

**ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**  
**ΣΤΑ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**  
**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</u>		No 2
Τάξη	: Β΄ Λυκείου	
Μάθημα	: Γεωμετρία	
Κεφάλαιο	: 1 <sup>ο</sup>	
Διδακτική ενότητα	: 2 <sup>η</sup>	
Ημερομηνία	: 15-01-2019	
Διδάσκων καθηγητής	: Ηλίας Ράιδος	

## « Άλλοι τύποι για το εμβαδό τριγώνου - Σύγκριση εμβαδών »

# ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

## 1. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

### Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

01. Να γραφούν οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού τριγώνου.
02. Να υπολογισθεί το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου  $a$ .
03. Αν  $E$  το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$  δίνεται από τους τύπους  $E=(\tau-\alpha)\rho_\alpha$ ,  $E=(\tau-\beta)\rho_\beta$ ,  $E=(\tau-\gamma)\rho_\gamma$ .
04. Να αποδειχθεί το θεώρημα : «Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μία γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.»

**Σχόλιο :** Να γνωρίζουμε το θεώρημα : «Ο λόγος των εμβαδών δυο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους»

## 2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

1. Άσκηση 1, σχολικού σελ.43.
2. Άσκηση 2, σχολικού σελ.43.
3. Άσκηση 3, σχολικού σελ.43.
4. Άσκηση 4, σχολικού σελ.43
5. Άσκηση 5, σχολικού σελ.43
6. Άσκηση 6, σχολικού σελ.43
7. Άσκηση 7, σχολικού σελ.43
8. Εφαρμογή 1, σελ 38.
9. Εφαρμογή 2, σελ 38.
10. Εφαρμογή 1, σελ 41.
11. Εφαρμογή 2, σελ 41.

# ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

## 1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Αν  $AB\Gamma$  ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς  $a$  και  $\Delta EZ$  τρίγωνο με  $\hat{E}=120^\circ$ . Τότε ισχύει  $\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E \cdot EZ}{a^2}$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Αν τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda$ , τότε  $\frac{(AB\Gamma)}{AB^2} = \frac{(\Delta EZ)}{\Delta E^2} = \lambda^2$ , όπου  $AB$  και  $\Delta E$  οι ομόλογες πλευρές του.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 4. * Δύο τρίγωνα όμοια και ισεμβαδικά είναι ίσα.*  | Σ | Λ |
| 5. * Δύο τετράγωνα τα οποία έχουν ίσα εμβαδά είναι ίσα.*   | Σ | Λ |
| 6. * Ο λόγος των εμβαδών δύο ισοπλεύρων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου των υψών τους.*  | Σ | Λ |
| 7. * Αν οι γωνίες $A$ και $\Delta$ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Delta EZ$ είναι συμπληρωματικές, τότε $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{AB \cdot \Delta Z}{\Delta E \cdot \Delta Z}$ .* | Σ | Λ |
| 8. * Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ , αν $M$ είναι το μέσο της διαγωνίου $B\Delta$ , τότε τα σχήματα $AM\Gamma\Delta$ και $AM\Gamma B$ είναι ισοδύναμα.*                                      | Σ | Λ |
| 9. * Αν οι πλευρές τετραγώνου αυξηθούν κατά 4 cm η καθεμία, τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά $16 \text{ cm}^2$ .*  | Σ | Λ |
| 9. * Αν η πλευρά τετραγώνου τριπλασιαστεί, τότε το εμβαδόν του 9-πλασιάζεται.*   | Σ | Λ |
| 10. * Τετράγωνο πλευράς $a$ είναι ισοδύναμο με   |   |   |

ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ίσης με τη διαγώνιο του τετραγώνου.\*

Σ      Δ

### ΕΡΩΤΗΣΗ 11η

Αν οι γωνίες Α και Δ των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι συμπληρωματικές,

$$\text{τότε } \frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΔΕ \cdot ΔΖ} .$$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 12η

Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 2α  
είναι ισοδύναμο με τετράγωνο  
πλευράς α.

## 2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ-ΔΙΑΤΑΞΗ-ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΤΥΠΩΝ

1. \* Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι  $30^\circ$ . Το εμβαδόν του συναρτήσει των πλευρών του  $\alpha, \gamma$  είναι .....

2. \* Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει  $(ΑΒΓ) = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$  όπου  $\tau = \dots$

## 3.ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

1. \* Το ύψος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα όταν

Α. γωνία  $A = 90^\circ$

Β. γωνία  $A = B$

Γ. γωνία  $A = 60^\circ = B$

Δ.  $B\Gamma = A\Gamma$

Ε.  $B\Gamma = AB$ \*

23. \* Αν ΑΒΓΔ τραπέζιο και Σ το σημείο τομής των διαγωνίων του, τότε ισχύει

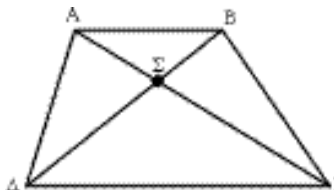
Α.  $(\Sigma A\Delta) = (\Sigma B\Gamma)$

Β.  $(\Sigma AB) = (\Sigma \Delta\Gamma)$

Γ.  $(\Sigma B\Gamma) = (\Sigma A\Delta) + (\Sigma \Delta\Gamma)$

Δ.  $(A\Delta\Gamma) = (A\Delta\Gamma)$

Ε.  $(\Sigma A\Delta) = 2(\Sigma B\Gamma)$ \*



## 4. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

**Πότε.....**

**με όταν.....**

**Ερώτηση α)**

..... ισχύει η σχέση

$(\tau-\alpha)r_\alpha = (\tau-\beta)r_\beta$ , όπου  $r_\alpha, r_\beta$

οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων

κύκλων και  $\tau$  η ημιπερίμετρος

του τριγώνου ΑΒΓ ;

**Ερώτηση β)**

..... το εμβαδόν τριγώνου ισούται

$$\text{με } \frac{a^2 \sqrt{3}}{4};$$

### Ερώτηση γ)

.....ο λόγος των εμβαδών δύο τριγώνων ισούται με τον λόγο δύο πλευρών τους;

### Ερώτηση δ)

..... ο λόγος των εμβαδών δύο τριγώνων ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες Α και Α΄;

### Ερώτηση ε)

.....δύο τρίγωνα που έχουν κοινή βάση είναι ισεμβαδικά;

## 5. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

### Διατυπώσεις των θεμάτων.

#### A. Βασικές ασκήσεις σχολικού βιβλίου

1. Άσκηση 8, σχολικού σελ.43.
2. Άσκηση 9, σχολικού σελ.43.
3. Άσκηση 10, σχολικού σελ.43.
4. Άσκηση 11, σχολικού σελ.43.
5. Άσκηση 12, σχολικού σελ.43.
6. Άσκηση 13, σχολικού σελ.43.
7. Άσκηση 14, σχολικού σελ.43.
8. Άσκηση 15, σχολικού σελ.43.

#### B. Βασικές συμπληρωματικές ασκήσεις

1. Ένας ρόμβος έχει περίμετρο 48 και άθροισμα 26. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του.
2. Οι πλευρές παραλληλογράμμου έχουν μήκη 25,53 και η μία διαγώνιος 63. Να υπολογίσετε το εμβαδό του.

3. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ ) να αποδείξετε ότι  $E=\tau(\tau-\alpha)$ .
4. Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η ισότητα  $\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\alpha\rho_\gamma=\tau^2$ .
5. Θεωρούμε μια γωνία  $\chi\hat{O}y$  και σημείο  $A$  στο εσωτερικό της. Από τα  $A$  φέρουμε μια οποιαδήποτε ευθεία που τέμνει τις  $Ox$  και  $Oy$  στα  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα  $\frac{1}{(OAB)} + \frac{1}{(OAG)}$  είναι σταθερό.

## 6. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

### ΑΠΟ ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

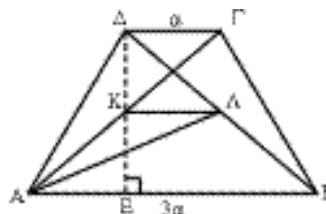
1. \*\* Τραπεζίο  $AB\Gamma\Delta$  έχει βάσεις  $a$  και  $3a$  και ύψος  $2a$

και  $K, \Lambda$  είναι τα μέσα των διαγωνίων του.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $AK\Lambda$ .

β) Να δείξετε ότι:

$$(AK\Lambda) = (BK\Lambda) = (GK\Lambda) = (\Delta K\Lambda). **$$

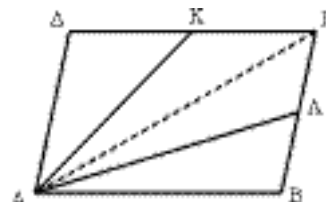


2. \*\* Αν η πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 4 m, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά  $136 \text{ m}^2$ . Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου αυτού. \*\*

3. \*\* Η περίμετρος ενός ρόμβου  $AB\Gamma\Delta$  είναι 48 cm και η απόσταση των δύο απέναντι πλευρών του είναι 5 cm. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ρόμβου. \*\*

4. \*\* Ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει γωνία  $\Gamma = 60^\circ$ ,  $\beta = 12 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 3 \text{ cm}$  και είναι ισοδύναμο με ισόπλευρο τρίγωνο. Να υπολογιστεί η πλευρά του ισοπλεύρου αυτού τριγώνου. \*\*

5. \*\* Σ' ένα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  συνδέουμε την κορυφή  $A$  με τα μέσα  $K, \Lambda$  των πλευρών  $\Gamma\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι  $(AK\Gamma\Lambda) = \frac{1}{4} \cdot (AB\Gamma\Delta)$ . \*\*

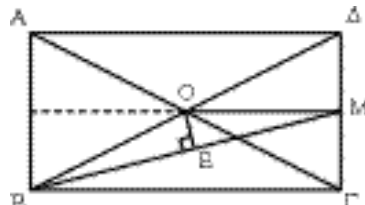


6. \*\* Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με διαστάσεις  $B\Gamma = a$  και  $AB = \beta$ . Φέρνουμε την  $OM$ , όπου  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του και  $M$  το μέσο της πλευράς  $\Delta\Gamma$ .

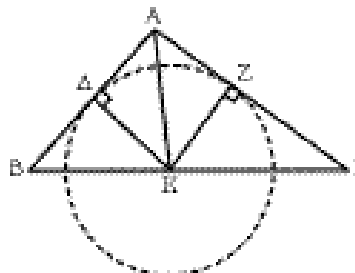
α) Να υπολογιστούν οι πλευρές του τριγώνου  $OMB$  συναρτήσει των  $\alpha, \beta$ .

β) Δείξτε ότι τα τρίγωνα  $OMB$  και  $OM\Gamma$  είναι ισοδύναμα.

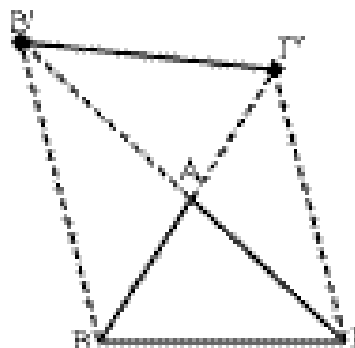
γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του  $OMB$  συναρτήσει των  $\alpha, \beta$ . \*\*



- 7 \*\* Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$  και κύκλος  $(K, R)$  που έχει το κέντρο του στην πλευρά  $B\Gamma$  και εφάπτεται στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$ . Να δείξετε ότι:  $R(\beta + \gamma) = 2E$ .\*\*



- 8 \*\* Από την κορυφή  $B$  τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρνουμε μια οποιαδήποτε ευθεία που να συναντά την προέκταση της  $\Gamma A$  προς το μέρος του  $A$  σε ένα σημείο  $B'$ , καθώς και την  $\Gamma\Gamma' // BB'$ , που συναντά την προέκταση της  $BA$  στο  $\Gamma'$ . Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $AB'\Gamma'$  είναι ισεμβαδικά.\*\*



9. \*\* Αν το άθροισμα των διαγωνίων ενός ρόμβου είναι 14 cm και η περιμέτρος του είναι 20 cm, να βρεθούν:

- α) το εμβαδόν του και  
β) το ύψος του ρόμβου από την κορυφή  $A$ .\*\*

10. \*\* Ένα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  έχει μια γωνία του 5-πλάσια μιας άλλης και την περιμέτρο του 12-πλάσια μιας πλευράς. Αν το εμβαδόν του είναι  $40 \text{ cm}^2$ , να υπολογισθούν:

- α) οι πλευρές του και  
β) τα ύψη του.\*\*

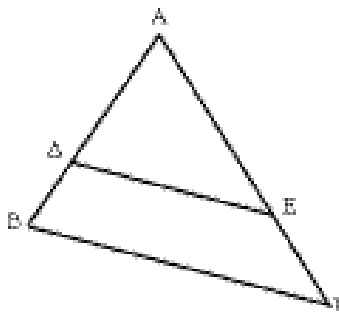
11. \*\* Προεκτείνουμε τις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma A$  τριγώνου  $AB\Gamma$  αντιστοίχως κατά τμήματα  $B\Delta = BA, \Gamma E = \Gamma B$  και  $AZ = A\Gamma$ .

Να δείξετε ότι:

- α)  $(Z\Gamma E) = 2 (AB\Gamma)$  και  
β)  $(\Delta EZ) = 7 (AB\Gamma)$ .\*\*



12. \*\* Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$  που τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:  $(ABE)^2 = (AB\Gamma) \cdot (A\Delta E)$ .\*\*



13. \*\* Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  ορθογώνιο στο  $A$ . Κατασκευάζουμε επί των τριών πλευρών και εκτός του τριγώνου τετράγωνα  $B\Gamma\Delta E$ ,  $\Gamma A\Theta I$ ,  $AB\Kappa\Lambda$ . Να υπολογισθούν:

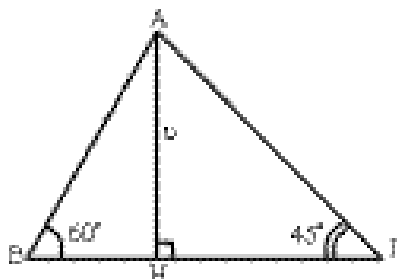
- α) τα εμβαδά  $(KBE)$ ,  $(\Delta\Gamma I)$ ,  $(\Lambda A\Theta)$  και  
 β) το εμβαδόν του εξαγώνου  $\Delta E\Kappa\Lambda\Theta I$ , αν γνωρίζουμε τις πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου  $AB = \gamma$ ,  $A\Gamma = \beta$ ,  $B\Gamma = \alpha$ .\*\*

14. \*\* Ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει  $AB = \gamma$ ,  $A\Gamma = \beta$  και γωνία  $A = 30^\circ$ . Επί των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  και έξω από το τρίγωνο κατασκευάζουμε τετράγωνα  $AB\Delta E$ ,  $A\Gamma ZH$  και φέρνουμε την  $EH$ .

- α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta H$  και  $AB\Gamma$  είναι ισοδύναμα.  
 β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του  $B\Gamma ZH E\Delta B$ .\*\*

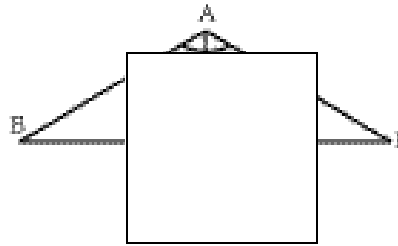
15. \*\* Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με ύψος  $AH = \upsilon$ , γωνία  $B = 60^\circ$  και γωνία  $\Gamma = 45^\circ$ . Να υπολογίσετε συναρτήσει του  $\upsilon$ :

- α) τις πλευρές του τριγώνου  
 β) το εμβαδόν του και  
 γ) τα ύψη προς τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$ .\*\*

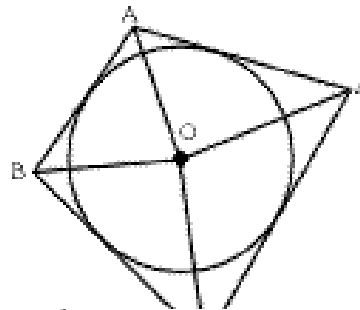


16. \*\* Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με  $AB = 6 \text{ cm}$  και γωνία  $BA\Gamma = 120^\circ$ .

- α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .  
β) Αν  $E$  σημείο της  $A\Gamma$ , τέτοιο ώστε  $AE =$

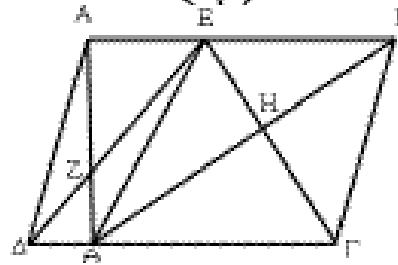


17. \*\* Ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι περιγεγραμμένο περί τον κύκλο  $O$ . Να δείξετε ότι αληθεύει η σχέση  $(OAB) + (O\Gamma\Delta) = (O\Delta\Delta) + (OB\Gamma)$ .\*\*



18. \*\* Σε ένα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  παίρνουμε δύο τυχόντα σημεία  $E$  και  $\Theta$  επί των πλευρών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα. Οι ευθείες  $\Delta E$  και  $A\Theta$  τέμνονται στο  $Z$  και οι ευθείες  $\Gamma E$  και  $B\Theta$  τέμνονται στο  $H$ . Να δείξετε ότι:

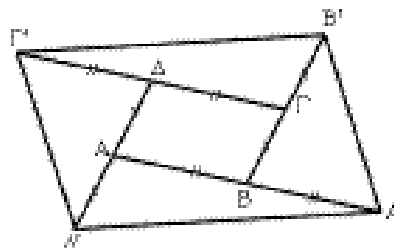
- α)  $(EZ\Theta) = (AZ\Delta)$   
β) το εμβαδόν του τετράπλευρου  $EH\Theta Z$  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων  $B\Gamma H$  και  $A\Delta Z$ .\*\*



19. \*\* Έστω τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$ ,  $υ$  το ύψος από το  $A$  και  $H\Theta$  η διάμεσός του. Φέρνουμε ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το μέσο  $M$  της  $H\Theta$  και τέμνει τις  $AB$ ,  $\Delta\Gamma$  στα σημεία  $Z$ ,  $E$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

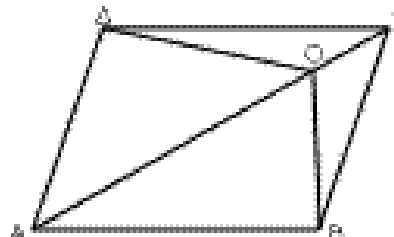
- α)  $(AZE\Delta) = HM \cdot υ$  και  
β)  $(AZE\Delta) = (ZB\Gamma E)$ \*\*

- 20** \*\* Ενός παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$  προεκτείνουμε τις πλευρές του και στις προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα  $ΑΔ' = ΑΔ$ ,  $ΒΑ' = ΒΑ$ ,  $ΓΒ' = ΓΒ$ ,  $ΔΓ' = ΔΓ$ .



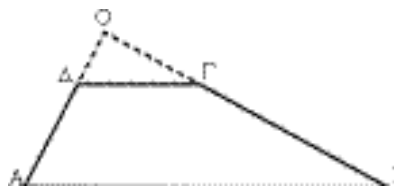
- α) Να δείξετε ότι το  $Α'Β'Γ'Δ'$  είναι παραλληλόγραμμο  
β) Να εκφραστεί το εμβαδόν του  $Α'Β'Γ'Δ'$ , αν γνωρίζουμε το εμβαδόν  $Ε$  του  $ΑΒΓΔ$ .\*\*

- 21.** \*\* Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  και έστω  $Ο$  σημείο της διαγωνίου του  $ΑΓ$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $ΟΑΒ$  και  $ΟΑΔ$  είναι ισοδύναμα.\*\*



- 22.** \*\* Να υπολογιστούν οι πλευρές ενός ισοσκελούς τραπεζίου, αν γνωρίζουμε ότι η περιμέτρος του είναι 60 m, το εμβαδόν του  $160 \text{ m}^2$  και το ύψος του 8 m.\*\*

- 23.** \*\* Δίνεται ένα τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$ , που έχει βάσεις  $ΑΒ = 70 \text{ cm}$ ,  $ΓΔ = 20 \text{ cm}$  και μη παράλληλες πλευρές  $ΒΓ = 40 \text{ cm}$  και  $ΑΔ = 30 \text{ cm}$ .



- α) Να αποδειχθεί ότι οι  $ΒΓ$  και  $ΑΔ$  είναι κάθετοι.  
β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τραπεζίου  $ΑΒΓΔ$ .\*\*

- 24.** \*\* Τα τρίγωνα που έχουν κορυφή ένα τυχόν σημείο της περιμέτρου ενός παραλληλογράμμου και βάσεις τις διαγωνίες του, έχουν σταθερό άθροισμα εμβαδών.\*\*

- 25.\*\*** Να διαιρεθεί τετράγωνο πλευράς  $a = 6 \text{ cm}$  σε τρία ισοδύναμα μέρη με ευθείες που διέρχονται από μια κορυφή του.\*\*