



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑ §4.1
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Μάθημα: ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τίτλος μαθήματος(ενότητας): Μαθηματική Επαγωγή

Ημερομηνία: 22-3-2019

Τάξη: Β΄ Λυκείου

Σχολείο: Γενικό Λύκειο Βόλου

Ωρα: 1^η

Τμήμα: Β₁ (15 μαθητές)

ΓΕΝΙΚΟΙ ΣΚΟΠΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Να μπορούν οι μαθητές στο τέλος του μαθήματος να

- Ξεχωρίζουν ποια κωνική τομή παριστάνει η εξίσωση $Ax^2+Bψ^2+Γχ+Δψ+E = 0$
- γνωρίζουν την παράλληλη μεταφορά των αξόνων
- Επίσης να είναι ικανοί να βρίσκουν την σχετική θέση ευθείας και κωνικής

ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Να είναι σε θέση στο τέλος του μαθήματος οι μαθητές να

- 1) Βρίσκουν την εξίσωση της κωνικής.
- 2) Υπολογίζουν τις εστίες E' , και E , την εστιακή απόσταση, τον μεγάλο άξονα, τον μικρό άξονα, την εκκεντρότητα.

ΜΕΣΑ: Πίνακας, κιμωλίες ή μαρκαδόροι, Η/Υ, φωτοτυπίες.

ΥΛΙΚΑ: CD, σλάιντς, σχολικό βιβλίο και ανακλαστικός πίνακας.

ΥΛΗ: Σχολικό βιβλίο – σελίδες 19- 23.

Κριτήρια Υπουργείου.

ΜΕΘΟΔΟΣ: Διερευνητική καθοδηγούμενη ανακάλυψη.

**A. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ - ΜΑΘΗΣΙΑΚΗ ΠΟΡΕΙΑ
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ**

Με κατάλληλες ερωτήσεις ερευνούμε αν οι μαθητές κατέχουν προηγούμενες γνώσεις από την εμπειρία τους όπως στην τριγωνομετρία

**B. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΥΛΙΚΟΥ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ-ΑΝΑΛΥΣΗ
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ (Παράδοση)****ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο****A. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ****α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας**

Ερώτηση 1^η : Πως διατυπώνεται η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής;

Ερώτηση 2^η : Ποια είναι η Ανισότητα του Bernoulli;

Ερώτηση 3^η : Πότε καθιερώθηκαν οι όροι ‘ μαθηματική επαγωγή ’ ή ‘ τέλεια επαγωγή ’ ;

**B. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ
ΕΝΟΤΗΤΑ**

α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

1. Ασκηση 1ι) Σελίδα 139

2. Ασκηση 1ιι) Σελίδα 139

3. Ασκηση 1ιιι) Σελίδα 139

4. Ασκηση 1ιiv) Σελίδα 139

5. Ασκηση 2) Σελίδα 139

β) Συμπληρωματικά παραδείγματα και εφαρμογές.

6. Άσκηση 1 Σελίδα 140

7. Άσκηση 2 Σελίδα 140

8. Άσκηση 3 Σελίδα 140

9. Άσκηση 3ι) Σελίδα 140

10. Άσκηση 3ιι) Σελίδα 140

11. Άσκηση 3ιιι) Σελίδα 140

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Η μαθηματική επαγωγή
αποτελείται από δύο βήματα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Υπάρχουν περιπτώσεις να ισχύει το
 1° βήμα και να μην ισχύει το 2° ;
Δώστε ένα παράδειγμα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Ανέφερε ένα πρακτικό παράδειγμα
για την μαθηματική επαγωγή.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Η μαθηματική επαγωγή ισχύει για
κάθε n θετικό ακέραιο;

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

Η μαθηματική επαγωγή ισχύει μόνο για ισότητες.

2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
Τέλεια επαγωγή	Φυσικές επιστήμες
Ατελής επαγωγή	Ψευδής πρόταση
Κάθε αριθμός $\alpha = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$ είναι άρτιος	Μαθηματικές επιστήμες
Κάθε αριθμός $\alpha = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$ είναι άρτιος	Αληθής πρόταση

Συμπληρώστε τις προτάσεις που ακολουθούν:

α) Οι όροι ‘ μαθηματική επαγωγή’ ή ‘επαγωγή’ καθιερώθηκαν στη διάρκεια του αιώνα με τις εργασίες των Α. και R.....

β) Η ανισότητα του Bernoulli είναι η

Διαγράψτε αυτά που έρχονται σε αντίθεση με τα δεδομένα.

Τα βήματα της μαθηματικής επαγωγής είναι

α) Για $n = 1$ Για $n = \kappa$ Για $n = \kappa+1$

β) Για $n = 3$ Για $n = \kappa+1$ Για $n = \kappa$

γ). Για $n = 0$ Για $n = \kappa+2$ Για $n = \kappa+1$

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Η μαθηματική επαγωγή διατυπώθηκε με σαφήνεια το 1654 από τον

Α Blaise Pascal

Β Francesco Maurolico

Γ A. De Morgan

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Το άθροισμα $1+3+5+\dots+(2n-1)$ ισούται με

Α $(n+1)(n-1)$

Β $2n+5$

Γ n^2

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Η ανισότητα του Bernoulli $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$ ισχύει για κάθε

Α Ακέραιο θετικό

Β $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Γ Πραγματικό αριθμό.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Για να δείξουμε ότι $2^n > 2n + 1$ για κάθε $n \geq 3$ τότε το πρώτο βήμα είναι για

Α $n = 1$

Β $n = 2$

Γ $n = 3$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Η ισότητα $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$ ισχύει

Α Για κάθε $n > 2$

Β Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Γ Για $n \in \mathbb{Z}$.

4. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε..... με όταν...

Ερώτηση α)

..... ισχύει η μαθηματική επαγωγή;

Ερώτηση β)

..... ο Φραντσέσκο Μαουρόλικο απέδειξε ότι:
 $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$;

Ερώτηση γ)

..... καθιερώθηκε η μαθηματική επαγωγή;

Ερώτηση δ)

..... ισχύει η ανισότητα του Bernoulli $(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$;

Ερώτηση ε)

..... ολοκληρώνεται η απόδειξη με τη μέθοδο της Μαθηματικής επαγωγής;

5.ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Διατυπώσεις των θεμάτων.

12. Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n , οι όροι της ακολουθίας $a_n = n^2 + n$ είναι πολλαπλάσια του 2 .

13. Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n , οι όροι της ακολουθίας

$a_n = n^3 + 3n^2 + n$ είναι πολλαπλάσια του 3 .

14. Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n , οι όροι της ακολουθίας $a_n = 2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ είναι πολλαπλάσια του 5 .

15. Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n , ισχύει $2^n \geq n + 1$.

6.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. * Παρατηρούμε ότι: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$ $1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$

Ποιο νομίζετε ότι θα είναι το άθροισμα $1 + 2 + 3 + \dots + n$; Αποδείξτε την ισότητα που συμπεράνατε με επαγωγή.

2. * Μετράμε τον αριθμό των διαγωνίων μερικών πολυγώνων:

Αριθμός πλευρών	Αριθμός διαγωνίων
τετράπλευρο ($n = 4$)	$2 = \frac{4(4-3)}{2}$
πεντάγωνο ($n = 5$)	$5 = \frac{5(5-3)}{2}$
εξάγωνο ($n = 6$)	$9 = \frac{6(6-3)}{2}$
επτάγωνο ($n = 7$)	$14 = \frac{7(7-3)}{2}$

Ποιος νομίζετε ότι θα είναι ο αριθμός των διαγωνίων ενός πολυγώνου με n πλευρές; Να αποδειχθεί η σχέση που συμπεράνατε με μαθηματική επαγωγή.

3. * Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $n \in \mathbb{N}^*$ για την οποία ισχύει η σχέση $2^n > n^2$. Στη συνέχεια να αποδειχθεί η σχέση για κάθε n μεγαλύτερο ή ίσο από την τιμή που βρέθηκε.

4. * Να διαπιστώσετε ότι ο αριθμός $2^{4v} - 1$ για $v = 1, 2, 3, 4$ είναι πολλαπλάσιο του 15. Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι $2^{4v} - 1 = \text{πολ}15, v \in \mathbb{N}^*$. Υπάρχει άλλος τρόπος απόδειξης;
5. ** Αν a, β ακέραιοι δείξτε ότι $(a + \beta)^v = a^v + \lambda\beta, \lambda \in \mathbb{Z}$ και $v \in \mathbb{N}^*$.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΠΙΤΕΥΞΗΣ ΣΤΟΧΩΝ

Ζητείται από κάθε μαθητή χωριστά να γράψουν την εξίσωση

- του κύκλου
- της παραβολής
- της έλλειψης και
- της υπερβολής .

Να επιλύσουν την άσκηση 1ι) σχολικού βιβλίου σελίδα 129

2ι) σχολικού βιβλίου σελίδα 129.

Εδώ είμαστε αμέτοχοι και ελέγχουμε τους μαθητές μας, διορθώνοντας τον καθένα χωριστά σε τυχόντα λάθη του.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΚΛΕΙΣΙΜΑΤΟΣ

Σε χρόνο 2-3 λεπτών

- A) λέμε έναν αστείο συνειρμό ή
B) σχολιάζουμε μια επίκαιρη ευχάριστη είδηση ή
Γ) κάνουμε προβολή ενός βίντεο.

ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

- 1) Άσκηση 12,3,4,5 σχολικού βιβλίου σελίδες 129.
2) Οι ασκήσεις του φύλλου εργασίας που δεν αναπτύχθηκαν.