ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

Μεθοδολογία

3 ο Κεφάλαιο

M_{22}: Για να δείξουμε ότι ένας μεταβλητός κύκλος διέρχεται από ένα ή δύο σταθερά σημεία , αρκεί να πάρουμε την εξίσωση του κύκλου να επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σταθερού σημείου Ρ(χο,ψο) για κάθε τιμή της παραμέτρου που υπάρχει στην εξίσωση του κύκλου, οπότε φτάνουμε σε μηδενικό πολυώνυμο που από τον μηδενισμό των συντελεστών του , έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2+y^2+(\lambda^2-1)x+(2\lambda-3)y+\frac{1}{4}(\lambda^2-14\lambda+\frac{15}{2})=0$$

παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματική τιμή του λ. Επίσης να αποδείξετε ότι ο κύκλος διέρχεται από ένα σταθερό σημείο, του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.

Επίλυση

Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ και είναι

$$A^2+B^2-4\Gamma=(\lambda^2-1)^2+(2\lambda-3)^2-(\lambda^2-14\lambda+\frac{15}{2})=\lambda^4+\lambda^2+2\lambda+\frac{5}{2}=$$

$$=\lambda^4+(\lambda^2+2\lambda+1)+\frac{3}{2}=\lambda^4+(\lambda+1)^2+\frac{3}{2}>0 \text{ για κάθε } \lambda\in IR.$$

Άρα παριστάνει κύκλο.

Η εξίσωση του κύκλου γράφεται

$$x^2+y^2+\lambda^2x-x+2\lambda y-3y+\frac{1}{4}\lambda^2-\frac{7}{2}\lambda+\frac{15}{8}=0$$

$$\text{ή } (x^2+y^2-x-3y+\frac{15}{8})+\lambda(2y-\frac{7}{2})+\lambda^2(x+\frac{1}{4})=0 \quad (1)$$

Για να διέρχεται ο κύκλος από σταθερό σημείο, θα πρέπει να υπάρχουν τιμές των x και y για τις οποίες η (1) αληθεύει για κάθε $\lambda\in IR$.

Αυτό συμβαίνει όταν είναι συμβιβαστό το σύστημα

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-3y+\frac{15}{8}=0 & (2) \\ 2y-\frac{7}{2}=0 & (3) \\ x+\frac{1}{4}=0 & (4) \end{cases}$$

Οι (3) και (4) δίνουν y=$\frac{7}{4}$ και x=-$\frac{1}{4}$. Οι τιμές x=-$\frac{1}{4}$ και y=$\frac{7}{4}$ εύκολα διαπιστώνουμε ότι επαληθεύουν και τη (2).

Άρα ο κύκλος διέρχεται από το σταθερό σημείο Μ(-$\frac{1}{4}$,$\frac{7}{4}$).

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2+y^2+2λx+6λy=1$$

παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματική τιμή του λ. Επίσης να αποδείξετε ότι ο κύκλος διέρχεται από ένα σταθερό σημείο, του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.

M_{23}: Συχνά στις κωνικές τομές έχουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης εφαπτομένης .
Αν θέλουμε να βρούμε την εξίσωση εφαπτομένης ε ενός κύκλου C(με γνωστή εξίσωση) και έτσι ώστε η ε να ικανοποιεί κάποια προϋπόθεση, τότε εργαζόμαστε όπως παρακάτω:
Έστω Α($χ_1$,$ψ_1$) το σημείο επαφής της ε με τον C , οπότε γράφουμε την εξίσωση της ε και πρέπει να προσδιορίσουμε τα $χ_1$ και $ψ_1$.
Οι συντεταγμένες του Α πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση του C, οπότε προκύπτει εξίσωση (1).
Από την προϋπόθεση που έχουμε για την ε (π.χ. παράλληλη ή κάθετη σε ευθεία δ, διέρχεται από κάποιο σημείο) προκύπτει εξίσωση (2).
Το σύστημα (1) και (2) δίνει τις τιμές των $χ_1$ και $ψ_1$.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω τα σημεία Α(2,9) και Κ(1,2). Από το Α(2,9) φέρνουμε ευθεία ΑΜ παράλληλη στην ε: 3x-4y=0, η οποία εφάπτεται στο σημείο Μ ενός κύκλου με κέντρο το Κ(1,2). Να βρείτε την εξίσωση της ΑΜ και την εξίσωση του κύκλου.

<u>Επίλυση</u>

- Βρίσκουμε την εξίσωση της ΑΜ. Επειδή η ΑΜ είναι παράλληλη στην ευθεία ε: 3x-4y=0, θα έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με αυτή, δηλαδή $\lambda=\frac{3}{4}$. Επίσης αφού διέρχεται από το σημείο Α(2,9) θα έχει εξίσωση: $y-9=\frac{3}{4}(x-2) \Leftrightarrow 4y-3x-30=0$.
- Ο κύκλος θα έχει εξίσωση της μορφής: $(x-1)^2+(y-2)^2=\rho^2$ με άγνωστο την ακτίνα ρ. Παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων της εφαπτομένης ΑΜ και του κύκλου

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=\rho^2 & (1)\\ 4y-3x-30=0 & (2)\end{cases}$$

Λύνοντας τη (2) ως προς y και αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει η εξίσωση

$$25x^2+100x+500-16\rho^2=0$$

Η εξίσωση αυτή πρέπει να έχει μια διπλή ρίζα, δηλαδή η διακρίνουσα της πρέπει να είναι μηδέν, οπότε έχουμε $\Delta=100^2-4.25(500-16\rho^2)=0$, από όπου ρ=5.
Συνεπώς η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

Εφαρμογή για τον μαθητή

Από το Α(5,6) φέρνουμε ευθεία ΑΜ παράλληλη στην ε: x-4y=0, η οποία εφάπτεται στο σημείο Μ ενός κύκλου με κέντρο το Κ(2,1). Να βρείτε την εξίσωση της ΑΜ και την εξίσωση του κύκλου.

M_{24}: Για να βρούμε την κοινή χορδή δύο κύκλων C_1, C_2
α) Επιλύουμε το σύστημα C_1 C_2 και βρίσκουμε τα σημεία τομής τους $A(\chi_1, \psi_1)$, $B(\chi_2, \psi_2)$
β) Παίρνουμε τον τύπο $\psi-\psi_1=\frac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1}(\chi-\chi_1)$
γ) Συμπεραίνουμε για την ζητούμενη εξίσωση

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι

$$C_1: (x-1)^2+(y+5)^2=50 \text{ και } C_2: (x+1)^2+(y+1)^2=10$$

τέμνονται και να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους.

Επίλυση

Ι. Ο C_1 έχει κέντρο $K_1(1,-5)$ και ακτίνα $\rho_1=\sqrt{50}$, ενώ ο C_2 έχει κέντρο $K_2(-1,-1)$ και ακτίνα $\rho_2=\sqrt{10}$.
Έχουμε $d(K_1,K_2)=\sqrt{(1+1)^2+(-5+1)^2}=\sqrt{20}$ και $\sqrt{50}-\sqrt{10}<\sqrt{20}<\sqrt{50}+\sqrt{10}$, δηλαδή $\rho_1-\rho_2<d(K_1,K_2)<\rho_1+\rho_2$
Άρα οι C_1, C_2 τέμνονται σε δύο σημεία Α και Β.

ΙΙ. Οι συντεταγμένες των Α και Β επαληθεύουν τις εξισώσεις

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+5)^2=50\\ (x+1)^2+(y+1)^2=10\end{cases} \text{ και } \begin{cases}x^2+y^2-2x+10y-24=0 & (1)\\ x^2+y^2+2x+2y-8=0 & (2)\end{cases}$$

Άρα θα επαληθεύουν και την εξίσωση που προκύπτει από τις (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη, δηλαδή την $-4x+8y-16=0$ ή $x-2y+4=0$. Η εξίσωση όμως $x-2y+4=0$ παριστάνει ευθεία και επομένως είναι η εξίσωση της κοινής χορδής ΑΒ.

Εφαρμογή για τον μαθητή

Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι

$$C_1: (x-1)^2+(y-2)^2=4 \text{ και } C_2: (x-2)^2+(y-1)^2=4$$

τέμνονται και να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους.

M_{25}: Για να αποδείξουμε ότι ένας κύκλος C: $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ (1) όπου Α,Β,Γ παραστάσεις με παράμετρο λ διέρχεται από σταθερό σημείο

α) Μετασχηματίζουμε την (1) στη μορφή $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma=0$ η οποία αληθεύει για κάθε $\lambda\in IR$ όταν $\alpha=\beta=\gamma=0$ (2)

β) Επιλύουμε το σύστημα (2) ως προς x, y

γ) Συμπεραίνουμε ότι το Μ(x, y) είναι το ζητούμενο σημείο.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου

$$x^2+y^2+(\lambda^2-1)x+(2\lambda-3)y+\frac{1}{4}(\lambda^2-14\lambda+\frac{15}{2})=0$$

διέρχεται από ένα σταθερό σημείο, του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.

Επίλυση

Η εξίσωση του κύκλου γράφεται

$$x^2+y^2+\lambda^2x-x+2\lambda y-3y+\frac{1}{4}\lambda^2-\frac{7}{2}\lambda+\frac{15}{8}=0$$

$$\text{ή } (x^2+y^2-x-3y+\frac{15}{8})+\lambda(2y-\frac{7}{2})+\lambda^2(x+\frac{1}{4})=0 \quad (1)$$

Για να διέρχεται ο κύκλος από σταθερό σημείο, θα πρέπει να υπάρχουν τιμές των x και y για τις οποίες η (1) αληθεύει για κάθε $\lambda\in IR$.

Αυτό συμβαίνει όταν είναι συμβιβαστό το σύστημα

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-3y+\frac{15}{8}=0 & (2) \\ 2y-\frac{7}{2}=0 & (3) \\ x+\frac{1}{4}=0 & (4) \end{cases}$$

Οι (3) και (4) δίνουν $y=\frac{7}{4}$ και $x=-\frac{1}{4}$. Οι τιμές $x=-\frac{1}{4}$ και $y=\frac{7}{4}$ εύκολα διαπιστώνουμε ότι επαληθεύουν και τη (2).

Άρα ο κύκλος διέρχεται από το σταθερό σημείο $M(-\frac{1}{4},\frac{7}{4})$.

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2+y^2+4\lambda x+8y=0$$

παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματική τιμή του λ. Επίσης να αποδείξετε ότι ο κύκλος διέρχεται από ένα σταθερό σημείο, του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.

M_{26}: Για να βρούμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου για τα οποία ισχύει μια σχέση
α) Παίρνουμε την δοθείσα σχέση και κάνουμε πράξεις
β) Συμπεραίνουμε για τον γεωμετρικό τόπο

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω σταθερό σημείο Α(α,β) με $|\vec{OA}|=3$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\vec{OM}(\vec{OM}-2\vec{OA})=7$

<u>Επίλυση</u>

Αν (x,y) οι συντεταγμένες του Μ, τότε είναι:

$\vec{OM}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ και $\vec{OM}-2\vec{OA}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-2\alpha \\ y-2\beta \end{bmatrix}$

Έτσι έχουμε $\vec{OM}(\vec{OM}-2\vec{OA})=7 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-2\alpha \\ y-2\beta \end{bmatrix}=7 \Leftrightarrow$

$x(x-2\alpha)+y(y-2\beta)=7 \Leftrightarrow x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-7=0$ (1)

Η (1) παριστάνει κύκλο, γιατί είναι $(-2\alpha)^2+(-2\beta)^2-4(-7)=4(\alpha^2+\beta^2)+28=4.9+28=64$
$[\alpha^2+\beta^2=9$ γιατί $|\vec{OA}|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=3]$

Ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $(\frac{2\alpha}{2},\frac{2\beta}{2})=(\alpha,\beta)$ δηλαδή το Α και ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}\sqrt{64}=4$.
Ο κύκλος με κέντρο το Α και ακτίνα 4 είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

Εφαρμογή για τον μαθητή

Έστω σταθερό σημείο Α(α,β) με $|\vec{OA}|=5$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\vec{OM}(\vec{OM}-2\vec{OA})=7$

M_{27}: Για να δείξουμε ότι δύο κύκλοι τέμνονται ορθογώνια αρκεί να δείξουμε ότι η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες στα κοινά σημεία είναι κάθετες οπότε

1ος τρόπος
α) Επιλύουμε το σύστημα C_1,C_2 και βρίσκουμε τα κοινά τους σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$
β) Βρίσκουμε τους συντελεστές λ_1,λ_2 των K_1A, K_2A και πρέπει $\lambda_1\lambda_2=-1$ και τους συντελεστές λ_3,λ_4 των K_1B, K_2B και πρέπει $\lambda_3\lambda_4=-1$

2ος τρόπος
α) Επιλύουμε το σύστημα C_1,C_2 και βρίσκουμε τα κοινά τους σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$
β) Αποδεικνύουμε ότι ισχύει $(K_1K_2)^2=\rho_1^2+\rho_2^2$

Παράδειγμα

Να δειχτεί ότι οι κύκλοι $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-\alpha^2+\beta^2=0$
$x^2+y^2-2\beta x+2\alpha y+\alpha^2-\beta^2=0$, $\alpha,\beta>0$ τέμνονται ορθογώνια

Επίλυση

Οι συντεταγμένες των κέντρων είναι $K_1(\alpha,\beta)$ και $K_2(\beta,-\alpha)$. Οι ακτίνες του είναι:
$R_1=\alpha\sqrt{2}$, $R_2=\beta\sqrt{2}$

Για να τέμνονται οι κύκλοι πρέπει να ισχύει: $|R_1 - R_2| < |\vec{K_1K_2}| < R_1 + R_2$

$|\alpha\sqrt{2} - \beta\sqrt{2}| < \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\alpha+\beta)^2} < \alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{2}$

$|\alpha\sqrt{2} - \beta\sqrt{2}|^2 < (\alpha-\beta)^2 + (\alpha+\beta)^2 < (\alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{2})^2 - 4\alpha\beta < 0 < 4\alpha\beta$, που ισχύει αφού $\alpha,\beta > 0$ και να τέμνονται ορθογώνια θα πρέπει το τρίγωνο $K_1A\ K_2$ να είναι ορθογώνιο.

$|\vec{K_1K_2}|^2 = \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + (-\alpha-\beta)^2} = \beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 = R_1^2 + R_2^2$

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Να δειχτεί ότι οι κύκλοι $x^2+y^2-2x-2y=0$
$x^2+y^2-2x+2y=0$, τέμνονται ορθογώνια.