

**ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

**ΣΤΑ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

# ΕΝΟΤΗΤΑ 1<sup>η</sup>

Μετρικές σχέσεις σε τρίγωνο

# ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

## Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

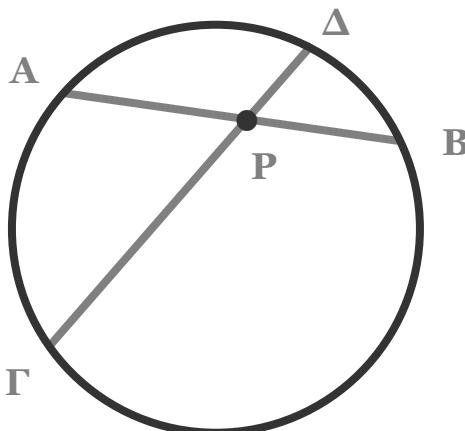
### α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

**Ερώτηση 1<sup>η</sup>: ΤΕΜΝΟΥΣ ΕΣΚΥΚΛΑΟΥ**

ΘΕΩΡΗΜΑ

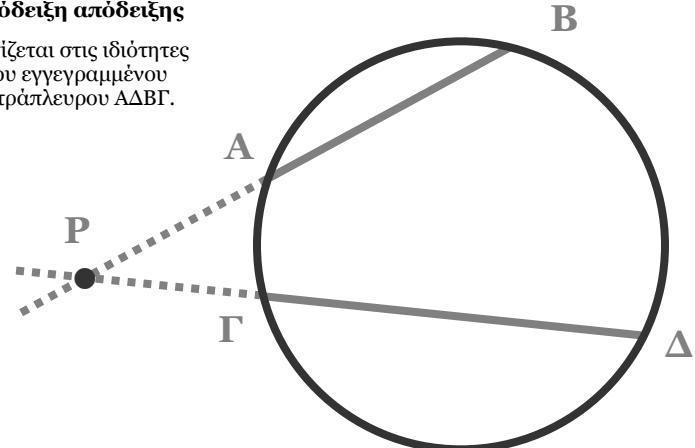
Αν δύο χορδές  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  ενός κύκλου ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο  $P$ , τότε ισχύει:

$$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$$



Υπόδειξη απόδειξης

Βασίζεται στις ιδιότητες του εγγεγραμμένου τετράπλευρου  $\Delta\Gamma\Delta\Gamma$ .

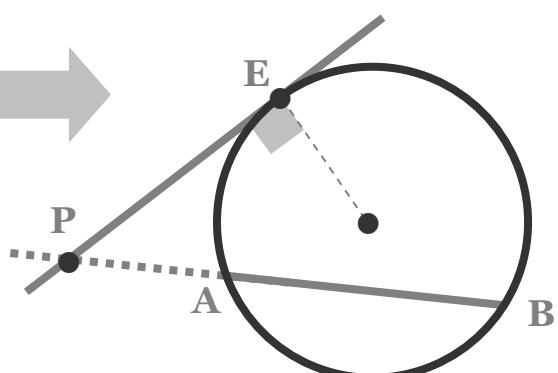


ΘΕΩΡΗΜΑ

Από ένα εξωτερικό σημείο  $P$  κύκλου  $(O, R)$  φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα  $PE$  και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία  $A, B$ , τότε ισχύει:

$$PE^2 = PA \cdot PB$$

ΟΡΙΣΜΟΣ



Ονομάζουμε δύναμη ενός σημείου  $P$  ως προς κύκλο  $(O, R)$  τη διαφορά  $OP^2 - R^2$  και συμβολίζεται:

$$\Delta_{(O,R)}^P = OP^2 - R^2 = \delta^2 - R^2$$

όπου, προφανώς,  $\delta = OP$ .

Από τον ορισμό, γίνεται αντιληπτό ότι η δύναμη σημείου ως προς κύκλο αποτελεί ένα κριτήριο της σχετικής θέσης του σημείου και του κύκλου. Αναλυτικά:

$\Delta_{(O,R)}^P > 0$	$\Leftrightarrow$	Το P είναι <b>εξωτερικό</b> σημείο του κύκλου.
$\Delta_{(O,R)}^P = 0$	$\Leftrightarrow$	Το P είναι σημείο του κύκλου
$\Delta_{(O,R)}^P < 0$	$\Leftrightarrow$	Το P είναι <b>εσωτερικό</b> σημείο του κύκλου.

# ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

## Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

### **α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας**

**Ερώτηση 1<sup>η</sup>:** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το πρόβλημα της χρυσής τομής

### **β) Ερωτήσεις θεωρίας για τα κριτήρια αξιολόγησης**

**Ερώτηση 1<sup>η</sup>:** Να ορισθεί η δύναμη σημείου ως προς κύκλο

**Ερώτηση 2<sup>η</sup>:** Ποιες οι σχετικές θέσεις σημείου  $\Sigma$ , ως προς κύκλο  $(O,R)$  ανάλογα με το πρόσημο της δύναμης του  $\Sigma$  ως προς τον  $(O, R)$

**Ερώτηση 3<sup>η</sup>:** Θεωρούμε τον κύκλο  $(O,R)$  και ένα σταθερό σημείο  $\Sigma$ , με  $\Sigma O = a$ . Να δειχθεί ότι, για κάθε ευθεία, που διέρχεται από το  $\Sigma$  και τέμνει τον κύκλο στα Α, Β το γινόμενο,  $\Sigma A \cdot \Sigma B$  είναι σταθερό.

Ειδικότερα:

Όταν το  $\Sigma$ , εκτός του  $(O,R)$   
 $\Sigma A \cdot \Sigma B = a^2 - R^2$ .

Όταν το  $\Sigma$ , εντός του  $(O,R)$   
 $\Sigma A \cdot \Sigma B = R^2 - a^2$

### **Ερώτηση 4<sup>η</sup>:**

Να δειχθεί ότι, αν  $\Sigma$  είναι σημείο εκτός του κύκλου  $(O,R)$ , η δύναμη του σημείου  $\Sigma$  ως προς τον  $(O, R)$  ισούται με  $\Sigma E^2$ , όπου  $\Sigma E$  το εφαπτόμενο ευθύγραμμο τμήμα.

### **Ερώτηση 5<sup>η</sup>:**

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τα 2 κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο

### **Ερώτηση 6<sup>η</sup>:**

Αν η προέκταση της διχοτόμου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Ε, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\Delta A \cdot AE = AB \cdot AG$$

$$\Delta A^2 = AB \cdot AG - BD \cdot DG$$

# ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

**M<sub>1</sub>:** Για να εξετάσω τη σχετική θέση σημείου  $\Sigma$ , ως προς κύκλο  $(O, R)$  εξετάζω το πρόσημο της διαφοράς:

$$\alpha^2 - R^2, \text{ όπου: } \alpha = \Sigma O$$

Έτσι:

- ◆ αν  $\alpha^2 - R^2 > 0 \Rightarrow$  το  $\Sigma$ , βρίσκεται εκτός του  $(O, R)$
- ◆ αν  $\alpha^2 - R^2 = 0 \Rightarrow$  το  $\Sigma$ , είναι σημείο του  $(O, R)$
- ◆ αν  $\alpha^2 - R^2 < 0 \Rightarrow$  το  $\Sigma$ , βρίσκεται εντός του  $(O, R)$

### Παράδειγμα

Έστω κύκλος  $(O, R)$ ,  $R=3$  και  $\Sigma$  σημείο ώστε:  $\alpha = \Sigma O = 4$  ή  $3$  ή  $2$

Ποια η θέση του  $\Sigma$ , ως προς τον  $(O, R)$ ;

### Επίλυση

- ◆ αν  $\alpha = 4 \Rightarrow \alpha^2 - R^2 = 16 - 9 = 7 > 0 \Rightarrow$  το  $\Sigma$ , βρίσκεται εκτός του  $(O, R)$
- ◆ αν  $\alpha = 3 \Rightarrow \alpha^2 - R^2 = 9 - 9 = 0 \Rightarrow$  το  $\Sigma$ , είναι σημείο του  $(O, R)$
- ◆ αν  $\alpha = 2 \Rightarrow \alpha^2 - R^2 = 4 - 9 = -5 < 0 \Rightarrow$  το  $\Sigma$ , βρίσκεται εντός του  $(O, R)$

### Εφαρμογή 1η από τον μαθητή

Έστω κύκλος  $(O, R)$   $R=8\lambda$  και  $\Sigma$  σημείο ώστε:  $\Sigma O = \alpha = S\lambda$  ή  $9\lambda$  ή  $8\lambda$

Ποια η θέση του  $\Sigma$ , ως προς τον  $(O, R)$ ;

**M<sub>2</sub>:** Αν σε κύκλο δίνονται 2 ακτίνες του, που τέμνονται εσωτερικά ή εξωτερικά του κύκλου, τότε χρησιμοποιώ τις σχέσεις των 2 κριτηρίων, για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο.

**Παράδειγμα**

Αν δύο χορδές κύκλου τέμνονται σε μέρη ανάλογα, να αποδείξετε ότι είναι ίσες.

**Επίλυση**

$$\text{Έστω ότι: } \frac{KA}{KB} = \frac{KG}{KL} \Leftrightarrow KA \cdot KL = KB \cdot KG \quad (\alpha)$$

$$\text{Αλλά: } KA \cdot KB = KG \cdot KL \quad (\beta)$$

(από κριτήριο εγγράψιμων τετραπλεύρων)

$$\frac{(\alpha)}{(\beta)} \Leftrightarrow \frac{KA \cdot KL}{KA \cdot KB} = \frac{KB \cdot KG}{KG \cdot KL} \Leftrightarrow KB^2 = KL^2 \Leftrightarrow KB = KL \text{ άρα: } \alpha \Rightarrow KA = KG$$

$$\text{άρα: } KA + KB = KG + KL \Leftrightarrow AB = GL$$

**Εφαρμογή 1η από τον μαθητή**

Αν η προέκταση της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

$$AD \cdot AE = \frac{1}{2} (\beta^2 + \gamma^2).$$

**Εφαρμογή 2η από τον μαθητή**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ τέμνουν τις ευθείες ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι: BZ = GE

**Μ<sub>3</sub>:** Αν σε κύκλο (O,R) δίνεται εφαπτομένη ΣΑ του (O,R) από το σημείο Σ, εκτός του (O,R) και έχω μια χορδή ΒΓ, που περνά από το Σ, τότε βάση θεωρήματος γράφω:

$$\Sigma A^2 = \Sigma B \cdot \Sigma G$$

**Παράδειγμα**

Από ένα σημείο M εκτός κύκλου (O,R) φέρνουμε ένα εφαπτόμενο ευθύγραμμο τμήμα

$$MA \text{ και μία τέμνουσα } MBG \text{ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι: } \frac{MB}{MG} = \frac{AB^2}{AG^2}$$

**Επίλυση**

$$\text{Ισχύει: } MA^2 = MB \cdot MG \quad (*)$$

Τα τρίγωνα: MAB, MAG έχουν: M κοινή και  $\hat{A}_1 = \hat{G}$  ( $\hat{A}_1$  γωνία της εφαπτομένης MA και χορδής AB,  $\hat{G}$  εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο  $A\bar{B}$ ). Άρα:

$$MAB \approx MAG \Rightarrow \left( \frac{MA}{MG} \right) = \frac{MB}{MA} = \left( \frac{AB}{AG} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MG} = \frac{AB}{AG} \Rightarrow \frac{MA^2}{MG^2} = \frac{AB^2}{AG^2} \stackrel{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{MB \cdot MG}{MG^2} = \frac{AB^2}{AG^2} \Leftrightarrow \frac{MB}{MG} = \frac{AB^2}{AG^2}$$

**Εφαρμογή 1η από τον μαθητή**

Από σημείο M εκτός κύκλου (O,R) φέρουμε ένα εφαπτόμενο ευθύγραμμο τμήμα MA και την τέμνουσα MBΓ του κύκλου, η οποία διέρχεται από το κέντρο του. Αν η κάθετη από το M προς τη MB τέμνει την AG στο σημείο Δ να αποδείξετε ότι:

$$AG \cdot AD = MG^2 - MA^2$$

**Εφαρμογή 2η από τον μαθητή**

Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε μία χορδή AB=a και εκτός του κύκλου φέρουμε την ημιευθεία Bx ⊥ AB. Επί της Bx θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα BΓ=a και φέρουμε αν εφαπτόμενο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στον κύκλο. Αν ισχύει ΓΔ=2a, να εκφράσετε την ακτίνα R συναρτήσει του a.

**M<sub>4</sub>: Για να αποδείξω ότι ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο, χρησιμοποιώ τα 2 κριτήρια «για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο»**

**Παράδειγμα**

Θεωρούμε δύο τεμνόμενους κύκλους και ένα σημείο A της κοινής τους χορδής BΓ. Από το A φέρουμε δύο ευθείες, από τις οποίες η πρώτη τέμνει τον ένα κύκλο στα σημεία Δ, E και η δεύτερη τον άλλο στα σημεία Z, H. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z, H είναι κορυφές εγγράψιμου σε κύκλου τετραπλεύρου.

**Επίλυση**

$$\begin{aligned} & BΓ, ZH \text{ χορδές του ενός κύκλου τεμνόμενες} \Rightarrow \\ & \Rightarrow AZ \cdot AH = AB \cdot AG \quad (1) \\ & BΓ, ΔE \text{ χορδές του άλλου κύκλου τεμνόμενες} \Rightarrow \\ & \Rightarrow AΔ \cdot AE = AB \cdot AG \quad (2) \\ & (1), (2), \Rightarrow AZ \cdot AH = AΔ \cdot AE \Rightarrow \\ & \Rightarrow ΔHEZ, \text{ εγγράψιμο} \end{aligned}$$

# ΕΠΙΠΕΔΟ 2Ο

## **1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ**

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 1η**

**Είναι σωστό ή λάθος ότι:** Ένα σημείο έχει μηδέν δύναμη ως προς κύκλο όταν βρίσκεται πάνω στο κέντρο του κύκλου

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 2η**

**Είναι σωστό ή λάθος ότι:** Αν οι διαγώνιοι τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται στο 0 και ισχύει ΟΑ.ΟΓ=ΟΒ.ΟΔ, τότε το τετράπλευρο αυτό είναι εγγράψιμο.

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 3η**

**Είναι σωστό ή λάθος ότι:** Η δύναμη σημείου ως προς κύκλο και η απόσταση του σημείου από το κέντρο είναι ποσά ανάλογα:

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 4η**

**Είναι σωστό ή λάθος ότι:** Ένα σημείο έχει θετική δύναμη ως προς κύκλο, όταν βρίσκεται εντός του κύκλου.

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 5η**

**Είναι σωστό ή λάθος ότι:** Η δύναμη σημείου ως προς κύκλο και η διάμετρος είναι ίσες.

## 2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗ – ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

**Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.**

Στο επίπεδο του κύκλου (O,R) παίρνουμε σημείο Σ που απέχει απόσταση δ από το κέντρο του κύκλου. Φέρνουμε από το Σ ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β. Να αντιστοιχήσετε κάθε θέση του σημείου Σ με την αντίστοιχη τιμή του γινομένου ΣΑ.ΣΒ.

Στήλη (Α) Το σημείο Σ είναι:	Στήλη (Β) Είδος τριγώνου
/ εσωτερικό του κύκλου	/ $\delta^2 - R^2$
/ εξωτερικό του κύκλου	/ $R^2 - \delta^2$
/ πάνω στον κύκλο	/ 0
/ πάνω στο κέντρο του κύκλου	/ $\delta^2$ / $R^2$ / $\delta^2 + R^2$

### Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις

i) Αν η προέκταση της διχοτόμου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΒΓ στο Ε, τότε:

a)  $A\Delta.AE = \dots$

b)  $A\Delta^2 = \dots$

Αν Σ σημείο εκτός κύκλου (O,R) και  $\Sigma \in Z$ ,  $\Sigma A\Delta$ , τέμνουσές του και  $\Sigma P$ , εφαπτομένη του (0,R) στο P, τότε:

γ)  $\Sigma E.\Sigma Z = \dots = \dots$

δ)  $\Sigma P^2 = \dots = \dots$

### 3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

**3.1** Σε κύκλο (O,R) φέρουμε από σημείο P εκτός αυτού 2 ευθείες, από τις οποίες η μία τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B και η άλλη στα σημεία Γ,Δ. Ποια σχέση είναι η σωστή;

- A.   $PA.PB=PG.GD$
- B.   $PA.PB=PG.PD$
- Γ.   $PA.PD=PG.PB$
- Δ.   $PA.GD=PG.AB$
- E.   $PA.PG=AB.GD$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

**3.2** Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε τη χορδή AB. Σημείο P μετακινείται πάνω στη χορδή. Η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο γίνεται μέγιστη όταν:

- A.  Το P είναι ένα από τα áκρα A και B
- B.  Το P είναι μέσο της AB
- Γ.  Οποιοδήποτε σημείο της AB
- Δ.  Το P διαιρεί το AB σε μέσο και áκρο λόγο
- E.  Κανένα από τα παραπάνω

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

**3.3** Έστω κύκλος (O,R) και P σημείο εκτός του (O,R). Έστω PAB τέμνουσα του (O,R) και PK η εφαπτομένη του (O,R). Ποια σχέση είναι σωστή;

- A.   $KB.AK=PA^2$
- B.   $PA.AB=PK.PB$
- Γ.   $PK^2=PA.PB$
- Δ.   $PO^2=PA.AB$
- E.   $PO^2=PA.PB$

## 4.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

**Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:**

**Πότε.....**

**με όταν...**

**Ερώτηση α)**

.....Ένα τετράπλευρο μπορεί να εγγραφεί σε κύκλο;

**Ερώτηση β)**

.....Η δύναμη ενός σημείου ως προς κύκλο δεν είναι μηδέν;

**Ερώτηση γ)**

..... Η δύναμη σημείου ως προς κύκλο είναι αριθμός πραγματικός;

**Ερώτηση δ)**

..... δεν ορίζεται δύναμη σημείου ως προς κύκλο;

## **5. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ**

### **Διατυπώσεις των θεμάτων**

#### **Άσκηση 1<sup>η</sup>**

Θεωρούμε κύκλο (O,R) μια διάμετρό του AB και τα σημεία Γ και Δ της AB ώστε  $O\Gamma=O\Delta=\delta$ . Αν P είναι το τυχαίο σημείο του O και E,Z οι τομές των PG και PD αντιστοίχως με τον κύκλο, να αποδείξετε ότι:

a)  $\Delta Z = \frac{R^2 - \delta^2}{\Delta P}$  και  $\Gamma E = \frac{R^2 - \delta^2}{\Gamma P}$

b)  $\frac{\Gamma P}{\Gamma E} + \frac{\Delta P}{\Delta Z}$  είναι σταθερό

#### **Άσκηση 2η**

Από σημείο P εκτός κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη PA και την τέμνουσα PBΓ του κύκλου. Να δειχθεί ότι:

a)  $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{PB}{P\Gamma}$

b) Το τρίγωνο PAB είναι όμοιο με το τρίγωνο PΓA

#### **Άσκηση 3<sup>η</sup>**

Δύο κύκλοι λέγονται ορθογώνιοι ή ότι τέμνονται κάθετα όταν η γωνία των εφαπτομένων τους σε ένα από τα σημεία τομής τους είναι ορθή. Να αποδείξετε ότι:

a) Αναγκαία και σταθερή συνθήκη για να τέμνονται δύο κύκλοι κάθετα είναι το τετράγωνο της διακέντρου τους να είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ακτίνων τους.

b) Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι δύο κύκλοι ( $O_1, R_1$ ) και ( $O_2, R_2$ ) ορθογώνιοι είναι: η δύναμη του κέντρου του  $O_1$  ως προς τον κύκλο  $O_2$  να ισούται με το τετράγωνο της ακτίνας του  $O_1$  δηλαδή:

$$\Delta_{(O_2R_2)}^{O_1} = R_1^2$$

#### **Άσκηση 4<sup>η</sup>**

Θεωρούμε κύκλο (O, R) μια σταθερή διάμετρό του AB και μια σταθερή ευθεία  $xv \perp AB$ . Αν μια ευθεία xy τέμνει τυχαία χορδή AG του κύκλου στο σημείο Σ, να αποδείξετε ότι:  $AS \cdot AG = \text{σταθερό}$ .

**Ασκηση 5<sup>η</sup>**

Θεωρούμε κύκλο (O,R) μια διάμετρο αυτού AB και ένα σημείο P στην προέκταση της BA. Φέρνουμε την εφαπτομένη PG και την κάθετη στο P προς την AB που τέμνει τη BG στο Δ. Να αποδείξετε ότι:  $PB^2 = PG^2 + BG \cdot BD$