ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΩΡΙΑΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

στα

Μαθηματικά

Θέμα 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση *f* συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ και G(χ) μια αρχική συνάρτηση της *f*.
Να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \left[G(x)\right]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 8

Β. Τι παριστάνει γεωμετρικά το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ αν η *f* είναι μια συνεχής συνάρτηση στο [α , β] και $f(x) \geq 0$ για κάθε x ε [α , β];

Μονάδες 7

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:*

α. Αν η *f* είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο, σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $f(x) = \int_{a}^{x} f'(t)dt + f(a)$ για κάθε x ∈ Δ.

Μονάδες 2

β. Αν η *f* είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt + 2011$ είναι μία αρχική της *f*.

Μονάδες 2

γ. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x,\ x > 0$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e},\ x = 1$ είναι ίσο με $E = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx$

Μονάδες 2

δ. Αν η *f* είναι μια συνεχής συνάρτηση στο R και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ τότε θα ισχύει, (πάντα),
$f(x) \geq 0$.

Μονάδες 2

ε. Αν f , g δύο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ και *α, β, γ* ε Δ τότε
θα ισχύει, πάντα, $\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$

Μονάδες 2

E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/
iraidos@gmail.com

Θέμα 2ο

Α. Αν f μια 1-1 παραγωγίσιμη συνάρτηση, με συνεχή παράγωγο, σ' ένα διάστημα Δ και συνεχή αντίστροφη στο $f(\Delta)$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha),$$ με α, β ε Δ.

Μονάδες 8

Β. Έστω $f(x) = x + \ln x,\ \ x > 0$

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι $\ln \dfrac{x\ln x}{x-1} \le x-1,\quad x>1$

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=1, x=e+1. (*Να θεωρηθεί δεδομένο ότι η αντίστροφη της συνάρτησης f είναι συνεχής στο R)*

Μονάδες 7

Θέμα 3ο

Έστω *f* συνεχής συνάρτηση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R και η συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x e^t\left(\int_0^t f(u)du\right)dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Αα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $g(x) = \int_0^x \left(e^x - e^t\right) f(t)dt$

Μονάδες 7

β. Αν $f(x) \ge 0,\quad \forall x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι και $g(x) \ge 0,\quad \forall x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

Β. Αν επιπλέον ισχύει: $g''(x) = 2x,\quad x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x}x(2-x),\quad x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης *f* και τον άξονα $x'x$

Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Έστω f ,g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

i. f παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f(0)=1$

ii. $\int_0^x tf'(t)dt-1=(x-1)e^x$, για κάθε πραγματικό αριθμό x

iii. $g(x)=\int_\alpha^x f(t^2)dt$, για κάθε πραγματικό αριθμό x και $g(1)=0$

α. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 4

β. Να δείξετε ότι $\alpha=1$

Μονάδες 6

γ. Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης g

Μονάδες 3

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g και τους άξονες $x'x$, $y'y$

Μονάδες 5

ε. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

Μονάδες 7

Εύχομαι επιτυχία στον στόχο σας!!!!!!!!!!!!!!