ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

Μεθοδολογία

3 ^{ο} Κεφάλαιο

M_1: Για να βρούμε την εξίσωση του κύκλου (C), πρέπει να προσδιορίσουμε:
α) το κέντρο του Κ(α,β) και την ακτίνα του R ή
β) τις σταθερές Α,Β,Γ στη γενική εξίσωση $χ^2+ψ^2+Αχ+Βψ+Γ=0$.
Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις τους τρεις αγνώστους α, β, R ή τους Α,Β,Γ .

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος
α) έχει κέντρο το σημείο Κ(2,-1) και διέρχεται από το Α(-2,3)
β)έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα τα σημεία Α(1,2) και Β(-1, 4)
γ) έχει κέντρο το σημείο Κ(2,3) και εφάπτεται της ευθείας ε: 2x-y+1=0

Επίλυση

α) Η ακτίνα του κύκλου είναι : ρ= (ΚΑ)= $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ = $\sqrt{(-2-2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$.
Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-2)^2+(y+1)^2=32$

β) Το κέντρο Κ του κύκλου είναι το μέσο του ΑΒ και έχει συντεταγμένες $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{1-1}{2},\frac{2+4}{2}\right)$=(0,3). Η ακτίνα του είναι: ρ=(ΑΚ)=$\sqrt{(0-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{2}$
Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+(y-3)^2=2$

γ) Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με την απόσταση του κέντρου από την εφαπτομένη, δηλαδή ρ=d(Κ,ε)=$\frac{|2\bullet 2-3+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.
Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{4}{5}$.

Εφαρμογή για τον μαθητή

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος
α) έχει κέντρο το σημείο Κ(3,-2) και διέρχεται από το Α(2,5)
β)έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα τα σημεία Α(1,2) και Β(1, 4)
γ) έχει κέντρο το σημείο Κ(1,-3) και εφάπτεται της ευθείας ε: x+3y+5=0

M_2: Για να δείξουμε ότι η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ είναι εξίσωση κύκλου

α) Συμπληρώνουμε και στα δύο μέλη τα τετράγωνα $\left(\frac{A}{2}\right)^2, \left(\frac{B}{2}\right)^2$

β) Κάνουμε πράξεις και προκύπτει η μορφή $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}$

γ) Εξετάζουμε την ποσότητα $\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}=\Pi$.

1. Αν Π >0 τότε είναι εξίσωση κύκλου κέντρου $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνας

   $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

2. Αν Π=0 τότε η εξίσωση παριστάνει το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$

   (Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο κύκλος εκφυλίζεται σε σημείο)
3. Αν Π<0 τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Παράδειγμα

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
α) $(x-1)^2+y^2-4y=0$
β) $x^2+y^2+4x=0$
γ) $2x^2+2y^2-6x-10y-1=0$

Επίλυση

α) $(x-1)^2+(y-2)^2-4=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=2^2$.
Άρα ο κύκλος έχει κέντρο Κ(1,2) και ακτίνα ρ=2.
β) $x^2+ y^2+4x=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4-4+ y^2=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+ y^2=2^2$.
Άρα ο κύκλος έχει κέντρο Κ(-2,0) και ακτίνα ρ=2
γ) $2x^2+2y^2-6x-10y-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-3x-5y-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow$

$x^2-2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2-2\frac{5}{2}y+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{36}{4}=9=3^2$. Άρα ο κύκλος έχει κέντρο $K\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ και ακτίνα ρ=3

Εφαρμογή για τον μαθητή

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
α) $(x+2)^2+y^2-6y=0$
β) $x^2+y^2+4x+6y=0$
γ) $3x^2+3y^2-6x-12y-21=0$

Μ$_3$: Για να βρούμε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_0,y_0)$ και περνάει από το σημείο $A(x_1,y_1)$
α) Βρίσκουμε την απόσταση (ΚΑ) από τον τύπο (ΑΒ)=$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
β) Αντικαθιστούμε στον τύπο $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ τις τιμές x_0,y_0 και όπου ρ=(ΚΑ)

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Κ(-1,2) και περνάει από το σημείο Α(1,1).

Επίλυση

Είναι $\rho=|\vec{KA}|=\sqrt{(1-(-1))^2+(1-2)^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ οπότε $(x+1)^2+(y-2)^2=5$

Εφαρμογή για τον μαθητή

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Κ(0,4) και περνάει από το σημείο Α(2,2).

Μ$_4$: Για να βρούμε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο ΑΒ με άκρα $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$
α) Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ που είναι
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
β) Βρίσκουμε την απόσταση ρ=(ΑΜ)
γ) Παίρνουμε τον τύπο $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ και αντικαθιστούμε όπου x,x_0 τις τιμές

$\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}$ και ρ=(ΑΜ)

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με άκρα τα σημεία Α(-2, 1) και Β(2,-1).

Επίλυση

Το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο Μ του ΑΒ. Είναι $M\left(\frac{2+(-2)}{2},\frac{-1+1}{2}\right)$ δηλαδή Μ(0,0). Για την ακτίνα του κύκλου ρ έχουμε $\rho^2=MB^2=(2-0)^2+(-1-0)^2=5$. Επομένως η εξίσωση του κύκλου θα είναι $x^2+y^2=5$.

Εφαρμογή για τον μαθητή

Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με άκρα τα σημεία Α(3, 3) και Β(-3,-3).

M_5:Για να δείξουμε ότι είναι ένα σημείο $K(x_0,y_0)$ ανήκει σε ευθεία ε: Αx+Βy+Γ=0 αρκεί να δείξουμε ότι επαληθεύεται η ε για τις συντεταγμένες του Κ δηλαδή ισχύει η σχέση $Ax_0+By_0+\Gamma=0$

Παράδειγμα

Να προσδιορίσετε την τιμή του κ, ώστε το κέντρο του κύκλου $x^2+y^2-x+2y-2=0$ να βρίσκεται στην ευθεία (3κ+1)x-5κy+8=0

Επίλυση

Η εξίσωση του κύκλου γράφεται $x^2+y^2-x+2y-2=0 \Leftrightarrow$
$(x-\frac{1}{2})^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}+1+2=\frac{13}{4}$.Επομένως το κέντρο του είναι το σημείο $K(\frac{1}{2},-1)$.
Αφού το Κ ανήκει στην ευθεία θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή πρέπει $(3\kappa+1)\frac{1}{2}-5\kappa(-1)+8=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3\kappa}{2}+\frac{1}{2}+5\kappa+8=0 \Leftrightarrow 3\kappa+3+15\kappa+24=0 \Leftrightarrow 18\kappa=-27 \Leftrightarrow \kappa=-\frac{3}{2}$$

Εφαρμογή για τον μαθητή

Να προσδιορίσετε την τιμή του κ, ώστε το κέντρο του κύκλου $x^2+y^2-4x+6y-2=0$ να βρίσκεται στην ευθεία $(3κ-4)x+2κy+7=0$

M_6: Για να εξετάσουμε τη θέση ευθείας ε: $y=λx+β$ και κύκλου $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=ρ^2$

$1^{ος}$ τρόπος

α) Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων ε και C και καταλήγουμε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση

β) Βρίσκουμε την διακρίνουσα Δ οπότε

1.Αν $Δ>0$ τότε η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία
2. Αν $Δ=0$ τότε η ευθεία εφάπτεται του κύκλου
3. Αν $Δ<0$ τότε η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.

Παράδειγμα

Να εξετάσετε τη θέση της ευθείας με εξίσωση $2x-y=7$ ως προς τον κύκλο $C:x^2+y^2=7$

Επίλυση

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 2x-y=7 \\ x^2+y^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-7 \\ x^2+(2x-7)^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-7 \\ 5x^2-28x+42=0 \end{cases}$

Το τελευταίο σύστημα είναι αδύνατο. Άρα η ευθεία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο.

Εφαρμογή για τον μαθητή

Να εξετάσετε τη θέση της ευθείας με εξίσωση $x + y =2$ ως προς τον κύκλο $C:x^2+y^2=9$.

$2^{ος}$ τρόπος

α) Βρίσκουμε την απόσταση d του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία

β) Βρίσκουμε την ακτίνα ρ του κύκλου οπότε

1. Αν $d<ρ$ η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία
2. Αν $d=ρ$ η ευθεία και ο κύκλος εφάπτονται
3.Αν $d>ρ$ τότε η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.

Παράδειγμα

Να εξετάσετε τη θέση της ευθείας με εξίσωση 2x-y=7 ως προς τον κύκλο C:$x^2+y^2=25$

Επίλυση

Ο κύκλος έχει κέντρο Κ(0,0) και η απόσταση d του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία ε: 2x-y-7 = 0 είναι d(K, ε)= $\frac{|2.0-0-7|}{\sqrt{5}}=\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$.
Η ακτίνα ρ του κύκλου είναι ρ = 5 .
Επειδή d(K, ε)= $\frac{7\sqrt{5}}{5}<5=\rho$, η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία .

Εφαρμογή για τον μαθητή

Να εξετάσετε τη θέση της ευθείας με εξίσωση 3x+4y=12 ως προς τον κύκλο C:$x^2+y^2=49$

M_7: Για να βρούμε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία $K(x_1,y_1)$, $\Lambda(x_2,y_2)$, $M(x_3,y_3)$

$1^{ος}$ τρόπος

α) Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη εξίσωση είναι η C:$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$
β) Αντικαθιστούμε όπου (x,y) τα ζεύγη (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)
γ) Επιλύουμε ως προς τα Α,Β,Γ.
δ) Αντικαθιστούμε τα Α,Β,Γ στην C

$2^{ος}$ τρόπος

α) Υποθέτουμε ότι C:$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$
β) Αφού $K\in C$, $\Lambda\in C$, $M\in C$ προκύπτει σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους x_0,y_0, ρ
γ) Επιλύουμε το σύστημα
δ) Αντικαθιστούμε στην C

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου με κορυφές τα σημεία: Δ(3,0), Ε(1,1) και Ζ(-2,-4)

Επίλυση

Ζητάμε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Δ,Ε και Ζ. Έστω ότι η εξίσωση του κύκλου αυτού είναι η $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ (1)
Την (1) πρέπει να επαληθεύουν οι συντεταγμένες των Δ,Ε και Ζ δηλαδή

$$\begin{cases} 9+3A+\Gamma=0 \\ 1+1+A+B+\Gamma=0 \\ 4+16-2A-4B+\Gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A+\Gamma=-9 \\ A+B+\Gamma=-2 \\ 2A+4B-\Gamma=20 \end{cases}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι είναι $A=-\frac{17}{13}$, $B=\frac{57}{13}$ και $\Gamma=-\frac{66}{13}$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2+y^2-\frac{17}{13}x+\frac{57}{13}y-\frac{66}{13}=0$

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου με κορυφές τα σημεία: Δ(1,3), Ε(1,1) και Ζ(4,4).