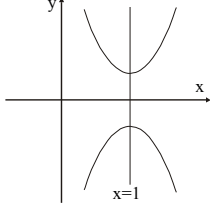
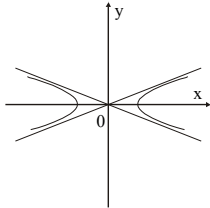
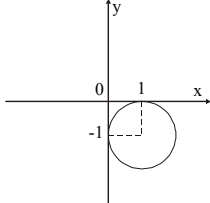
στήλη Α εξίσωση υπερβολής	στήλη Β εξισώσεις ασυμπτώτων
1) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$	Α) $y = \pm x$
2) $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$	Β) $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} x$
3) $6x^2 - 5y^2 = 30$	Γ) $y = \pm 2x$
4) $x^2 - y^2 = 4$	Δ) $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} x$
	Ε) $y = \pm \frac{\sqrt{5} \sqrt{6}}{5} .x$
	ΣΤ) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x$

10. \*\* Σε κάθε γραμμή της στήλης (Α) γράφεται η εξίσωση μιας κωνικής, η οποία έχει εκκεντρότητα που γράφεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α εξίσωση κωνικής	στήλη Β εκκεντρότητα
1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$	Α) $\sqrt{3}$
2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$	Β) $\frac{\sqrt{13}}{3}$
3) $4x^2 + 9y^2 = 36$	Γ) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
	Δ) $-\sqrt{13}$
	Ε) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



11. \*\* Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης (Α) με την αντίστοιχη γραφική παράσταση της στήλης (Β).

στήλη Α	στήλη Β
<p>1) <math>x^2 = 4y</math></p>	<p><b>A)</b></p> 
<p>2) <math>(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1</math></p>	<p><b>B)</b></p>  <p><b>Γ)</b></p> 
<p>3) <math>\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1</math></p>	<p><b>Δ)</b></p>  <p><b>E)</b></p> 

12. \*\* Σε κάθε υπερβολή της στήλης (Α) να αντιστοιχίσετε την εξίσωση μιας ασύμπτωτής της στη στήλη (Β).

στήλη Α υπερβολή	στήλη Β ασύμπτωτη υπερβολής
1) $x^2 - y^2 = a^2$	Α) $\sqrt{2}x - y = 0$
2) $2x^2 - y^2 = 4$	Β) $3x - 4y = 0$
3) $(x - 2y)(x + 2y) = 4$	Γ) $y = x$
4) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	Δ) $4x - 3y = 0$
	Ε) $2x - y = 0$
	ΣΤ) $x + 2y = 0$

## Ερωτήσεις διάταξης

1. Να γράψετε τους παρακάτω κύκλους  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένας να έχει από τον προηγούμενό του μεγαλύτερη ακτίνα:

$$C_1: x^2 + y^2 = 4 \quad C_2: x^2 + 2x + y^2 = 9 \quad C_3: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

$$C_4: 4x^2 + 4y^2 = 7 \quad C_5: x^2 + (y - 2)^2 = 6$$

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραβολές  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμιά να έχει από τον προηγούμενη της μεγαλύτερη παράμετρο:

$$C_1: y^2 = 4x \quad C_2: y^2 = \frac{1}{4}x \quad C_3: y^2 = -6x$$

$$C_4: y^2 = \sqrt{2}x \quad C_5: x = 2y^2$$

3. Να γράψετε τα σημεία  $A(0, 3), B(2, 0), \Gamma(2, 2), \Delta(0, 0)$  και  $E(2, -2)$  σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένα από το προηγούμενό του να έχει μεγαλύτερη απόσταση από την ασύμπτωτη της υπερβολής  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ , που βρίσκεται στην πρώτη και τρίτη γωνία των αξόνων.

4. Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 8x$  και τα σημεία  $A(2, 0), B(-1, 0), \Gamma(0, 4), \Delta(-5, 1), E(-2, 2)$ , τα οποία απέχουν από τη διευθετούσα της παραβολής αποστάσεις  $d_A, d_B, d_\Gamma, d_\Delta, d_E$  αντιστοίχως.

Να γράψετε σε μια σειρά τις αποστάσεις  $d_A, d_B, d_\Gamma, d_\Delta, d_E$ , έτσι ώστε καθεμιά να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη της.

5. Να γραφούν οι παρακάτω κωνικές σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμιά να έχει μεγαλύτερη εκκεντρότητα από την προηγούμενη της.

$$C_1: x^2 + 4y^2 = 4 \quad C_2: 4x^2 + 9y^2 = 36 \quad C_3: x^2 - 4y^2 = 4$$

$$C_4: 4x^2 - 9y^2 = 36 \quad C_5: x^2 - y^2 = 1$$

## Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση κύκλου	κέντρο κύκλου	ακτίνα κύκλου	σημεία τομής κύκλου με άξονα x'x	σημεία τομής κύκλου με άξονα y'y
$x^2 + (y - 4)^2 = 1$				
$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$				
$x^2 + y^2 = 9$				
$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$				

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση κωνικής	γραφή της κωνικής σε μια απ' τις μορφές:	χαρακτηρισμός κωνικής (κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή)
	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2, \quad y^2 = 2px$ $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$	
$4x^2 = 36 + 9y^2$		
$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0$		
$9x^2 = 1 - 25y^2$		
$y^2 - 12x = 0$		

3. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση παραβολής	συντεταγμένες εστίας	εξίσωση διευθετούσας	άξονας συμμετρίας
$y^2 = 6x$			
$y^2 = -6x$			

4. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση έλλειψης	συντεταγμένες εστιών	συντεταγμένες κορυφών	εκκεντρότητα
$4x^2 + 9y^2 = 36$			
$x^2 + 4y^2 = 16$			

5. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση υπερβολής	συντεταγμένες εστιών	εκκεντρότητα	εξισώσεις ασυμπτώτων
$x^2 - 9y^2 = 9$			
$x^2 - y^2 - 4 = 0$			

## Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. \*\* Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
  - α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $2\sqrt{2}$
  - β) έχει κέντρο το σημείο  $(3, -1)$  και ακτίνα 5
  - γ) έχει κέντρο το σημείο  $(-2, 1)$  και διέρχεται από το σημείο  $(-2, 3)$
  - δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με A  $(1, 3)$  και B  $(-3, 5)$
  - ε) διέρχεται από τα σημεία  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$  και  $(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2})$
 στ) διέρχεται από τα σημεία  $(3, 1)$ ,  $(-1, 3)$  και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία  $y = 3x - 2$ 
  - ζ) έχει κέντρο το σημείο  $(8, -6)$  και διέρχεται από την αρχή των αξόνων
  - η) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας  $3x + y = 10$
  - θ) έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα  $x'x$  και διέρχεται από το σημείο  $(5, 4)$
  - ι) έχει κέντρο το σημείο  $(-3, 2)$ , εφάπτεται στον άξονα  $y'y$  και διέρχεται από το σημείο  $(-6, 2)$
  - ια) έχει κέντρο το σημείο  $(3, 3)$  και εφάπτεται των αξόνων  $x'x$  και  $y'y$
  - ιβ) έχει κέντρο το σημείο  $(-3, 1)$  και εφάπτεται στην ευθεία  $4x - 3y + 5 = 0$
2. \*\* Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο  $(1, 0)$  και εφάπτεται στις ευθείες  $3x + y + 6 = 0$  και  $3x + y - 12 = 0$ .
3. \*\* Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία  $x + y - 6 = 0$  iά διiδo άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .
4. \*\* Δίνεται η ευθεία  $y = \lambda x$  και ο κύκλος  $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ . Να βρεθεί η τιμή του  $\lambda$  ώστε η ευθεία:
  - α) να τέμνει τον κύκλο
  - β) να εφάπτεται του κύκλου
  - γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.
5. \*\* Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κέντρο του κύκλου  $x^2 - 2x + y^2 - 6x = 0$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $x + 2y - 7 = 0$ .
6. \*\* Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου  $x^2 + y^2 = 4$  που είναι παράλληλες στην ευθεία  $x + y = 0$ .
7. \*\* Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου  $x^2 + y^2 = 9$  που γράφονται από το σημείο  $(0, 6)$ .
8. \*\* Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία  $y = x$  και είναι ομόκεντρος του κύκλου  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ .
9. \*\* Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$  και η ευθεία  $y = x - 3$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.

10. \*\* Δίνονται τα σημεία  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 4)$  και  $\Gamma(3, 1)$ .  
 α) Να αποδειχθεί ότι:  $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ B\Lambda\Gamma = 90^\circ$   
 β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ .
11. \*\* Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A(3\alpha, 0)$ ,  $B(0, 3\alpha)$  και  $\Gamma(0, -3\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ .
12. \*\* Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων  $M(x, y)$  του επιπέδου που ικανοποιούν τις εξισώσεις  $x\sigma\upsilon\nu\theta - y\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu 2\theta$  και  $x\eta\mu\theta + y\sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu 2\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , βρίσκονται σε κύκλο.
13. \*\* Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία  $(\epsilon): 2x + y + 1 = 0$  και διέρχεται από τα σημεία  $A(-1, 2)$  και  $B(3, -1)$ .
14. \*\* Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι  $C_1: (x - 2)^2 + y^2 = 4$  και  $C_2: x^2 - 2x + y^2 = 0$  εφάπτονται εσωτερικά.
15. \*\* Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ομόκεντροι οι κύκλοι  $C_1: x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$  και  $C_2: x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ .
16. \*\* Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M(x, y)$  του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα  $A, B, \Gamma$  με  $A(1, -1)$ ,  $B(-1, 2)$ ,  $\Gamma(0, 2)$  είναι σταθερό, είναι κύκλος με κέντρο το βαρύκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
17. \*\* Να δειχθεί ότι η εξίσωση  $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$  παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.
18. \*\* Θεωρούμε τον κύκλο  $C: x^2 + y^2 + 4y = 0$  και το σημείο  $A(-1, -1)$ . Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσο το σημείο  $A$ .
19. \*\* Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το  $(0, 0)$  στις παρακάτω περιπτώσεις:  
 α) είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα  $Ox$  και έχει παράμετρο  $p = 5$   
 β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $Ox$  και διέρχεται από το σημείο  $(-1, 4)$   
 γ) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $Oy$  και διέρχεται από το σημείο  $(2, 2)$   
 δ) έχει άξονα συμμετρίας τον  $Oy$  και εστία  $E(0, -4)$   
 ε) έχει εστία  $E(-2, 0)$  και διευθετούσα  $\delta: x - 2 = 0$   
 στ) έχει άξονα συμμετρίας τον  $Ox$  και εφάπτεται της ευθείας  $y = 4x + 1$
20. \*\* Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας  $x + y + 1 = 0$  ως προς την παραβολή  $y^2 = 2x$ .
21. \*\* Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής  $y^2 = 3x$  στα σημεία  $(0, 0)$  και  $(12, 6)$ .

22. \*\* Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $y^2 = 3x$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $2x - y + 1999 = 0$ .
23. \*\* Από το σημείο  $(-2, 3)$  προς την παραβολή  $y^2 = 8x$  γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες.  
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών ευθειών.  
β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.
24. \*\* Έστω η παραβολή  $y^2 = 4px$ ,  $p > 0$ . Μια χορδή της AB είναι κάθετη στον άξονα και έχει μήκος  $8p$ .  
Να αποδειχθεί ότι  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ .
25. \*\* Ισόπλευρο τρίγωνο OAB είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή  $y^2 = 4px$  με κορυφή το O. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
26. \*\* Έστω η παραβολή C:  $y^2 = 2px$  και μια χορδή της AB παράλληλη με τον άξονα  $y'y$ , η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:  
α)  $(AB) = 2(EK)$ , όπου K το σημείο που τέμνει ο άξονας  $x'x$  τη διευθετούσα  
β) οι εφαπτόμενες στα A και B διέρχονται από το K
27. \*\* Δίνεται η παραβολή C:  $y^2 = 2px$  και δύο χορδές OB, OΓ, ώστε γωνία  $BOΓ = 90^\circ$ . Να αποδειχθεί ότι η BΓ διέρχεται από σταθερό σημείο.
28. \*\* Δίνεται η παραβολή  $2y^2 = x$ .  
α) Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.  
β) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της A  $(2, 1)$  από την εστία E και να συγκριθεί με την απόσταση (OE).  
γ) Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της O.  
δ) Να βρεθεί σημείο στην παραβολή  $y^2 = 2px$  που να απέχει από την εστία E απόσταση διπλάσια της OE.
29. \*\* Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$  και η ευθεία (ε):  $y = x - 1$ .  
α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.  
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία A, B της (ε) και της παραβολής.  
γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A, B είναι κάθετες.  
δ) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που περνά από την εστία και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα (γ).
30. \*\* Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 2px$ . Θέτουμε  $x' = ax$  και  $y' = ay$ ,  $a \neq 0$ . Να αποδειχθεί ότι το σημείο  $(x', y')$  κινείται πάλι σε παραβολή.
31. \*\* Δίνονται τα σημεία του επιπέδου  $(x, y) = (2pk^2, 2pk)$  με  $k \in \mathbb{R}$ .  
α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια παραβολή



β) Αν  $A(2p\kappa_1^2, 2p\kappa_1)$ ,  $B(2p\kappa_2^2, 2p\kappa_2)$  είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η  $AB$  διέρχεται από την εστία, είναι  $4\kappa_1\kappa_2 = -1$ .

32. \*\* Αν  $(\epsilon)$  είναι η εφαπτομένη της έλλειψης  $C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$  στο  $M_1(x_1, y_1)$ , να αποδείξετε ότι η κάθετη στην  $(\epsilon)$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{x_1}{y_1}$ .

33. \*\* Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 2$  και η παραβολή  $y^2 = 8x$ .

α) Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

34. \*\* Δίνεται σταθερό σημείο  $A$  και ευθεία  $(\epsilon)$  που δεν διέρχεται από το  $A$ . Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το  $A$  και εφάπτονται στην  $(\epsilon)$ , είναι παραβολή.

35. \*\* Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει μεγάλο και μικρό άξονα με μήκος 6 και 4 μονάδες αντιστοίχως και έχει εστίες πάνω στον άξονα  $x'x$  συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

36. \*\* Να βρεθεί η εκκεντρότητα και οι εστίες καθεμιάς από τις παρακάτω ελλείψεις:

α)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

β)  $4x^2 + 9y^2 = 36$

γ)  $9x^2 + 25y^2 = 225$

37. \*\* Να εξετάσετε αν υπάρχει έλλειψη στην οποία ένα σημείο της  $M$  να σχηματίζει με τις εστίες  $E'$  και  $E$  ισόπλευρο τρίγωνο.

38. \*\* Ο κύκλος με κέντρο το  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $\beta$  διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  με  $\alpha > \beta$ . Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

39. \*\* Δίνεται η έλλειψη  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ . Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{\kappa^2 x^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2 y^2}{\beta^2} = 1$  έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη  $C$ .

40. \*\* Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων  $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  και

$$C_2: \frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} = 1, \text{ με } \alpha > \beta.$$

41. \*\* Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της έλλειψης με εκκεντρότητα  $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

42. \*\* Θεωρούμε την υπερβολή  $C: x^2 - y^2 = 1$  και την ευθεία  $(\varepsilon): x + 2y = \alpha$ .  
Να βρεθούν οι τιμές του  $\alpha$ , για τις οποίες η  $(\varepsilon)$  εφάπτεται στη  $C$ .

43. \*\* Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 4$  και η έλλειψη  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ .

α) Να δείξετε ότι το σημείο  $(1, -\sqrt{3})$  είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά σημεία.

β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

γ) Να βρεθούν τα σημεία  $M(x_0, y_0)$  ώστε  $x_0^2 + y_0^2 = 4$  και  $(E'M) + (EM) = 2\sqrt{6}$  ( $E', E$  οι εστίες της έλλειψης).

44. \*\* Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης  $9x^2 + 16y^2 = 144$  που είναι:

α) παράλληλες προς την ευθεία  $(\varepsilon): x + y = 0$

β) κάθετες στην ευθεία  $(\varepsilon)$ .

45. \*\* Δίνεται η έλλειψη  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο  $E'BEB'$  είναι ρόμβος ( $E', E$  οι εστίες,  $B, B'$  τα άκρα του μικρού άξονα)

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

46. \*\* Ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 16$  διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής  $C$  του διπλανού σχήματος, της οποίας η μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση  $y = -\frac{4}{3}x$ . Να βρεθούν:

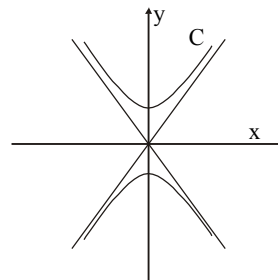
α) οι εστίες της υπερβολής

β) η εστιακή της απόσταση

γ) η εξίσωσή της

δ) να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής

ε) η εκκεντρότητά της.



47. \*\* Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα  $x'x$  συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:

α) έχει εστιακή απόσταση  $(E'E) = 6$  και εκκεντρότητα  $\epsilon = \frac{3}{2}$

β) έχει εστιακή απόσταση  $(E'E) = 20$  και εξισώσεις ασυμπτώτων  $y = \frac{4}{3}x$  και  $y = -\frac{4}{3}x$ .

γ) έχει εστιακή απόσταση  $(E'E) = 4$  και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

48. \*\* Έστω η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Ναδειχθεί ότι κάθε παράλληλη προς μια ασύμπτωτη τέμνει την υπερβολή σ' ένα μόνο σημείο.

49. \*\* Έστω  $M$  τυχαίο σημείο της υπερβολής  $y^2 - x^2 = a^2$ ,  $(\epsilon)$  η εφαπτομένη στο  $M$  και  $A, B$  τα σημεία που η  $(\epsilon)$  τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$  είναι σταθερό.

50. \*\* Έστω κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 = a^2$ . Αν θέσουμε  $x = x'$  και  $y = cy'$ , να αποδείξετε ότι το σημείο  $(x', y')$  ανήκει σε έλλειψη.

51. \*\* Δίνεται η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  και  $M(x_1, y_1)$  ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές

της. Αν η κάθετη  $(\epsilon')$  της  $(\epsilon)$  στο  $M$  τέμνει τους άξονες  $x'x, y'y$  στα  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα ( $\epsilon$  η εφαπτόμενη στο  $M$ )

α) να βρεθεί συναρτήσει των  $x_1, y_1$  η εξίσωση της  $(\epsilon')$

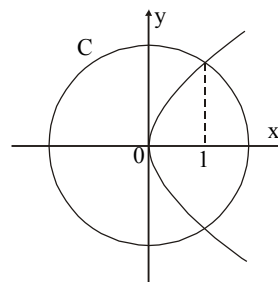
β) να βρεθούν οι συντεταγμένες των  $\Gamma$  και  $\Delta$

γ) να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου  $N$  του  $\Gamma\Delta$

δ) να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του  $N$  είναι μια υπερβολή  $C_1$

ε) να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές  $C$  και  $C_1$  έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες, αλλά τις εστίες σε διαφορετικούς άξονες.

52. \*\* Ο κύκλος του διπλανού σχήματος διέρχεται από την εστία της παραβολής. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής.

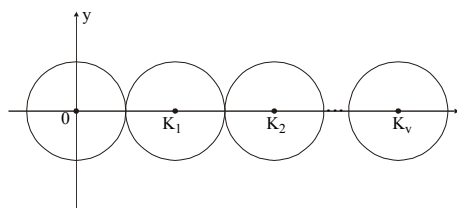


53. \*\* Στο διπλανό σχήμα ο πρώτος κύκλος  $C_0$  έχει εξίσωση  $x^2 + y^2 = \rho^2$  και όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι. Να βρεθούν:

α) οι εξισώσεις των κύκλων

$C_1, C_2, \dots, C_n$  (συναρτήσει του  $\rho$ )

β) το άθροισμα των αποστάσεων των κέντρων  $K_1, K_2, \dots, K_n$  από το κέντρο  $O$



γ) οι κοινές εφαπτόμενες όλων των κύκλων.

54. \*\* Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής

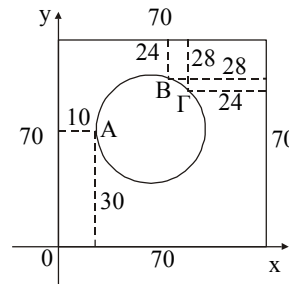
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ και την ευθεία } y = 2.$$

55. \*\* Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής  $25x^2 - 4y^2 = 100$  που είναι παράλληλες προς την ευθεία  $3x - y = 0$ .

56. \*\* Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη  $\frac{x^2}{25} +$

$$\frac{y^2}{16} = 1.$$

57. \*\* Σε μια τετράγωνη πλατεία πλευράς 70 m, υπάρχει μια μικρή τεχνητή λίμνη κυκλικού σχήματος. Προκειμένου να βρεθεί η ακτίνα της λίμνης, τρεις μαθητές επέλεξαν τρία τυχαία σημεία της περιφέρειάς της Α, Β, Γ και μέτρησαν τις αποστάσεις τους από τις πλευρές της πλατείας, όπως δείχνει το σχήμα.



α) Στο σύστημα αξόνων  $Oxy$  να τοποθετήσετε τα σημεία Α, Β, Γ. Να θεωρήσετε ότι η απόσταση 1 στους άξονες αντιστοιχεί σε 10 m.

β) Να υποθέσετε ότι η λίμνη έχει αντίστοιχο σχήμα στους άξονες τον κύκλο  $x^2 + y^2 + kx + ly + \mu = 0$  πάνω στον οποίο βρίσκονται τα Α, Β, Γ. Να υπολογίσετε τα  $k, \lambda, \mu$ .

γ) Να βρείτε την ακτίνα της λίμνης.

58. Δίνονται οι κύκλοι  $C_1: x^2 + y^2 = 1$  και  $C_2: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ .

α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.

γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων (Α, Β), όπου το Α ανήκει στον  $C_1$  και το Β στον  $C_2$ , να βρεθεί αυτό για το οποίο τα Α, Β απέχουν τη μικρότερη απόσταση.

δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (το Γ στον  $C_1$ , το Δ στον  $C_2$ ) με τη μεγαλύτερη απόσταση.

59. Δίνονται τα σημεία Α (- 2, 0), Β (2, 0) και  $M_1 (1, \sqrt{3})$ .

α) Να δείξετε ότι  $M_1A \perp M_1B$ .

β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία Α, Β,  $M_1$ .

γ) Να δείξετε ότι το σημείο  $M_2 (- 1, \sqrt{3})$  ανήκει στον κύκλο και  $M_2A \perp M_2B$ .

δ) Να δείξετε ότι κάθε σημείο  $M(x_0, y_0)$  για το οποίο ισχύει  $MA \perp MB$ , ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος (β).

60. Δίνεται η υπερβολή  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  με κλάδους  $C_1$  και  $C_2$  και τυχαίο σημείο της  $M(x_1, y_1)$  στον

κλάδο  $C_1$  ( $y_1 \neq 0$ ).

α) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτόμενης ( $\epsilon$ ) στο σημείο  $M$  και να βρείτε τα σημεία τομής της ( $\epsilon$ ) με τους άξονες.

β) Να δείξετε ότι η ( $\epsilon$ ) τέμνει τον  $x'x$  σε σημείο μεταξύ των κορυφών της υπερβολής.

γ) Με δεδομένο ότι η ( $\epsilon$ ) τέμνει τον κλάδο  $C_2$  στο  $M'(x_2, y_2)$ , να δείξετε ότι  $y_1 \cdot y_2 < 0$ .