ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 4^{Ο}

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Το

12ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Copyright: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Ορισμός

Αν δύο μεγέθη χ και y συνδέονται με τη σχέση y=f(x) και f είναι συνάρτηση παρ/μη στο $χ_0$, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς χ στο $χ_0$** την παράγωγο $f'(χ_0)$.

Παρατηρήσεις

1)Όταν ζητούμε τον ρυθμό μεταβολής μιας μεταβλητής y ως προς την t, η t είναι η μεταβλητή παρ/σης έστω και αν αυτή είναι συνάρτηση.

2) Όταν μας δίνουν ένα μέγεθος y:
α) <u>αν αυξάνεται σταθερά κατά κ μονάδες /sec</u>, τότε ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς t σε κάθε t_0 είναι :dy/dt= κ
β) <u>αν μειώνεται σταθερά κ μονάδες /sec</u>,είναι ομοίως: dy/dt= -κ.

3) Αν ο ρυθμός μεταβολής είναι **θετικός** σημαίνει **<<τάση>> για αύξηση**, ενώ αν είναι **αρνητικός** σημαίνει **<<τάση>> για ελάττωση.**

4) Οι <u>μονάδες του ρυθμού μεταβολής</u> είναι το πηλίκο των μονάδων μέτρησης του μεγέθους y προς τις μονάδες του μεγέθους χ.

Παραδείγματα

— Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιμή *t*. Η συνάρτηση *S* καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή *t* και ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.

Ο ρυθμός μεταβολής της S ως προς το χρόνο *t* τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $S'(t_0)$, της S ως προς το χρόνο *t* τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $S'(t_0)$ λέγεται **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\upsilon(t_0)$. Είναι δηλαδή

$$\upsilon(t_0) = S'(t_0).$$

—Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας *υ* ως προς το χρόνο *t* τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$, της ταχύτητας *υ* ως προς το χρόνο *t* τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή

$$\alpha(t_0) = \upsilon'(t_0) = S''(t_0).$$

—Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής *K*, η είσπραξη *E* και το κέρδος *P* εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας *x* του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους *K* ως προς την ποσότητα *x*, όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος στο x_0.**

Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο x_0** και **οριακό κέρδος στο x_0.**

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πρόβλημα

Ο όγκος V ενός μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνει με ρυθμό $100cm^3/sec$.Με ποιο ρυθμό αυξάνει η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή που αυτή είναι ίση με 9cm;

1) Προσδιορίζουμε και συμβολίζουμε όλα τα μεταβλητά μεγέθη συναρτήσει της ανεξάρτητης μεταβλητής χ και συμβολίζουμε χ_0 το κρίσιμο σημείο στο οποίο ζητούμε τον ρυθμό μεταβολής. τον οποίο και γράφουμε με μορφή παραγώγου.	Έστω V(t) ο όγκος του μπαλονιού την χρονική στιγμή t οπότε η ακτίνα του είναι r(t). Έστω t_0 η χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει οπότε $r(t_0)=9cm$ και ο όγκος του τότε θα είναι $V(t_0)$. Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $r'(t_0)$. Δίνονται: $V'(t)=100cm^3/sec$, $r(t_0)=9cm$.
2) Βρίσκουμε εξίσωση (1) που συνδέει τις παραπάνω μεταβλητές	$V(t)={}^4/_3\,\pi\, r^3(t)$ (1)
3) Παραγωγίζουμε τα μέλη της εξίσωσης (1) και βρίσκουμε εξίσωση (2) για $\chi=\chi_0$.	$V'(t)=4\pi\, r^2(t)\, r'(t)$ οπότε για $t=t_0$ έχω $V'(t_0)=4\pi\, r^2(t_0)\, r'(t_0)$ (2)
4) Υπολογίζουμε τις τιμές των μεταβλητών και βρίσκουμε το ζητούμενο ρυθμό μεταβολής αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2)	Αντικαθιστώντας στη (2) έχω $100cm^3/sec=4\pi\,(9cm)^2\, r'(t_0)$ $\Leftrightarrow 25cm^3/sec=81\pi\, cm^2\, r'(t_0)$ $\Leftrightarrow r'(t_0)=\frac{25}{81\pi}$ cm/sec

14 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

- Ρυθμός μεταβολής συγκεκριμένης συνάρτησης

Ο ρυθμός μεταβολής μίας συνάρτησης $\mathbf{y=f(t)}$, ως προς t, όταν $\mathbf{t=t_0}$, είναι η παράγωγος της f στο $\mathbf{t_0}$, δηλαδή το $\mathbf{f'(t_0)}$.

- Προβλήματα Οικονομίας

Στα προβλήματα οικονομίας, η βασική σχέση που ισχύει είναι: Κέρδος = Έσοδα – Κόστος.

Αν $\mathbf{K(x)}$ η συνάρτηση κόστους, τότε το μέσο κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος, είναι:

$$\mathbf{\cancel{K}(x)=\frac{K(x)-K(0)}{x}}$$

➢ Πρόβλημα κίνησης σε καμπύλη

Αν δίνεται σώμα που κινείται σε καμπύλη C, τότε:

- Καταγράφουμε όλα τα δεδομένα της εκφώνησης, εκφράζοντας τα x,y συναρτήσει του χρόνου t $(x(t),\ y(t))$. Αν κάποια από τις συντεταγμένες του σημείου ελαττώνεται με ρυθμό α, τότε $x'(t)$ ή $y'(t) = -\alpha$.
- Υπολογίζουμε τις τιμές των x,y τη χρονική στιγμή t_0 που μας ενδιαφέρει. Παραγωγίζουμε την εξίσωση της καμπύλης ως προς t και αντικαθιστούμε $t = t_0$.
- Κάνουμε αντικατάσταση στην τελευταία σχέση και συνήθως προκύπτει το ζητούμενο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Αν δίνεται σώμα που κινείται επί ευθείας και η συνάρτηση θέσης του κάθε χρονική στιγμή t είναι $S = x(t)$, τότε:

- Η στιγμιαία ταχύτητά του, τη χρονική στιγμή t_0, είναι $\upsilon(t_0) = x'(t_0)$.
- Η στιγμιαία του επιτάχυνση $\alpha(t)$, τη χρονική στιγμή t_0, είναι $\alpha(t_0) = \upsilon'(t_0)$.
- Το σώμα δεν κινείται όταν $\upsilon(t) = 0$.
- Το σώμα κινείται κατά τη θετική φορά, όταν $\upsilon(t) > 0$ και κατά την αρνητική φορά, όταν $\upsilon(t) < 0$.
- Το συνολικό διάστημα που διανύει το κινητό, είναι:
  $S = |x(t_{τελικό}) - x(t_2)| + |x(t_2) - x(t_1)| + |x(t_1) - x(0)|$, όπου t_1, t_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\upsilon(t) = 0$.Η μέση ταχύτητα $\bar{\upsilon}$ του σώματος σε όλη τη διάρκεια κίνησής του, είναι: $\bar{\upsilon} = \dfrac{S}{t_{τελικό}}$, όπου S το συνολικό διάστημα. Η ταχύτητα του σώματος αυξάνεται, όταν $\alpha(t) > 0$ και ελαττώνεται όταν $\alpha(t) < 0$.

16 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Αρχικά κάνουμε σχήμα και εκφράζουμε όλα τα μήκη συναρτήσει του t. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το διάγραμμα:

Ρυθμός Μεταβολής

ΣΧΟΛΙΑ:

Έστω y=f(x),μία συνάρτηση που ορίζεται σε ένα διάστημα Δ, και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x0 του Δ. Η παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο αυτό ονομάζεται ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΟΥ y ΩΣ ΠΡΟΣ x στο σημείο x0 του Δ και παριστάνεται με f ΄(x0) , ή dy/dx|x=xo , ή df(x)/dx|x=xo .

Διευκρινήσεις :

1. Στο dy/dx το x δηλώνει ανεξάρτητη μεταβλητή και στη γενική περίπτωση δηλώνει συνάρτηση. Συνάρτηση συμβολίζει και το dy/dx όπου x , y είναι οι μεταβλητές της συνάρτησης από την οποία προήλθε , ενώ το dy/dx|x=xo ή το df(x)/dx|x=xo, δηλώνει αριθμό (παράγωγος αριθμός ή "στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής").

2. Αν τα x , y δηλώνουν τη συνάρτηση θέσης και την ταχύτητα ενός υλικού σημείου Σ που κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης , τότε αν το Σ δεν αλλάζει την φορά της κίνησης το y μπορεί να είναι συνάρτηση ως προς x και το dy/dx , έχει νόημα.

Αν όμως το Σ αλλάζει φορά τότε το y δεν μπορεί να είναι συνάρτηση ως προς x και το dy/dx , δεν έχει πάντοτε νόημα.

Μπορούμε να ξεπεράσουμε το πρόβλημα αυτό περιορίζοντας το y σε ένα διάστημα Δ ώστε να είναι συνάρτηση ως προς x στο διάστημα αυτό.

3. Στα προβλήματα πολλές φορές παρουσιάζονται σχέσεις της μορφής f(x,y) που συνδέουν τα x , y. Είναι δυνατόν η σχέση αυτή να μη δίνει το y σαν συνάρτηση του x ή να μη λύνεται , ή να λύνεται με περισσότερους από έναν τύπους ως προς y, όπως για παράδειγμα είναι οι :y2=2px , x2+y2=1 ,κ.λ.π.

Ανάλογα ισχύουν και όταν τα x , y είναι συνεχείς συναρτήσεις μιας μεταβλητής t δηλ. x=f(t) , y=g(t). Μπορεί να μην είναι γνησίως μονότονες στο πεδίο ορισμού τους ώστε να αντιστρέφονται για να βρούμε τελικά το y σαν συνάρτηση του x. Δηλαδή η απαλοιφή του t να μην δίνει συνάρτηση. Μπορούμε να αποφύγουμε αυτού του είδους τα προβλήματα χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του J.L. Lagrange (1772).

Γενικά η χρήση του κλασικού συμβολισμού (gof)΄(x)=g΄(f(x))f΄(x) είναι

πολυπλοκότερη από την εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας

$$dy/dx = (dy/du)(du/dx)$$

όπου y=g(u) , u=f(x) (χωρίς να θεωρούμε ότι έγινε απλοποίηση).

4. Παρατηρούμε ακόμη ότι dy(t)/dx = y΄(t) / x΄(t) δηλαδή ο ρυθμός

μεταβολής μιας συνάρτησης ως προς μια άλλη είναι ίσος με το λόγο των

ρυθμών μεταβολής τους ως προς την κοινή ανεξάρτητη μεταβλητή τους.

Τέλος ας προσέξουμε ότι αν δύο ή περισσότερες παραγωγίσιμες συναρτήσεις

συνδέονται με μια ισότητα για να βρούμε το ζητούμενο ρυθμό μεταβολής

παραγωγίζουμε τα δύο μέλη . Στη διαδικασία αυτή εννοούμε ότι η ισότητα f(x)=g(x)

σημαίνει ότι η f(x) και η g(x) είναι δύο τύποι της ίδιας συνάρτησης . Έτσι αν

ax2+b=4x2+1 παραγωγίζοντας παίρνουμε 2ax=8x . Δε μπορούμε όμως να

παραγωγίσουμε την x2=4 (που είναι εξίσωση και αληθεύει για δύο μόνο τιμές) .

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Σχεδιάστε ένα κατάλληλο σχήμα γιατί η γεωμετρική μορφή του φαινομένου δεν αλλάζει με το χρόνο .

- Συμβολίστε τις ποσότητες που μας ενδιαφέρουν τη χρονική στιγμή t .

- Από τα δεδομένα του προβλήματος και με τη βοήθεια γνωστών σχέσεων βρείτε μια ισότητα που ισχύει για κάθε t.

- Παραγωγίζοντας , βρείτε μια εξίσωση που περιέχει το ζητούμενο ρυθμό μεταβολής .

- Λύστε την εξίσωση ως προς το ρυθμό μεταβολής , που ζητάτε και αντικαταστήστε τα δεδομένα που ισχύουν κατά τη δεδομένη χρονική στιγμή .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Αν y(t) , x(t) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει x2(t)+y2(t)=1 , να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής dy/dx.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Αν x2+y2 =1 , να βρεθεί το dy/dx .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : Αν είναι γνωστό ότι x=ασυνt και y=αημt, a>0 , να βρεθεί το dy/dx .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 : Ένα σημείο Α κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης y x2-2x , και όταν βρίσκεται στο σημείο (2,0) το x αυξάνεται με ρυθμό dx/dt=3cm/sec . Να βρεθεί το dy/dt και να ερμηνευθεί το αποτέλεσμα .
Μετά να βρεθεί σε ποια θέση οι δύο ρυθμοί μεταβολής είναι ίσοι .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 : Το ύψος του νερού σε ένα κυλινδρικό δοχείο ανεβαίνει με ρυθμό (10/π)cm/sec . Αν η ακτίνα της βάσης του δοχείου είναι 80cm , να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνει ο όγκος του νερού .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 (Θέμα εξετάσεων) : Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10m του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy ,Ox αντίστοιχα . Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα U=2m/sec και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση s(t)=Ut όπου t ο χρόνος σε sec , $0 < t < 5$.

1. Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.
2. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6m .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 : Έστω E(α),το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=f(x)=x3 , τον άξονα y΄y και την ευθεία y=a , a > 0 . Αν η ευθεία αυτή κινείται κάθετα στον y΄y κατά τη θετική φορά αυτού (δηλ. το a τείνει στο άπειρο), και με ταχύτητα 4m/sec , να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E(α), όταν a=27 .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 : Ένα σημείο A κινείται στον ημιάξονα OX με ταχύτητα u=2m/sec . Αν B(0,10) , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας OBA=u , ως προς το χρόνο , κατά την χρονική στιγμή που το A βρίσκεται στο σημείο (20,0) .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 : Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ex ,και τα σημεία , A , B της γραφικής της παράστασης στις θέσεις με τετμημένες αντίστοιχα x , x+1 .

1.Να προσδιορισθεί το x < 0 , ώστε το εμβαδόν E(x) του τριγώνου AOB όπου O(0,0) να γίνεται μέγιστο και να βρεθεί το limE(x) (όταν χ τείνει στο άπειρο).

2.Αν το x μειώνεται με ταχύτητα 2cm/sec , να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι x=-4 .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 : Ένα μπαλόνι ανεβαίνει κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα 1m/sec. Ένα αυτοκίνητο περνά κάτω από το μπαλόνι όταν αυτό βρίσκεται σε ύψος 39m και κινείται κατά μήκος ενός ίσιου δρόμου με σταθερή ταχύτητα u=30m/sec . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης αυτοκινήτου - μπαλονιού στο πρώτο δευτερόλεπτο της κίνησης.

Και άλλα Παραδειγματα - Εφαρμογές

1. **Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^2 - 3$. Να βρεθεί η $f\,'(2)$.**

Λύση

Είναι $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ με $f(2) = 2\cdot 2^2 - 3 = 5$

Αρα: $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^2+8h+5-5}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(2h+8)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2h+8) = 8$

2. **Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τη μεγάλη πλευρά του τριπλάσια από τη μικρή. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ως προς τη μικρή πλευρά όταν αυτή είναι ίση με 2cm.**

Λύση

Έστω x και $y = 3x$ οι πλευρές. Τότε $E = xy = 3x^2$, $x > 0$

$E'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{E(2+h)-E(2)}{h}$

Είναι: $E(2+h) = 3(2+h)^2 = 3(4+4h+h^2) = 12+12h+3h^2$

και $E(2) = 3\cdot 2^2 = 12$

Άρα:

$E'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{12+12h+3h^2-12}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{12h+3h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(12+3h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(12+3h) = 12$

3 **Ενα σφαιρικό μπαλόνι ξεφουσκώνει και η ακτίνα του δίνεται από τον τύπο $r(t) = 80 - t$, $t\in[0,80]$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας ως προς t όταν t = 5 sec.**

Λύση

Εχουμε: $E = 4\pi r^2$, άρα: $E(t) = 4\pi(80 - t)^2$ Άρα: $E'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{E(5+h) - E(5)}{h}$

Είναι: $E(5+h) = 4\pi(80-5-h)^2 = 4\pi(75-h)^2 = 4\pi h^2 - 600\pi h + 22500\pi$

και $E(5) = 4\pi(80-5)^2 = 22500\pi$ Αρα:

$$E'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{4\pi h^2 - 600\pi h + 22500\pi - 22500\pi}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4\pi h^2 - 600\pi h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4\pi h - 600\pi)}{h} =$$
$$\lim_{h \to 0}(4\pi h - 600\pi) = -600\pi$$

4. **Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + \alpha x$, $x \in R$, $\alpha \in R$. Να βρείτε την $f'(1)$ με τον ορισμό της παραγώγου. Κατόπιν να προσδιορίσετε το $\alpha \in R$ ώστε ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν x = 1 να είναι ίσος με 5.**

Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν x = 1 είναι ίσος με 5 άρα:

$$f'(1) = 5 \Leftrightarrow 2 + \alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

5. **Οι διαγώνιοι δ_1 και δ_2 ενός ρόμβου μεταβάλλονται ως εξής: η δ_1 αυξάνεται με ρυθμό 4mm/sec και η δ_2 μειώνεται με ρυθμό 6mm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ρόμβου ως προς χρόνο t τη χρονική στιγμή που: $\delta_1 = \delta_2 = 10$mm.**

Λύση

Ισχύει $E = \dfrac{\delta_1 \delta_2}{2}$. Άρα: $E(t) = \dfrac{\delta_1(t)\delta_2(t)}{2}$

$$E'(t) = \left(\frac{\delta_1(t)\delta_2(t)}{2}\right)' \Leftrightarrow E'(t) = \frac{1}{2}[\delta_1'(t)\delta_2(t) + \delta_1(t)\delta_2'(t)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E'(t) = \frac{1}{2}[4mm/sec \cdot 10mm + 10mm(-6mm/sec)] \Leftrightarrow E'(t) = -10mm^2/sec$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

1. Μια ευθεία κινείται γύρω από το σημείο Κ(1,2) και τέμνει τον θετικό ημιάξονα Οχ σ' ένα σημείο Α. Αν το σημείο Α κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 cm/sec,να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ =ΟΚΑ ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο Α βρίσκεται στη θέση $A_0(5/3, 0)$.

2. Ένα σημείο κινείται πάνω στον κύκλο $χ^2+ψ^2=6$ με σταθερή ταχύτητα 2cm/sec ξεκινώντας από το σημείο Α($\sqrt{6}$,0).Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μήκους της χορδής ΑΒ ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή t_0 που η γωνία θ=(ΟΑ,ΟΒ) είναι ίση με π/3.

3. Η ακτίνα ενός κύκλου δίνεται από τον τύπο r(t)=3-t, $t\in[0,3]$, r σε m και t σε sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και του μήκους του ως προς το χρόνο t.

4. Δύο σημεία Α,Β κινούνται στους ημιάξονες Οχ, Οψ αντίστοιχα ξεκινώντας ταυτόχρονα από το σημείο Ο με ταχύτητες $υ_A$=20 m/sec,$υ_B$=15 m/sec.Να βρεθούν:
   Α) ο ρυθμός μεταβολής της μεταξύ τους απόστασης 6sec αργότερα.
   Β) ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ την ίδια χρονική στιγμή.

5. Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στην υπερβολή με εξίσωση $3χ^2-ψ^2=12$. Η ταχύτητα της τεταγμένης του είναι 6 m/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του τη χρονική στιγμή t_0 που είναι χ=4cm.

6. Αντλούμε νερό από μια δεξαμενή σχήματος κώνου με ακτίνα βάσης 5m και βάθους 12m με σταθερό ρυθμό μεταβολής 5 m^3/h Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του βάθους του νερού, όταν η γενέτειρα του κώνου που σχηματίζει το νερό της δεξαμενής είναι 6m.

7. Ένας προβολέας βρίσκεται σε ύψος 15m ψηλότερα από το έδαφος. Ένας άνθρωπος που έχει ύψος 1,8m απομακρύνεται από το σημείο που βρίσκεται κάτω από τον προβολέα με ταχύτητα 6m/sec. Αν ο προβολέας είναι στραμμένος πάνω του, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της σκιάς του ανθρώπου.

8. Ο όγκος μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό π cm^3/sec.

   i) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας της σφαίρας ως προς τον χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα της είναι r=1/4 cm.
   ii) Ποια είναι η ακτίνα της σφαίρας τη χρονική στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της είναι 2 cm^2/sec.

9. Δύο πουλιά Α και Β πετούν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο σε ευθύγραμμες οριζόντιες τροχιές με υψομετρική διαφορά 3m έχοντας μέση σταθερή ταχύτητα υ=10m/sec και με αντίθετη φορά. Κατά τη χρονική στιγμή 0 τα πουλιά βρίσκονται στην ίδια

κατακόρυφο. Πόσο θα απέχουν τα πουλιά , όταν ο ρυθμός μεταβολής της απόστασής τους είναι 10;

10. Χρωματιστό υγρό πέφτει σε ρούχο και απλώνεται σχηματίζοντας κυκλική κηλίδα της οποίας το εμβαδό αυξάνει με ρυθμό μεταβολής $5cm^2/min$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας κατά τη χρονική στιγμή κατά την οποία το εμβαδό της κηλίδας είναι $36\pi cm^2$.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

11. Μια σκάλα μήκους 13 m είναι ακουμπισμένη σ' έναν κατακόρυφο τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας έλκεται από τον τοίχο, με ρυθμό 2 m/sec. Να βρείτε:

α. Πόσο γρήγορα γλιστράει το πάνω άκρο της σκάλας, όταν το κάτω άκρο απέχει από τον τοίχο 5 m.

β. Το ρυθμό μεταβαβολής του εμβαδού του τριγώνου, που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο και το έδαφος, όταν το κάτω άκρο της απέχει από τον τοίχο 12 m.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και το σημείο Μ $(\alpha, \ln\alpha)$, με $\alpha > 0$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο Μ.

β. Για ποια τιμή του α, η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

γ. Αν το σημείο Μ απομακρύνεται από τον άξονα y΄y, με σταθερή ταχύτητα v = 2 m/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ, ως προς το χρόνο t, τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία η εφαπτόμενη στο Μ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.