ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ 4Ο

Εξισώσεις
και
ανισώσεις
που ανάγονται σε
Πολυωνυμικές

Το

20ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

3. Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Πολλές εξισώσεις, με μια πρώτη ματιά, δεν έχουν πολυωνυμική μορφή. Πολλές ούτε με τη δεύτερη ματιά! Ωστόσο, με απλές αλγεβρικές μεθόδους μπορούμε να τις ανάγουμε σε ισοδύναμες πολυωνυμικές, τις οποίες κατόπιν επιλύουμε σχεδόν με κλειστά τα μάτια, έπειτα από τόσες, απίστευτες ώρες εξάσκησης που έχουμε περάσει για να φτάσουμε σε αυτό το σημείο μαθηματικής ωριμότητας. Τέτοιες εξισώσεις, μπορεί να είναι: κλασματικές, άρρητες, τριγωνομετρικές, κλπ. Ας τις δούμε μία-μία:

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ή ΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Όπως καλά θυμόμαστε, εξισώσεις στις οποίες εμφανίζουν άγνωστο σε παρονομαστή ονομάζονται κλασματικές. Για παράδειγμα:

$$\frac{x}{x-1}-\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{x^2-1}$$

Στην περίπτωση αυτή ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.
2. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π.
3. Βρίσκουμε τους κατάλληλους περιορισμούς, ώστε Ε.Κ.Π. $\neq 0$.
4. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.
5. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
6. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
7. Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση, όπως έχουμε προαναφέρει.
8. Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται.

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το

Σύμφωνα με τους

ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Πρόκειται για εξισώσεις που περιλαμβάνουν τον άγνωστο σε υπόρριζη ποσότητα. Για παράδειγμα:

$$\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$$

Τότε, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Βρίσκουμε τους κατάλληλους περιορισμούς, ώστε οι υπόριζες ποσότητες να είναι μη-αρνητικές (δηλ. ≥ 0).

2. Επειδή, συνήθως, καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε τετραγωνικές ρίζες, υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, ώστε να απαλοιφούν οι ρίζες. Αν για διάφορους λόγους, κάποιες ρίζες εξακολουθούν να «αντιστέκονται», αφού εκτελέσουμε όσες πράξεις είναι δυνατόν να γίνουν, υψώνουμε και πάλι στο τετράγωνο.

3. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

4. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

5. Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση, όπως έχουμε προαναφέρει.

6. Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται.

Σύμφωνα με τους

Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η ! ! !

7. Απαιτείται, οπωσδήποτε, να **επαληθεύουμε** επιπλέον και την αρχική εξίσωση, για καθεμία από τις **δεκτές** ρίζες που βρήκαμε, γιατί συμβαίνει συχνά – εξαιτίας της ύψωσης στο τετράγωνο – να δημιουργούνται λύσεις, που δεν αντιστοιχούν στην αρχική εξίσωση. Έτσι, αν χρειαστεί απορρίπτουμε ακόμα και κάποιες από τις δεκτές ρίζες.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Αν συναντήσουμε τριγωνομετρικές εξισώσεις, οι οποίες κατά τ' άλλα μας θυμίζουν πολυώνυμα, όπως για παράδειγμα:

$$ημ^4x - 2\,ημ^3x - 7\,ημ^2x + 8\,x + 12 = 0$$

τότε, αρκεί να κάνουμε τα εξής:

1. Θέτουμε τον άγνωστο τριγωνομετρικό αριθμό ίσο μια νέα μεταβλητή, έστω y, και κατόπιν λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση, που προκύπτει.

2. Αν ο τριγωνομετρικός αριθμός που αντικαθιστούμε είναι ημίτονο ή συνημίτονο, δεν ξεχνάμε να θέσουμε τους ανάλογους περιορισμούς, εφόσον:

$$-1 \le \etaμx \le 1 \quad \text{και} \quad -1 \le συνx \le 1$$

Αν πρόκειται για εφαπτομένη και συνεφαπτομένη, συνx $\neq 0$ ή ημx $\neq 0$, αντίστοιχα.

3. Λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση.

4. Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται, σύμφωνα με τους περιορισμούς.

5. Ξε–θέτουμε και λύνουμε τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές εξισώσεις που προκύπτουν, από τις δεκτές λύσεις της πολυωνυμικής.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξισώσεις της μορφής $\boldsymbol{α x^4 + β x^3 + γ x^2 + β x + α = 0}$ $(α \neq 0)$ ανήκουν σε μια ειδική κατηγορία πολυωνυμικών εξισώσεων, που ονομάζονται **αντίστροφες**. Για παράδειγμα:

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι το 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, άρα:

1. Διαιρούμε όλους τους όρους με x^2.

2. Ομαδοποιούμε τα ζεύγη με x, $\frac{1}{x}$ και x^2, $\frac{1}{x^2}$.

3. Βγάζουμε κοινό παράγοντα, αν υπάρχει, από κάθε ζεύγος.

4. Θέτουμε $x + \frac{1}{x} = y$ και $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.*

* Γιατί: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \overset{x+\frac{1}{x}=y}{\Leftrightarrow} y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

5. Λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση.

6. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $x + \frac{1}{x} = y$, όπου είχαμε θέσει αρχικά, και για κάθε λύση της πολυωνυμικής βρίσκουμε και μια αντίστοιχη λύση για το x.

5. Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

* **1.** Να λύσετε τις εξισώσεις και ανισώσεις:

α. $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$ **β.** $2y^4 - 7y^2 - 4 \geq 0$

γ. $3t^4 + 5t^2 + 2 = 0$ **δ.** $\varphi^4 + 9\varphi^2 + 24 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

β. $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$

γ. $(\omega^2 - 3\omega + 1)^2 - 10(\omega^2 - 3\omega - 3) - 51 = 0$

δ. $(x + 2)^8 - 3(x + 2)^4 - 4 = 0$

ε. $(x^3 - 11x + 12)^4 - 3(x^3 - 11x + 12)^2 - 4 = 0$

στ. $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + 6 = 0$

3. Δίνεται η εξίσωση: $x^5 + x^4 + \kappa x + \lambda = 0$. Να προσδιοριστούν οι κ, λ ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα το -1 με πολλαπλότητα 2 (διπλή ρίζα). Μετά να βρεθούν και οι άλλες ρίζες της εξίσωσης.

4. Να δειχθεί ότι η εξίσωση: $x^3 - 12x + 1 = 0$ έχει 3 διαφορετικές ρίζες, ακριβώς μία σε καθένα από τα διαστήματα: $(-4, -3)$, $(0, 1)$, $(3, 4)$.

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{3}{x^2-1}$ **β.** $\dfrac{x^2+2x-4}{x-2} = x^2$

γ. $\dfrac{x^3+2}{x+1} + \dfrac{2-x}{x-1} = \dfrac{2x+1-x^2}{x^2-1}$ **δ.** $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{3}{x^2-x-2}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις και ανισώσεις:

α. $\dfrac{x^2+2x-4}{x-2} < 1$ **β.** $\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{4}{x-1} \leq \dfrac{2}{x^2-1}$

γ. $\dfrac{6}{2x-1}-\dfrac{5}{2x+1}=\dfrac{1-8x}{1-4x^2}$ **δ.** $\dfrac{3x^2-1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-x}>\dfrac{x^2-3x+2}{x}$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(2ημx-1)^4+6(2ημx-1)^2-7=0$

β. $2\,ημ^3x+5\,ημ^2x+5\,ημx+2=0$

γ. $2\,συν^4x-5\,συν^3x+5\,συνx-2=0$

δ. $2\,συν^4x+17\,συν^2x-9=0$

ε. $2\,ημ^3x-3\,ημ^2x-3\,ημx+2=0$

8. Να βρείτε το $α\in[0,\dfrac{π}{2})$ ώστε το $x+1$ να είναι παράγοντας του:

$$P(x)=x^4-(ημ3α)\,x^3+(2ημ2α)\,x^2-(ημα)\,x-1.$$

Στη συνέχεια για την τιμή του α που θα βρείτε υπολογίστε το πηλίκο της διαίρεσης: $P(x):(x+1)$.

* **9.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $1+\sqrt{x}=\sqrt{3(x-1)}$ **β.** $\sqrt[3]{5φ-7}=φ-1$

γ. $\sqrt{3y+1}+\sqrt{y-1}=\sqrt{7y+1}$ **δ.** $t^2-6t-2\sqrt{t^2-6t+2}=1$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x+\sqrt{5x+10}=8$ **β.** $\sqrt{x}-2=\sqrt{x+1}$

γ. $\sqrt{x-8}=2+x$ **δ.** $\sqrt{x}+\sqrt{x+32}=16$

ε. $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\sqrt{x-1}-1=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ **β.** $\dfrac{4-\sqrt{x}}{2}=\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}$

γ. $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{3+\sqrt{2-x}}=2$ **δ.** $\sqrt{-x-1}-1=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-x}}$

ε. $\sqrt{2x^2-7x+4}=\sqrt{x^2+3x-5}$

11. Να λυθεί η εξίσωση: $x+\sqrt{x^2-x+\lambda^2+1}=\lambda$

12. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $\sqrt{3x+7}<\sqrt{x+3}$ **β.** $x-1\geq\sqrt{x+5}$

γ. $\sqrt{x^2+x+3}\geq x+\frac{1}{2}$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

β. $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$

γ. $2x^4-3x^3-4x^2+3x+2=0$

δ. $2x^5-13x^4-61x^3-61x^2-13x+2=0$