ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 3^{o}

Λογαριθμική

συνάρτηση

Το

24^{o} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

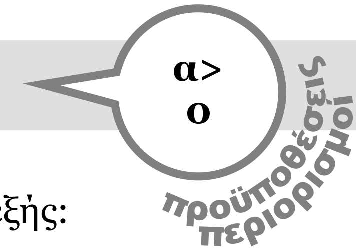
περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

3. Λογαριθμική Συνάρτηση

Με τον τρόπο αυτό, λοιπόν, μπορούμε για κάθε $x > 0$ να ορίσουμε την παρακάτω συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to$, την οποία ονομάζουμε **λογαριθμική με βάση α**:

$$f(x) = \log_{\alpha} x$$



Για τη λογαριθμική συνάρτηση ισχύουν τα εξής:

1. Έχει πεδίο ορισμού $\mathbf{A = (0, +\infty)}$

2. Έχει σύνολο τιμών το $\mathbf{f(A) =}$

3. Είναι **«1–1»**, δηλ. για κάθε $x_1 = x_2 \in A$ ισχύει:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2$$

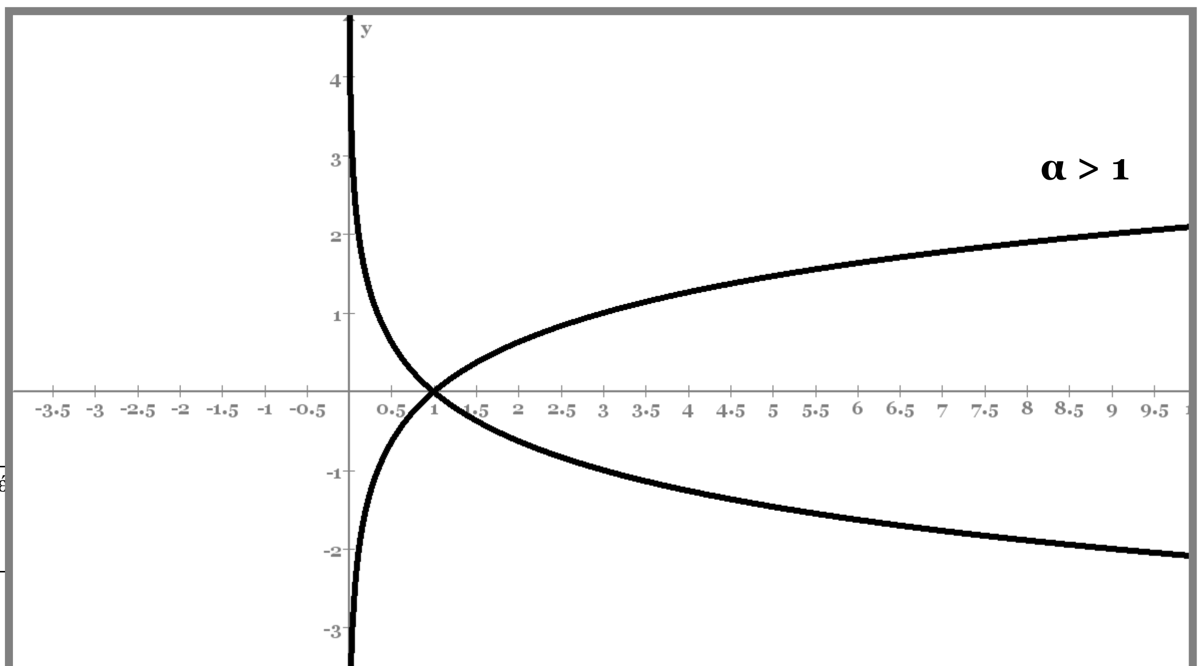
4. Αν $\alpha > 1$ είναι **αύξουσα (↑)**, δηλαδή για κάθε $x_1 < x_2 \in A$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_{\alpha} x_1 < \log_{\alpha} x_2$$

Αν $0 < \alpha < 1$ είναι **φθίνουσα (↓)**, δηλαδή για κάθε $x_1 < x_2 \in A$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_{\alpha} x_1 > \log_{\alpha} x_2$$

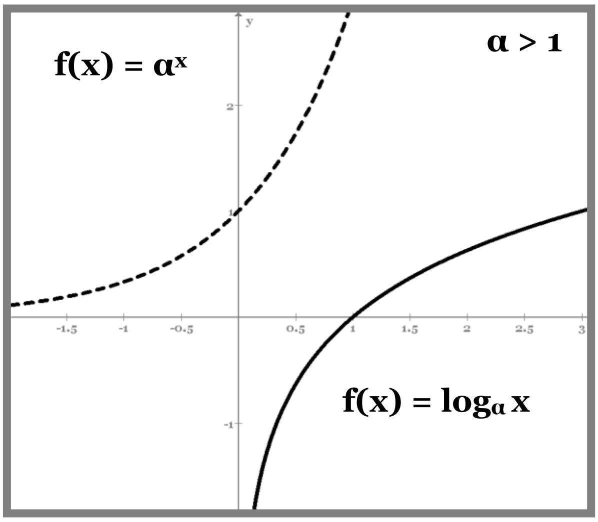
5. Για καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις, η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι μια καμπύλη της παρακάτω μορφής:

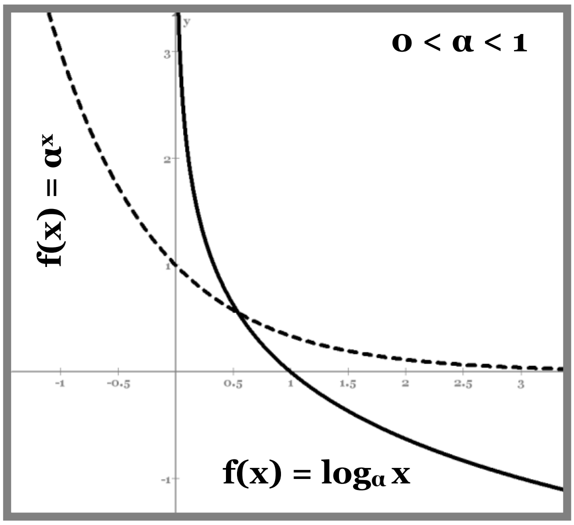


$0 < \alpha < 1$

6. Λέμε ότι ο άξονας y΄y είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης, για τους ίδιους λόγους που ο x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της εκθετικής συνάρτησης.

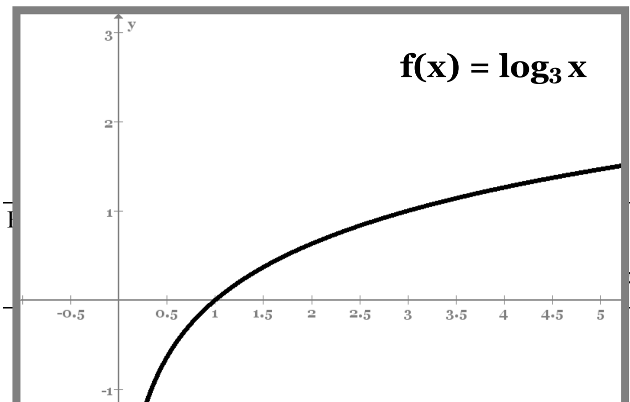
7. Διαπιστώνουμε, επίσης, ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\mathbf{y = \log_\alpha x}$ και $\mathbf{y = \alpha^x}$ (δηλαδή, με την ίδια βάση) είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο του 1ου τεταρτημορίου:

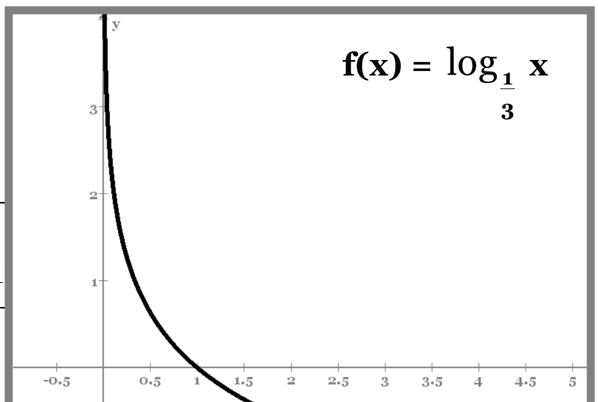


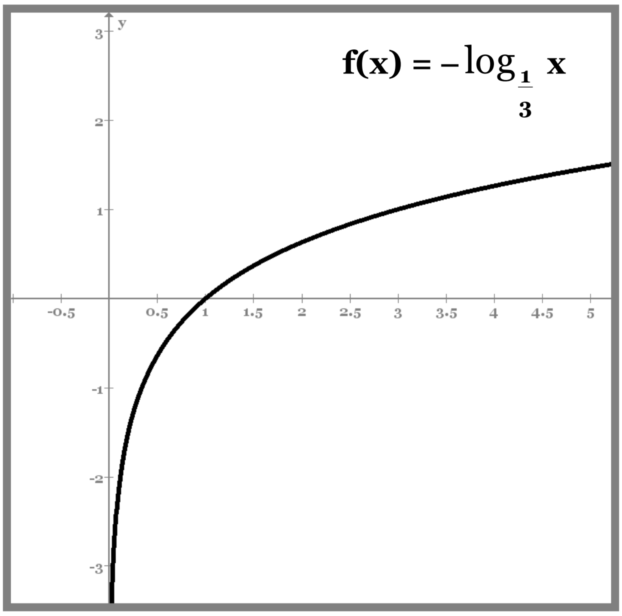


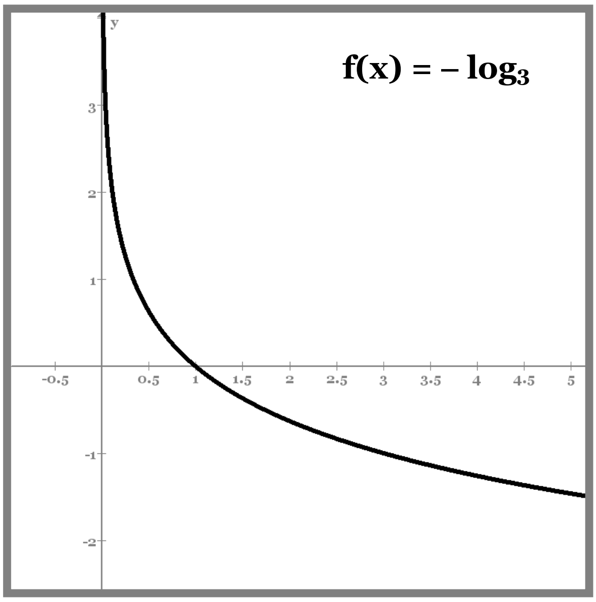
3. Παραδείγματα Γραφικών Παραστάσεων

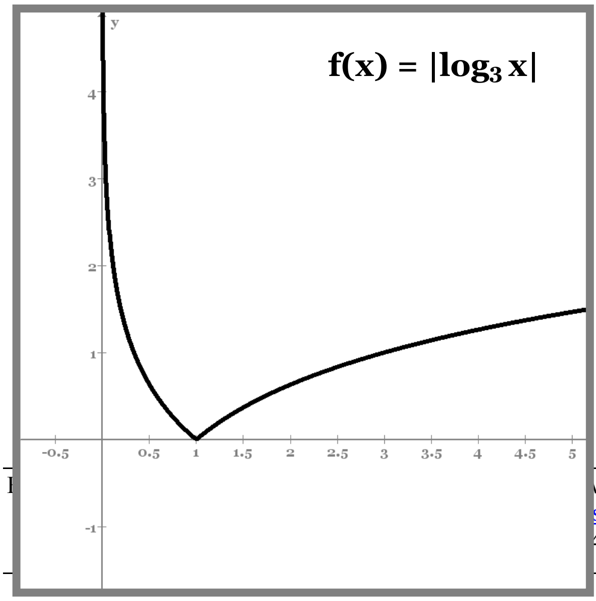
Εδώ παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις από διάφορες παραλλαγές της $f(x) = \log_3 x$, ώστε να γίνει καλύτερα κατανοητή η συμπεριφορά της λογαριθμικής συνάρτησης.

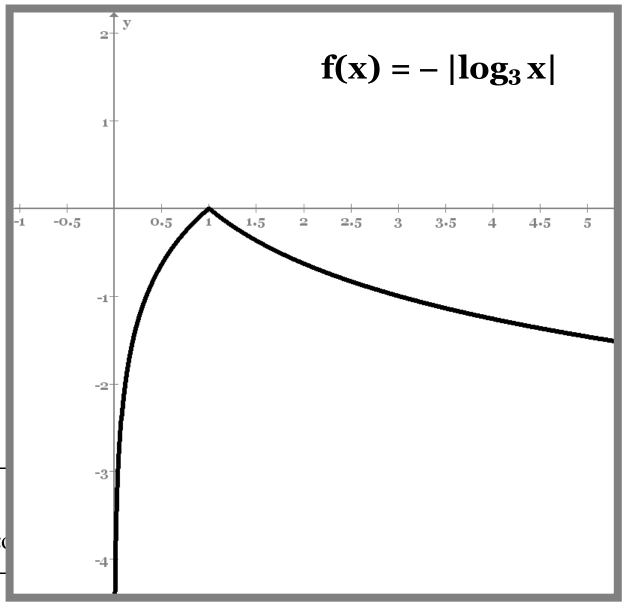


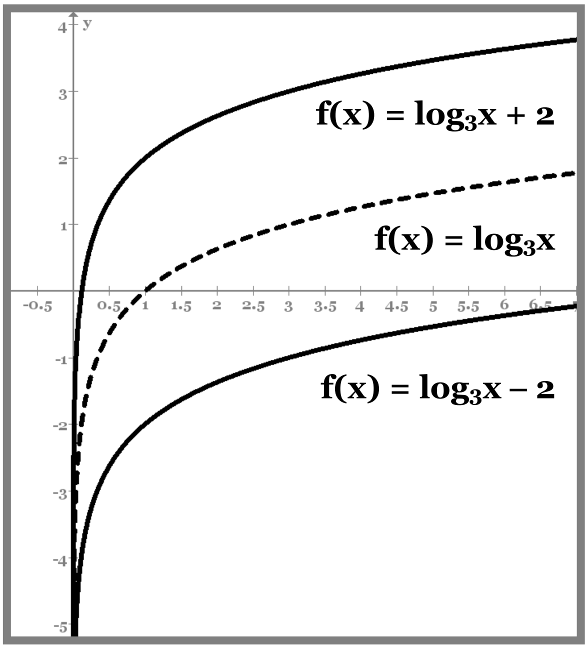


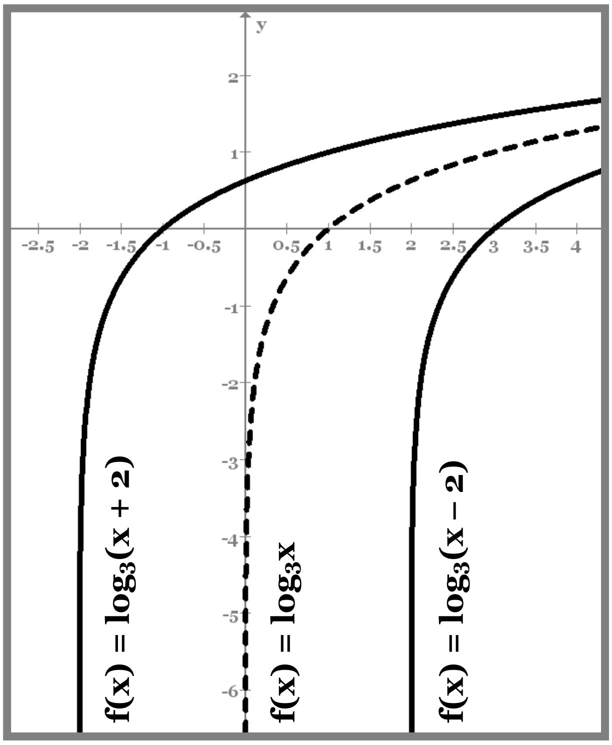

$f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$


$f(x) = -\log_3$


$f(x) = |\log_3 x|$


$f(x) = -|\log_3 x|$





Μεθοδολογία

Λογαριθμική Συνάρτηση

και άλλα όμορφα...

1. Λογαριθμικές Συναρτήσεις

1. Όταν μας ζητείται να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας λογαριθμικής συνάρτησης λαμβάνουμε υπόψιν τις διάφορες περιπτώσεις που αναλύθηκαν στην προηγούμενη σελίδες ή συνδυασμό αυτών.

Εξάσκηση : Να γίνει η γραφική παράσταση της f(x) = ln (x – 2) + 1

2. Όταν ζητείται να βρούμε πότε ορίζεται μια λογαριθμική συνάρτηση τότε έχουμε δυο πράγματα, κατά νου:

α. Καταρχάς, όμοια με την εκθετική, απαιτούμε για τη βάση του λογαρίθμου να είναι **α > 0** και **α ≠ 1**. Συνήθως, αυτό θα συμβαίνει, εφόσον στις περισσότερες ασκήσεις ασχολούμαστε με δεκαδικούς ή φυσικούς λογάριθμους. Καλό είναι όμως να έχουμε το νου μας, σε απαιτητικότερες ασκήσεις.

β. Κατά δεύτερο λόγο, η λογαριθμική συνάρτηση $\log_\alpha x$ είδαμε πως έχει πεδίο ορισμού το (0, +∞), δηλαδή θα πρέπει **x > 0**.

Εξάσκηση : Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x) = \log\dfrac{2-x}{2+x}$

2. Λογαριθμικές Παραστάσεις - Αποδεικτικές Ασκήσεις

Προσπαθούμε με τις ιδιότητες των λογαρίθμων να «ενώσουμε» όλους τους όρους σε έναν (συνήθως, ένα λογάριθμο), τον οποίο κατόπιν υπολογίζουμε.

Σε κάποιες περισσότερο απαιτητικές περιπτώσεις, χρήσιμες είναι και οι ιδιότητες $\boldsymbol{\log_\alpha \alpha^x = x}$ και $\boldsymbol{\log_\alpha \alpha^x = x}$.

Εξάσκηση : Να υπολογίσετε την παράσταση: $4^{1-\frac{1}{2}\log_2 3}$

3. Λογαριθμικές Εξισώσεις

Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η ! ! !

πρώτο πράγμα που κάνουμε πριν λύσουμε μια λογαριθμική ίσωση είναι να πάρουμε βαθιές ανάσες και κατόπιν τους αραίτητους **περιορισμούς**. Θα πρέπει η παράσταση, μέσα σε ιθε λογάριθμο, να είναι **θετική ποσότητα** (θυμάστε το πεδίο ισμού της λογαριθμικής;). Αφού εξετάσουμε όλους τους ριορισμούς, αναζητούμε τα διαστήματα στα οποία αυτοί **ναληθεύουν** (αναζητούμε δηλαδή τις κοινές τους λύσεις).

1. Καταρχάς, στις εξαιρετικά απλοϊκές εξισώσεις $\log_\alpha \theta = x$, όπου ο άγνωστος είναι κάποιος από τους α, θ, x κάνουμε άμεση αναγωγή της λογαριθμικής εξίσωσης σε μια εύκολη εκθετική, σύμφωνα με τον ίδιο τον ορισμό των λογάριθμων, δηλ. $\boldsymbol{\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta}$.

Εξάσκηση : Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\log_x 32 = 5 \quad \text{και} \quad \log_3 81 = x \quad \text{και} \quad \log_5 x = 3$$

2. Γενικά, προσπαθούμε να γράψουμε και τα δύο μέλη ως λογάριθμους με την ίδια βάση, ενώνοντας τους διάφορους όρους με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των λογαρίθμων. Στη συνέχεια, **"διαγράφουμε"** τους λογάριθμους, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι «1–1», άρα θα ισχύει: $\boldsymbol{\log x_1 = \log x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2}$.

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση:

$$\log(4x + 3) + \log 2 = \log(3x - 1) + \log 3$$

3. Συχνά, μπορεί να μας δίνονται λογαριθμικές εξισώσεις όπου ο άγνωστος θα βρίσκεται εκτός λογαρίθμου, σαν ξεχωριστός όρος. Τότε τον μετατρέπουμε σε λογάριθμο με βάση την κοινή βάση της εξίσωσης, σύμφωνα με την ιδιότητα $\boldsymbol{x = \log_\alpha \alpha^x}$.

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση:

$$x + \log(3 + 2^x) = x\log 5 + 2\log 2 + \log 7$$

4. Σε άλλες πάλι εξισώσεις, μπορεί να μας δίνονται λογάριθμοι με διαφορετικές βάσεις. Τότε, πολύ εύκολα, ανάγουμε όλους τους λογαρίθμους σε άλλους με την ίδια βάση, σύμφωνα με τον τύπο αλλαγής βάσης $\boldsymbol{\log_\alpha \theta = \dfrac{\log_\beta \theta}{\log_\beta \alpha}}$.

4. Λογαριθμικές Ανισώσεις

Σκεφτόμαστε με παρόμοιο τρόπο, όπως στις εξισώσεις, ωστόσο φροντίζουμε αν το **$0 < \alpha < 1$** να **αλλάζουμε τη φορά** της ανίσωσης, αφού τότε ισχύει: $\log x_1 < \log x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$. Στο τέλος, θα πρέπει φυσικά να **συναληθεύσουμε** τα διαστήματα λύσης της ανίσωσης με τα διαστήματα των περιορισμών. Αν δεν υπάρχουν κοινές λύσεις, τότε η ανίσωση θα είναι προφανώς αδύνατη.

Εξάσκηση : Να λυθεί η ανίσωση: $\log(3x - 2) - \log 4 > \log(2x - 5)$

5. Ανυπότακτες Εκθετικές Εξισώσεις

Μερικές φορές, ερχόμαστε αντιμέτωποι με εκθετικές εξισώσεις, στις οποίες θα αδυνατούμε να γράψουμε και τα δύο μέλη σαν δυνάμεις με την ίδια βάση. Στην περίπτωση αυτή – και εφόσον τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι θετικά – λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη.

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση: $2^{3x-1} = 3^{x+2}$

6. Συστήματα

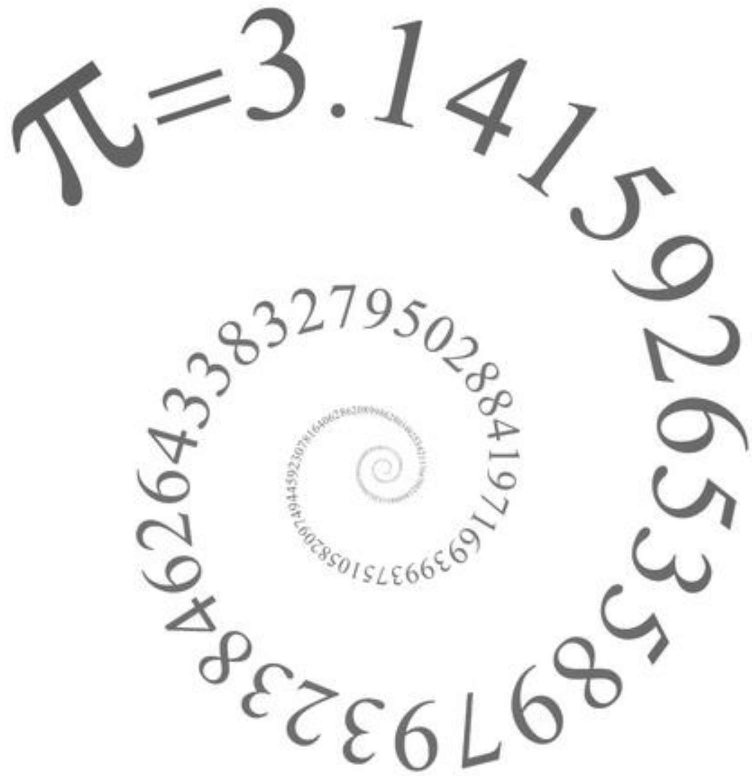
1. Κάποια συστήματα λύνονται εύκολα, με απλή χρήση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων και, στη συνέχεια, με απλές αντικαταστάσεις.

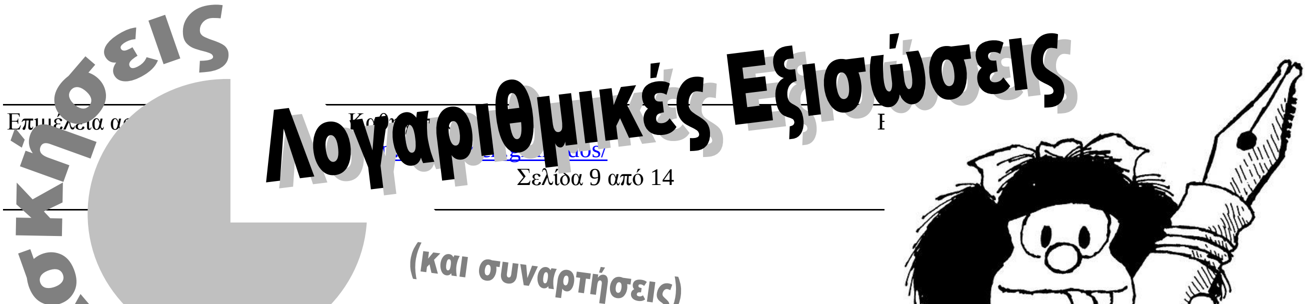
Εξάσκηση : Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \log x + \log y = 7 \\ \log x^3 - \log y^5 = 5 \end{cases}$

2. Γενικά πάντως, με όσες γνώσεις έχουμε συνολικά από τις εκθετικές εξισώσεις και τις ιδιότητες των λογαρίθμων, προσπαθούμε να ανάγουμε το σύστημα σε ένα ισοδύναμο χωρίς λογαρίθμους ή αγνώστους στους εκθέτες.

Εξάσκηση : Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \log x + \log y = \log 12 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2^{2x} \cdot 2^{y} = 128 \\ 2\log_2 x + \log_2 y = \log_2 12 \end{cases}$$





& Ανισώσεις

(και συστήματα)

1. Λογαριθμικές Συναρτήσεις

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\left(x^4-3x^3+6x-4\right)^x$

β. $g(x)=\log_{x-1}\left(e^{2x-1}-1\right)$

γ. $\varphi(x)=\ln(x-2)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x+\sqrt{\ln\dfrac{x^2+1}{2}}$

δ. $f(x)=\left(\dfrac{2\alpha-1}{1+\alpha}\right)^x$

2. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha+2}\right)^x$, $\alpha\in$

β. $g(x)=\log_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\left(x^2+1\right)$, $\alpha\in$

γ. $h(x)=\left(x^2-x+1\right)^x$

δ. $t(x)=\log_{\frac{x+2}{1-x^2}}\left(x^4+4\right)$

3. Δίνεται η συναρτηση $f(x)=\left(\dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1}\right)^x$.

α. Για ποιές τιμές του λ είναι 1-1 ;

β. Υπολογίστε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει:

$$f(1)+f(2)+f(3)=3f(0)$$

γ. Αν για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)>1$ να βρείτε τις τιμές του λ.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log_{\alpha}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

α. Εξετάστε αν είναι άρτια η περιττή.

β. Να αποδείξετε ότι: $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$

2. Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν x>0, y>0 και $x^2+y^2=7xy$ να δείξετε ότι:

$$\log_\alpha \frac{x+y}{3}=\frac{1}{2}\left(\log_\alpha x+\log_\alpha y\right)$$

2. Αν α, β, γ διάφοροι μεταξύ τους θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot^\gamma=1,\ \text{αν ισχύει:}\ \frac{\log\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{\log\beta}{\gamma-\alpha}=\frac{\log\gamma}{\alpha-\beta}$$

3. Αν οι αριθμοί α, β, γ, θ > 0 και διάφοροι του 1 (α, β, γ διαδοχικοί σε γεωμετρική πρόοδο) να αποδείξετε ότι οι αντίστροφοι των αριθμών: $\log_\alpha\theta$, $\log_\beta\theta$, $\log_\gamma\theta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

4. Να αποδείξετε ότι το αθροισμα των ν πρώτων όρων σε αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1=\log\alpha$, $\alpha_2=\log\beta$ είναι: $S_\nu=\frac{1}{2}\log\frac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-3)}}$.

5. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $3\log2+\log5-\log4=1$

β. $\frac{1}{2}\log25+\frac{1}{3}\log8+\frac{1}{5}\log32=1+\log2$

γ. $\log_{\alpha\beta}\gamma=\frac{\log_\beta\gamma}{1+\log_\beta\alpha}$, με $\alpha,\beta,\gamma\in R_+$, $\alpha\beta\neq1,\beta\neq1$

6. Να αποδείξετε ότι: $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_7 8=3$

7. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

$$A=\frac{\log_\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}{\log_{\alpha^2}\left(\alpha^2-1\right)}\cdot\frac{\log_{\frac{1}{\alpha}}\sqrt{\alpha^2-1}}{\log_{\sqrt[3]{\alpha}}\sqrt[6]{\alpha^2-1}}$$

$$B=81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 3}+3^{\frac{1}{\log_7 9}}$$

8. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα Sν των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το $\log\alpha$ και δεύτερο το $\log\beta$ είναι:

$$S_\nu = \frac{1}{2}\log\frac{\beta^{\omega(\omega-1)}}{\alpha^{\omega(\omega-3)}}$$

9. Να υπολογίσετε το x, αν είναι: $2(\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9$

3. Λογαριθμικές Εξισώσεις

1. Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $\sigma\upsilon\nu x + e^{-x} = 2$ στο $[0,\pi]$

β. $3^x + 4^x = 5^x$

γ. $10+10^2+10^3+\ldots+10^x = 111111($, αν $x \in {}^*$

2. Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $\log(4x-1) = 2\log 2 + \log(x^2-1)$

β. $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_2 x \cdot \log_{2\sqrt{2}} x \cdot \log_4 x = 54$

γ. $\frac{1}{2}\log(x+2) + \log\sqrt{x-3} = 1 + \log\sqrt{3}$

δ. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

ε. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

στ. $2\cdot 4^x + 3\cdot 9^x = 5\cdot 6^x$

ζ. $\log_3 x \cdot \log_9 x = 2$

η. $2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $x + \log(1+2^x) = x\log 5 + \log 6$

β. $\log_2\left(3^{3x-2}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$

γ. $\ln x+6\log_x e=5$

δ. $\log\left(3^x+2.5^x\right)-x\log 5=\log 39-\log 15$

ε. $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$

στ. $\left(x^2-5x+6\right)^{x^2-2x}=1$

ζ. $(4x)^{\log 2+\log\sqrt{x}}=100$

4. Να λυθεί στο [0, π] η εξίσωση: $4^{\sigma\upsilon\nu 2x}+4^{\sigma\upsilon\nu^2 x}=3$.

4. Λογαριθμικές Ανισώσεις

1. Να λύσετε τις ανισώσεις :

α. $(4x)^{\log 2+\log\sqrt{x}}>100$

β. $e^{2x}+e\geq e^x+e^{x+1}$

γ. $3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}\geq 4^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

δ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(\log x)^2-3\log x+2}>1$

5. Λογαριθμικά Συστήματα

1. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases} y^{\log x}=100 \\ \log(xy)=3 \end{cases}$

β. $\begin{cases} x^{\log y}+y^{\log x}=20 \\ \log\sqrt{xy}=1 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} 3\cdot 2^x-2^{x+y}+2=0 \\ 5\cdot 2^{x+1}-2^{x+y-1}-16=0 \end{cases}$

2. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{matrix} 4^x\cdot 2^{y-2}=32 \\ 3^{x+2}\cdot 3^{y-4}=27 \end{matrix}$

β. $\begin{matrix} 2^x\cdot 3^y=54 \\ 3^x\cdot 2^y=24 \end{matrix}$

γ. $\begin{cases} \log x + \log y = \log 14 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$

ε. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$