ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ
στα
Μαθηματικά

ΘΕΜΑ 1°

Α. Έστω η συνάρτηση $f: A \to$ R. Πως ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση της f;

Μονάδες 6

Β. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f: A \to$ R είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο $x_0 \in A$ να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
Ισχύει το αντίστροφο;

Μονάδες 9

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει στο 0 τοπικό ακρότατο τότε, αναγκαστικά, θα είναι $f'(0)=0$.

Μονάδες 2

β. Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f **δεν** είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ τότε, πάντα, θα υπάρχει $x_0 \in \Delta$ για τα οποίο θα ισχύει: $f'(x_0)<0$

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$ και ισχύει: $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε, αναγκαστικά, η συνάρτηση θα έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο $\Delta=[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 2

δ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R τότε δεν μπορεί , σε καμιά περίπτωση, να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Μονάδες 2

ε. Αν για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ τότε για τον υπολογισμό του ορίου $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ μπορούμε, σε κάθε περίπτωση, να εφαρμόσουμε τον κανόνα *De L' Hospital*

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ln x, & x>0 \\ \alpha\quad, & x=0\end{cases}$$

α. Να δείξετε ότι α=0 και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σημείο της O(0,0).

Μονάδες 8

β. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 6

γ. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=k$, για τις διάφορες τιμέςτου πραγματικού αριθμού k.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3°

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

- η f στρέφει τα κοίλα κάτω,
- η γραφική της παράσταση στο σημείο της $A(3,f(3))$ έχει εφαπτομένη τον $x'x$,
- $g(x)=f(x^2-2x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι $f(x)\le 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο, (τοπικό ή ολικό).

Μονάδες 6

γ. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης g και να βρείτε τις θέσεις στις οποίεςπαρουσιάζει τοπικό ακρότατο καθώς και το είδος του ακρότατου.

Μονάδες 8

δ. Αν, επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε:

i. να δείξετε ότι και η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και
ii. να δείξετε ότι η εξίσωση $g''(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4°

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x-e^{ax}$, $x\in\mathbb{R}$ και $a\geq\frac{1}{e}$.

α. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και

να δείξετε ότι δεν έχει σημεία καμπής.

Μονάδες 6

β. Να δείξετε ότι: $e^{ax}<\dfrac{e^{a(x+1)}-e^{ax}}{a}<e^{a(x+1)},\ \forall x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

γ. Να δείξετε ότι: $f(x)\leq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε την τιμή του a για την οποία ισχύει $f(x)\leq -1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Εύχομαι επιτυχία στον στόχο σας!!!!!!!!!!!!!!!