ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 2^{O}

Διαίρεση

Πολυωνύμων

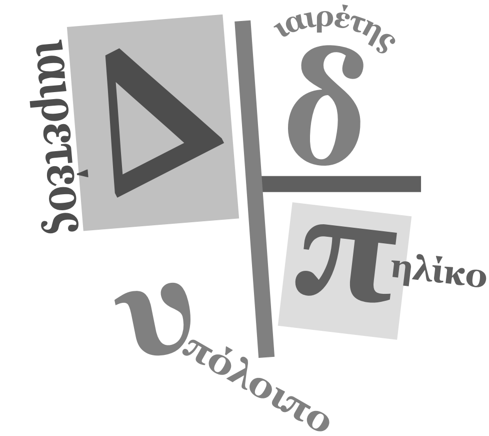
Το

18ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Διαίρεση πολυωνύμων



Όπως είναι γνωστό, κατά την ολοκλήρωση του αλγόριθμου της ευκλείδειας διαίρεσης, τα τέσσερα μεγέθη: **Διαιρετέος**, **διαιρέτης**, **πηλίκο** και **υπόλοιπο**, συνδέονται μεταξύ τους με την παρακάτω ταυτότητα:

$$\Delta = \delta \bullet \pi + \upsilon$$

$$\text{με } 0 \leq \upsilon < \delta$$

Η ταυτότητα ετούτη μπορεί να εκφραστεί, επίσης, και ως εξής:

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών Δ και δ (δ ≠ 0), υπάρχουν δύο μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π και υ, τέτοιοι ώστε να ισχύει:

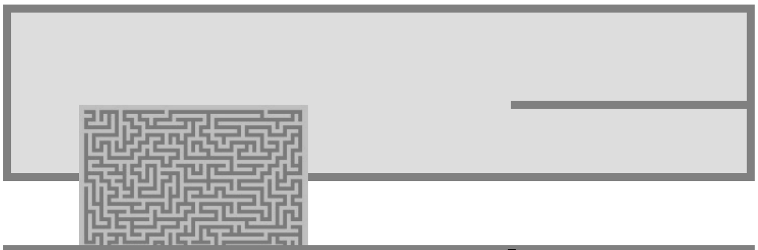
Με την ίδια λογική μπορούμε να εκφράσουμε και την έννοια της διαίρεσης πολυωνύμων, δηλ.

βαθμός(υ) < βαθμός(δ)

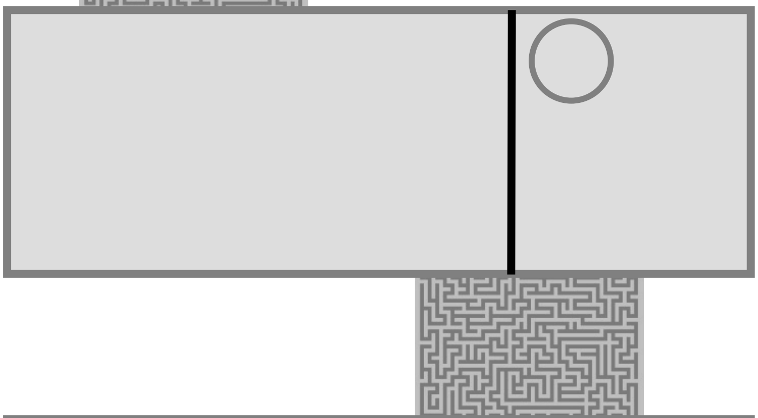
Για να διαιρέσουμε, λοιπόν, δύο πολυώνυμα ακολουθούμε μια αλγοριθμική διαδικασία αντίστοιχη με αυτή της διαίρεσης φυσικών αριθμών:

Παράδειγμα Να γίνει η διαίρεση $(2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2) : (x^2 + x)$

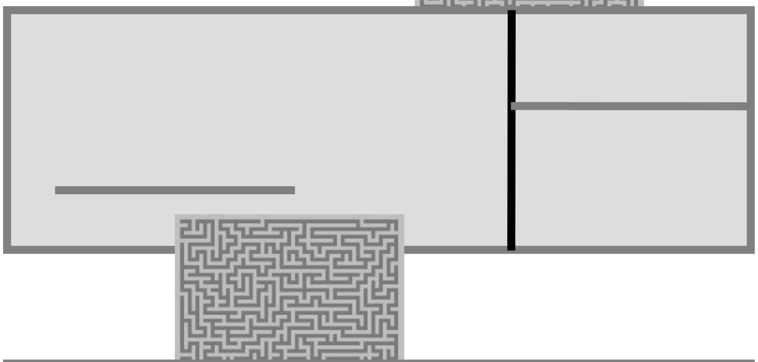
Γράφουμε το γνωστό σχήμα της διαίρεσης



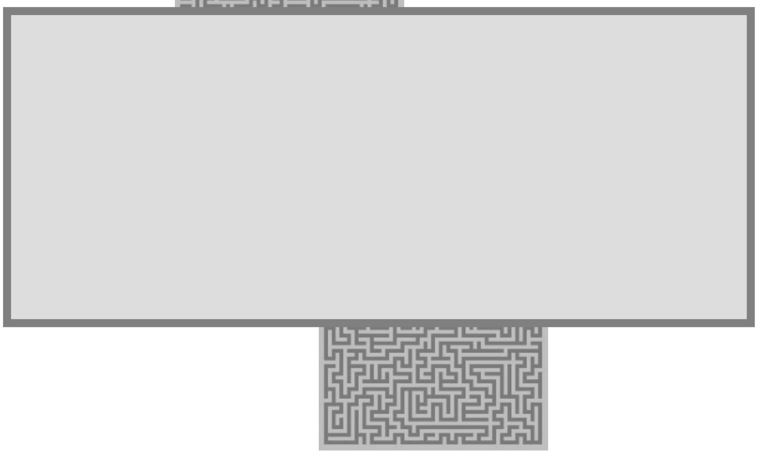
Διαιρούμε το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρετέου με το μεγιστοβάθμιο όρο του διαιρέτη. Έτσι υπολογίζουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου. Άρα: $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$.



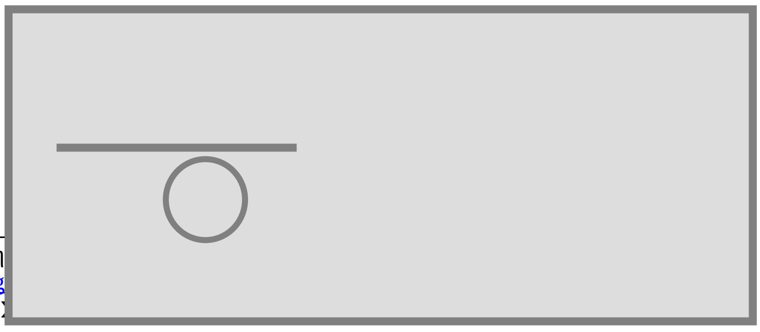
Πολλαπλασιάζουμε τον όρο που βρήκαμε στο πηλίκο με κάθε όρο του διαιρέτη (κάνουμε δηλαδή επιμεριστική ιδιότητα).



Τοποθετούμε το αποτέλεσμα κάτω απ' το Διαιρετέο, αλλά **με αντίθετα πρόσημα** (επειδή εννοείται ότι αφαιρούμε το αποτέλεσμα από το Διαιρετέο). Προσέχουμε κάθε όρος να βρίσκεται ακριβώς κάτω απ' τον αντίστοιχο (ομοιοβάθμιο) όρο του Διαιρετέου.



Εκτελούμε την πρόσθεση. Οι αντίθετοι όροι διαγράφονται. Έπειτα «κατεβάζουμε» και τους



υπόλοιπους όρους του Διαιρετέου.

Συνεχίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο, έως ότου ο βαθμός του υπολοίπου γίνει μικρότερος από εκείνον του διαιρέτη. Τότε η διαίρεση σταματάει.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 & x^2 + x \\ \hline
-\,2x^4 - 2x^3 \qquad\qquad\qquad & 2x^2 + x \\
x^3 - x^2 + 5x - 2 & \\
-\,\mathbf{x^3 - x^2} \qquad\qquad & \\
\mathbf{+\,5x - 2} &
\end{array}
$$

Άρα, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης θα γράφεται:

$$\underbrace{\mathbf{2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2}}_{\Delta(x)} = \underbrace{\mathbf{(\,x^2 + x\,)}}_{\delta(x)}\cdot\underbrace{\mathbf{(\,2x^2 + x - 2\,)}}_{\pi(x)} + \underbrace{\mathbf{7x - 2}}_{}$$

υ(x)

1η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση, που «λείπουν» κάποιοι όροι από τον Διαιρετέο (δηλαδή, κάποιες δυνάμεις του x), τότε είναι προτιμότερο να τους συμπληρώνουμε με μηδενικούς συντελεστές.

Παράδειγμα: Να γίνει η διαίρεση $(2x^4 - x^2 - 2) : (x^2 + x)$

Γράφουμε:

$$2x^4 + \mathbf{0}\mathbf{x}^3 - x^2 + \mathbf{0}\mathbf{x} - 2 \quad \left| \underline{\; x^2 + x \;} \right.$$

2η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όπως είναι γνωστό, αν το υπόλοιπο της διαίρεσης βγαίνει μηδέν (**υ** = **0**) τότε λέμε ότι η διαίρεση είναι **τέλεια**. Θα λέμε ακόμη ότι «το πολυώνυμο δ(x) **είναι παράγοντας** του Δ(x)» ή ότι «το δ(x) διαιρεί το Δ(x)».

Επειδή η ταυτότητα της διαίρεσης θα γράφεται, προφανώς:

$$\mathbf{\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)}$$

είναι φανερό ότι, στην περίπτωση αυτή, έχουμε καταφέρει μιας μορφής παραγοντοποίηση για το πολυώνυμο Δ(x).

Διαίρεση πολυωνύμου με x – ρ

Όταν η διαίρεση που καλούμαστε να εκτελέσουμε έχει ως διαιρέτη ένα πολυώνυμο της μορφής **x – ρ**, όπου ρ κάποιος πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχουν δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα:

ΕΩΡΗ

1η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Επειδή ο διαιρέτης x – ρ είναι 1ου βαθμού εννοείται ότι το υπόλοιπο θα είναι ένα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού ή το μηδενικό πολυώνυμο. Με άλλα λόγια, θα είναι απλά ένας πραγματικός αριθμός.

2η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όσον αφορά στον πραγματικό ρ, χρειάζεται να προσέξουμε το εξής: αν έχουμε το πολυώνυμο πχ. x – 3 τότε προφανώς το ρ = 3. Αν όμως το πολυώνυμο είναι της μορφής πχ. x + 2 τότε είναι:

$$x + 2 = x - (-2), \text{ δηλαδή } \rho = -2.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

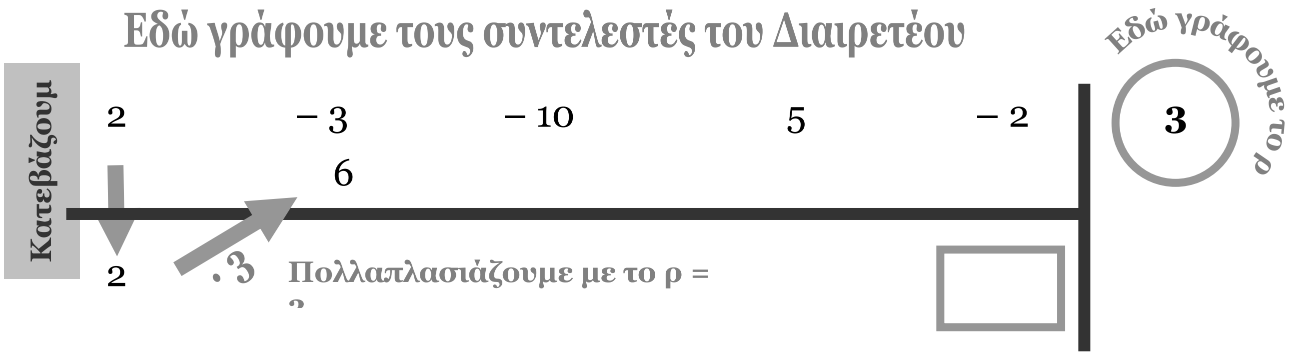
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

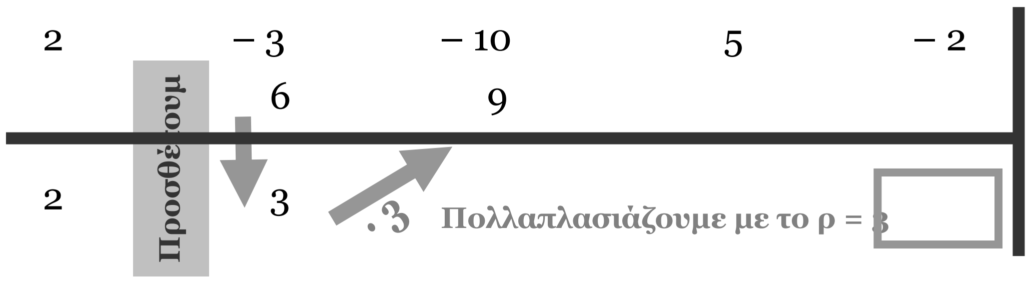
Πρέπει να θυμόμαστε ότι εκφράσεις της μορφής «*αν και μόνο αν*», «*τότε και μόνο τότε*» υποννοούν μια σχέση ισοδυναμίας ($\Leftrightarrow$). Συνεπώς, όταν καλούμαστε να αποδείξουμε μια παρόμοια σχέση $A \Leftrightarrow B$, χρειάζεται να αποδεικνύουμε και το **ευθύ** ($A \Rightarrow B$) και το **αντίστροφο** ($B \Rightarrow A$).

Σχήμα Horner

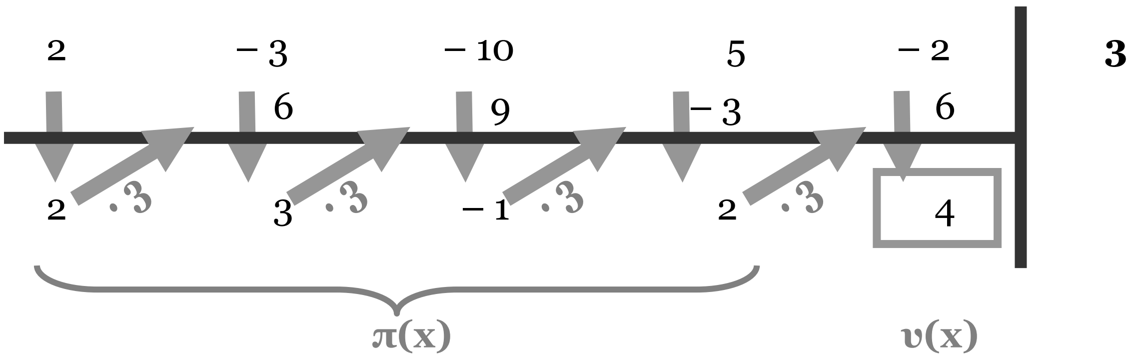
Προκειμένου, τώρα, να υπολογίσουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x – ρ, αντί να εφαρμόσουμε τον κλασικό αλγόριθμο της διαίρεσης πολυωνύμων, εφαρμόζουμε έναν άλλον αλγόριθμο, πολύ συντομότερο και απλούστερο. Ο αλγόριθμος αυτός ονομάζεται **σχήμα Horner** και έχει ως εξής:

Παράδειγμα Να γίνει η διαίρεση $(2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 5x - 2) : (x - 3)$





Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο εξής σχήμα:

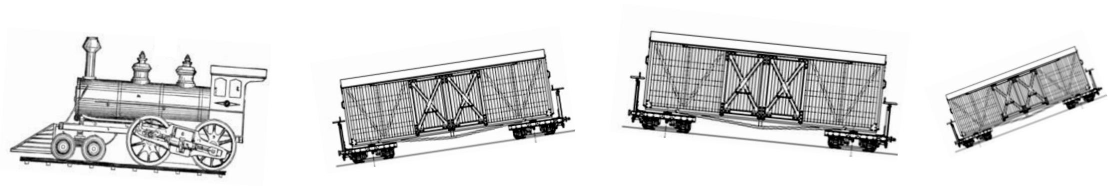


Το τελευταίο άθροισμα που βρήκαμε (στο πλαίσιο) είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, δηλαδή **υ = 4**. Τα υπόλοιπα επί μέρους αθροίσματα (2, 3, –1, 2) αποτελούν τους συντελεστές του πηλίκου. Προφανώς, αφού διαιρέσαμε με το $x - 3$ που είναι πρώτου βαθμού, το πηλίκο θα είναι ένα πολυώνυμο κατά ένα βαθμό μικρότερο από το Διαιρετέο. Άρα ο πρώτος όρος θα είναι ο x^3, ο δεύτερος ο x^2 κτλ. δηλαδή θα έχουμε :

$$\pi(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Γράφουμε τελικά:

$$\underbrace{2x^4-3x^3-10x^2+5x-2}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x-3)}_{\delta(x)}\cdot\underbrace{(x^3+3x^2-x+2)}_{\pi(x)} + \underbrace{4}_{\upsilon(x)}$$



2. Διαίρεση πολυωνύμων

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α. $(2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1)$

β. $(x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5)$

γ. $(3x^3 - 4\alpha x + \alpha^2) : (x - 2\alpha)$

δ. $[7x^3 - (9\alpha + 7\alpha^2)x + 9\alpha^2] : (x - \alpha)$

2. Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.

3. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + \kappa x + \lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.

4. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x) : (x - 1)$ και $P(x) : (x + 1)$ είναι αντίστοιχα 3 και 1 να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$P(x) : (x - 1)\cdot(x + 1)$$

5. Το πολυώνυμο: $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 - 18x^2 + 15x - 5$ διαιρούμενο με το: $g(x) = x^2 - 3x + 2$ δίνει υπόλοιπο: $\upsilon(x) = 4x + 7$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in$.

3. Διαίρεση πολυωνύμου με x – ρ

1. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και εάν επιπλέον $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα α, β.

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$. Αν το $P(x)$ διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in$.

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 - (\alpha + \beta)x + 6$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in$ αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 + x - 2$.

4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^2 + 2(\lambda^2 - 3\lambda + 1)x - 3(4\lambda + 1)$. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ είναι ανεξάρτητο του λ.

5. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-5$, τότε το πολυώνυμο $P(2x-3)$ έχει παράγοντα το $x-4$.

6. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α. $(x^3-2x^2+5x-6):(x-2)$

β. $(2x^5-x^4+6x^2+3):(x+1)$

γ. $[\,6x^3-(\,2\alpha+6\alpha^2\,)\,x+3\alpha^2\,]:(x-\alpha)$, $\alpha \in$

δ. $(x^6-4x^3+x^2-2):(2x-1)$

ε. $(x^5-\frac{1}{\lambda^2}x^3+\lambda x^2-2):(\lambda x+1)$, $\lambda \in$ *

7. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο:

$P(x)=x^3-\kappa x^2+(\lambda-1)\,x+5$

να έχει για παράγοντα το: $(x-1)\,(x+2)$.

8. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο:

$P(x)=x^3-x^2-(3+\alpha)\,x+\beta+10$

να έχει παράγοντα το: $(x-2)^2$.

9. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το $(x+1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου: $P(x)=x^3-\alpha x^2+(\alpha+\beta)\,x-1$.

10. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x+3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το: $(x-2)\,(x+3)$.

11. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x+2$ αφήνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με x^2-4x+3 αφήνει υπόλοιπο $2x+7$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης: $P(x):(x+2)\,(x^2-4x+3)$.

12. Αν το πολυώνυμο: $P(x)=\alpha x^{\nu+1}+\beta x^{\nu}+1$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$ αποδείξτε ότι το πολυώνυμο: $Q(x)=(\nu+1)\,\alpha x^{\nu}+\nu\beta x^{\nu-1}$ έχει παράγοντα το $x-1$.

13. Αν το πολυώνυμο: $P(x)=(\nu+1)\,x^{\nu}-\nu x^{\nu+1}+\alpha$ διαιρείται με το $x-1$, τότε αποδείξτε ότι διαιρείται και με το $(x-1)^2$.

14. Να βρείτε το $\mu \in$ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του:

$$P(x) = 8\mu x^3 + (\mu - 1)x + 3$$

με το $(2x + 1)$ να είναι το 5 .

15. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε να ισχύει: $P(0) = P(1) = 2004$. Να αποδείξετε ότι: $P(x) = x(x-1)\cdot\pi(x) + 2004$.