ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

Α.3.3

Αλγεβρική επίλυση

Γραμμικού

συστήματος

Το

20Ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

• ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1. Σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων

Όταν μιλάμε για σύστημα μιλάμε για **κοινές λύσεις!**

Αν, δηλαδή, μια γραμμική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις και μια άλλη γραμμική εξίσωση έχει άλλες τόσες άπειρες λύσεις, είναι δυνατόν κάποιες από αυτές τις λύσεις να είναι κοινές και για τις δύο; Για να πλησιάσουμε την απάντηση, αρκεί να σκεφτούμε το εξής:

Αφού κάθε γραμμική εξίσωση παριστάνει μία ευθεία, τότε 2 γραμμικές εξισώσεις θα παριστάνουν 2 ευθείες!
Οι **σχετικές θέσεις** που μπορούν να πάρουν δύο ευθείες μεταξύ τους είναι τρείς.

Γεωμετρική ερμηνεία

Σχετική Θέση Ευθειών	Πλήθος Κοινών Σημείων	Επίλυση Γραμμικού Συστήματος
	**1**	**Μία** μοναδική λύση
	**0**	**Καμία** λύση (Αδύνατο)
	**∞**	**Άπειρες** λύσεις (Αόριστο)

2. Επίλυση Γραμμικού Συστήματος 2x2

Προτού λύσουμε ένα οποιοδήποτε σύστημα, προκειμένου να βγάλουμε μιαν άκρη, επιβάλλεται να το φέρουμε πρώτα σε **κανονική μορφή**, δηλαδή στη μορφή:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Με απλά λόγια, έχουν εκτελεστεί τα παρακάτω:

1. Απαλοιφή παρονομαστών.
2. Απαλοιφή παρενθέσεων.
3. Χωρισμός γνωστών από αγνώστους.
4. Αναγωγή ομοίων όρων.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στην επίλυση του συστήματος επιλέγοντας κάποια από τις παρακάτω μεθόδους:

Μέθοδος της Αντικατάστασης

Λύνουμε μία από τις 2 εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο και **αντικαθιστούμε** το αποτέλεσμα στην 2η εξίσωση. Έτσι προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο!

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} 2x + 5y = 1 & (1) \\ x - 2y = -4 & (2) \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι στη 2η εξίσωση ο άγνωστος x δεν έχει συντελεστή (εντάξει, για τους εξυπνάκηδες, έχει τη μονάδα), άρα μας συμφέρει να επιλέξουμε τη 2η εξίσωση και να τη λύσουμε ως προς x (έτσι αποφεύγουμε να προκύψουν κλάσματα) :

(2) $\Leftrightarrow$ **x = 2y – 4 (3)**

Προχωρούμε τώρα στην 1η εξίσωση, όπου αντικαθιστούμε στη θέση του x την παράσταση (3) που μόλις βρήκαμε (και φυσικά στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση):

$$\textbf{(1)} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \mathbf{2\cdot(2y-4)+5y=1 \Leftrightarrow 4y-8+5y=1 \Leftrightarrow 9y=9 \Leftrightarrow y=1}$$

Προς το παρόν, έχουμε υπολογίσει μονάχα τον έναν από τους δύο αγνώστους. Επιστρέφουμε στην εξίσωση (2) και αντικαθιστούμε την τιμή y = 1 :

$$\textbf{(2)} \overset{y=1}{\Leftrightarrow} \mathbf{x=2\cdot1-4=2 \Leftrightarrow x=-2}$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι η : $\begin{cases} \mathbf{x=-2} \\ \mathbf{y=1} \end{cases}$ ή, αλλιώς, το ζεύγος **(x, y) = (–2, 1)** .

Παρατήρηση

Πολλά βιβλία ή καθηγητές - για χάρη της καθαρότητας αλλά εις βάρος της συντομίας - λύνοντας ένα σύστημα, αντιγράφουν σε κάθε βήμα και τις δύο εξισώσεις:

$$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ x-2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=1 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y-4)+5y=1 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y-8+5y=1 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y=9 \\ x=2y-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2\cdot1-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Μέθοδος των Αντίθετων Συντελεστών

Πολλαπλασιάζουμε και τις 2 εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό, ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές μπροστά από κάποιον άγνωστο (πάλι επιλέγουμε αυθαίρετα όποιον μας συμφέρει). Στη συνέχεια, **προσθέτουμε** τις 2 εξισώσεις **κατά μέλη**. Έτσι προκύπτει και πάλι μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο!

Παράδειγμα

Παίρνουμε πάλι το ίδιο σύστημα: $\begin{cases} 2x+5y=1 & (1) \\ x-2y=-4 & (2) \end{cases}$

Επιλέγουμε αυθαίρετα τον άγνωστο x , περισσότερο από θέμα οπτικής ευκολίας - καθώς βρίσκεται πρώτος-πρώτος στην εξίσωση - παρά από κανένα θέμα ουσίας. Θα προσπαθήσουμε, πολλαπλασιάζοντας τη μία ή και τις δύο εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό, ώστε οι συντελεστές του x να γίνουν αντίθετοι.

Ο συντελεστής του x είναι το **2** $\longrightarrow$ $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ x-2y=-4 \end{cases}$

Ο συντελεστής του x είναι το **1** $\longrightarrow$

πολλαπλασιάζουμε την 1η εξίσωση με **1**

πολλαπλασιάζουμε την 2η εξίσωση με **2**

$$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ x-2y=-4 \end{cases}$$

Κανονικά, θα πρέπει να υπολογίσουμε το ΕΚΠ (2, 1) και να προχωρήσουμε σε μια διαδικασία όμοια μ' εκείνη που ακολουθούμε, κάθε φορά που κάνουμε δυο κλάσματα ομώνυμα. Ωστόσο, όταν εργαζόμαστε με μικρούς αριθμούς, δε είναι λάθος να σκεφτούμε λιγάκι "πονηρά" και να πολλαπλασιάσουμε τις 2 εξισώσεις με έναν τρόπο χιαστί:

Με αυτό τον τρόπο όμως, στο συγκεκριμένο σύστημα, οι συντελεστές δε θα βγουν αντίθετοι αλλά ομόσημοι. Για το λόγο αυτό, συμπληρώνω ένα "–" αυθαίρετα σε όποιον από τους δύο αριθμούς επιθυμώ. Έτσι, έχουμε τελικά:

$$\begin{array}{r} -1\cdot \\ 2\cdot \end{array}\begin{cases} \mathbf{2x+5y=1} \\ \mathbf{x-2y=-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{-2x-5y=-1} \\ \mathbf{2x-4y=-8} \end{cases}$$

Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις 2 εξισώσεις κατά μέλη:

$$\begin{cases} \cancel{-2x}-5y=-1 \\ \cancel{2x}-4y=-8 \end{cases}$$

$$\oplus$$

$$-9y=-9 \Leftrightarrow y=1$$

Στη συνέχεια, με αντικατάσταση της λύσης που βρήκαμε είτε στην (1), είτε στη (2), υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$\mathbf{(2) \Leftrightarrow x-2\cdot 1=-4 \Leftrightarrow x=2-4 \Leftrightarrow x=-2}$$

Μέθοδος της Σύγκρισης

Λύνουμε και τις 2 εξισώσεις ως προς τον ίδιο άγνωστο . Επειδή τα πρώτα μέλη είναι ίσα, **εξισώνουμε** και τα δεύτερα μέλη. Προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο την οποία επιλύουμε ! Συνεχίζουμε με αντικατάσταση για να βρούμε τον δεύτερο άγνωστο.

Παράδειγμα

Συνεχίζοντας με το ίδιο πάντα σύστημα: $\begin{cases} 2x+5y=1 & (1) \\ x-2y=-4 & (2) \end{cases}$

λύνουμε **και τις δύο** εξισώσεις ως προς τον ίδιο άγνωστο .

Εδώ θα λύσουμε ως προς x :

$$\begin{cases} \mathbf{2x=1-5y} \\ \mathbf{x=2y-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x=\dfrac{1-5y}{2}} & \mathbf{(3)} \\ \mathbf{x=2y-4} & \mathbf{(4)} \end{cases}$$

Εφόσον τα πρώτα μέλη είναι ίσα τότε θα είναι και τα δεύτερα ίσα, οπότε εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη προκύπτει η παρακάτω εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο:

$$\mathbf{\frac{1-5y}{2}=2y-4 \underset{\text{παρονομαστών}}{\overset{\text{απαλοιφή}}{\Leftrightarrow}} 1-5y=4y-8 \Leftrightarrow -9y=-9 \Leftrightarrow y=1}$$

Έχοντας βρει τον έναν άγνωστο, δε θέλει πολύ φιλοσοφία, τον αντικαθιστούμε σε κάποια από τις αρχικές εξισώσεις (1), (2) ή ακόμα καλύτερα σε μία από τις (3), (4), οι οποίες είναι έτοιμες, λυμένες ως προς τον άλλον άγνωστο:

$$\mathbf{(3) \overset{y=1}{\Leftrightarrow} x=\frac{1-5\cdot 1}{2}=\frac{-4}{2} \Leftrightarrow x=-2}$$

Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η !!!

ΘΥΜΟΜΑΣΤΕ ότι δεν έχουμε έναν, αλλά **2 !!!** αγνώστους να υπολογίσουμε! Αφού, λοιπόν, καταφέρουμε τον ένα από τους δύο - με κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους - χρειάζεται να αντικαταστήσουμε την τιμή που βρήκαμε σε μία από τις εξισώσεις του συστήματος (όποια επιθυμούμε, άρα την πιο απλή) ώστε να υπολογίσουμε, τελικά, και τον άλλο άγνωστο!

4. Μέθοδος των Οριζουσών

Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2x2 σε κανονική μορφή:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Θα ονομάζουμε **Ορίζουσα** του συστήματος και θα τη συμβολίζουμε με το γράμμα **D**, την παρακάτω έκφραση:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

Αντίστοιχα, ορίζονται οι ορίζουσες **ως προς x** και **ως προς y**, ως εξής:

$$Dx = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta \qquad Dy = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$$

Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να προχωρήσουμε στη διερεύνηση του συστήματος, ως εξής:

Διερεύνηση

- Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** που δίνεται από τους τύπους:

$$x = \frac{Dx}{D} \qquad y = \frac{Dy}{D}$$

- Αν $D = 0$, όμως συμβαίνει ένα από τα δύο $Dx \neq 0$ ή $Dy \neq 0$ τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**.
- Αν $D = Dx = Dy = 0$ τότε το σύστημα είναι **αόριστο**, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.

Ε Ξ Α Ι Ρ Ε Σ Η !!!

Αν $D = D_x = D_y = 0$
με $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$
αλλά κάποιο από τα $\gamma, \gamma' \neq 0$
τότε το σύστημαείναι **αδύνατο**

Παράδειγμα

Άντε πάλι το ίδιο σύστημα... $\begin{cases} 2x+5y=1 & (1) \\ x-2y=-4 & (2) \end{cases}$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες του συστήματος :

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\cdot(-2)-1\cdot 5=-4-5=-9$$

$$Dx=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot(-2)-(-4)\cdot 5=-2+20=18$$

$$Dy=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=2\cdot(-4)-1\cdot 1=-8-1=-9$$

Εφόσον $D=-9\neq 0$ το σύστημα θα έχει **μοναδική λύση** την :

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{18}{-9}=-2 \quad ,$$

$$y=\frac{Dy}{D}=\frac{-9}{-9}=1$$

5. Το Αόριστο Σύστημα

Γενικά, είναι εύκολο να αντιληφθούμε αν ένα σύστημα καταλήγει να είναι αόριστο, δίχως καν να χρειαστεί να το επιλύσουμε. Εφόσον, δηλαδή, το έχουμε φέρει σε κανονική μορφή, το μόνο που χρειάζεται είναι να παρατηρήσουμε ότι οι δύο εξισώσεις είναι ακριβώς ίδιες! Αρκεί να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε μία (ή, συχνά, και τις δύο) από αυτές με κάποιον αριθμό και ιδού! Αυτό γίνεται προφανές, αν θυμηθούμε ότι το αόριστο σύστημα εκφράζεται γεωμετρικά από δύο ευθείες που **συμπίπτουν**, δηλαδή ουσιαστικά από την ίδια ευθεία.

Αλλά...

Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα όπως έχουμε πει έχει **άπειρες λύσεις**. Όμως, **ΔΕΝ** ξεμπερδεύουμε γράφοντας απλά ένα ξερό "αόριστο" και βάζοντας τελεία, αλλά είμαστε **υποχρεωμένοι** να σημειώσουμε τη **μορφή** που παίρνουν αυτές οι άπειρες λύσεις. Για το λόγο αυτό, λύνουμε μία από τις δύο εξισώσεις πχ. **ως προς y** και σημειώνουμε τη λύση του συστήματος, όπως ακριβώς φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα

Έστω το σύστημα $\begin{cases} x-4y=3 & (1) \\ 3x-12y=9 & (2) \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (2) δεν είναι παρά η (1) πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό 3. Άρα, καταλήγουμε πως πρόκειται για ένα σύστημα αόριστο. Λύνουμε την (1) ως προς y, οπότε :

$$\mathbf{(1) \Leftrightarrow -4y = -x+3 \Leftrightarrow 4y = x-3 \Leftrightarrow y = \frac{x-3}{4}}$$

Γράφουμε, τελικά, πως οι λύσεις μας είναι άπειρες, της μορφής:

$$\mathbf{(x, y) = \left(\kappa, \frac{\kappa-3}{4}\right)}, \ \kappa \in P$$

Ουσιαστικά, τι κάναμε; Απλά στο διατεταγμένο ζεύγος των λύσεων θέσαμε, στη θέση του y, την παράσταση που προέκυψε από την (1). Επιπλέον, θέσαμε στη θέση του x μια μεταβλητή κ, που σημαίνει ότι - και καλά - για να βρούμε μια οποιαδήποτε λύση, αρκεί να αντικαθιστούμε κάθε φορά στο x κι έναν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό κ. Αυτά!

Αλλιώς;

Αν λύναμε το σύστημα "κανονικά", ας πούμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης θα είχαμε:

$$\begin{cases} x-4y=3 & (1) \\ 3x-12y=9 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y+3 \\ 3x-12y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y+3 \\ 3(4y+3)-12y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y+3 \\ 12y+9-12y=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y+3 \\ 12y-12y=9-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y+3 \\ 0y=0 \end{cases}$$

Εφόσον η εξίσωση βγήκε **ταυτότητα** ως προς y, άρα το σύστημα είναι τελικά αόριστο. Ολοκληρώνουμε γράφοντας τη μορφή των λύσεων όπως δείξαμε προηγουμένως.

Παρατήρηση

α. Παρατηρώντας τη μορφή των λύσεων, αντιλαμβανόμαστε ότι το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να αντικαθιστούμε διάφορες τιμές - της αρεσκείας μας - στον x και να κάνουμε πράξεις. Γι' αυτό, στην περίπτωση αυτή, ο άγνωστος x ονομάζεται και **ελεύθερος άγνωστος**.

β. Με την ίδια λογική, θα μπορούσαμε να λύσουμε την (1) ως προς x, συνεπώς ο ελεύθερος άγνωστος τότε θα ήταν το y. Κανένα πρόβλημα, είναι το ίδιο πράγμα. Για του λόγου το αληθές: (1) $\Leftrightarrow$ x = 4y + 3. Οι λύσεις μας τότε θα είχαν τη μορφή:

$$(x, y) = (4\kappa + 3, \kappa)$$

6. Το Ομογενές Σύστημα

Ένα σύστημα θα λέγεται **ομογενές** αν οι σταθεροί όροι όλων των εξισώσεων είναι **μηδέν**. Είναι προφανές πως ένα ομογενές σύστημα δεν είναι ποτέ αδύνατο, εφόσον έχει πάντα μια λύση: τη **μηδενική**!

7. Γραμμικά Συστήματα 3x3

Σα να μην έφταναν όλα μας τα προβλήματα, χρειάζεται τώρα να μάθουμε πως υπάρχουν επιπλέον και συστήματα **3 εξισώσεων** με **3 αγνώστους** ! Ευτυχώς, αν έχουμε κατανοήσει τα προηγούμενα, τα πράγματα δεν είναι καθόλου δύσκολα, αρκεί να εφοδιαστούμε με αρκετή υπομονή στις πράξεις και τις αντικαταστάσεις.

Η Μέθοδος

Λύνουμε μία από τις 3 εξισώσεις ως προς έναν από τους 3 αγνώστους (μην τα ξαναλέμε: όποιον άγνωστο ή όποιαν εξίσωση μας συμφέρει). Στη

συνέχεια, αντικαθιστούμε την παράσταση που βρήκαμε στις άλλες δύο εξισώσεις. Κατ' αυτό τον τρόπο, καταφέρνουμε ν' απαλειφθεί ο ένας άγνωστος από τις δύο εξισώσεις και να καταλήξουμε σε ένα απλούστερο σύστημα 2x2, το οποίο φυσικά επιλύουμε, με κάποια απ' τις μεθόδους που μάθαμε νωρίτερα.

Παράδειγμα

Να λύθεί το σύστημα $\begin{cases} 2x + y - z = 2 & (1) \\ 4x - y - 3z = -2 & (2) \\ 2x + 2y - z = 9 & (3) \end{cases}$

Λύνουμε πχ. την (1) ως προς y και κατόπιν αντικαθιστούμε στις (2) και (3):

$$\begin{cases} y = -2x + z + 2 \\ 4x - (-2x + z + 2) - 3z = -2 \\ 2x + 2(-2x + z + 2) - z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + z + 2 \\ 4x + 2x - z - 2 - 3z = -2 \\ 2x - 4x + 2z + 4 - z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + z + 2 & (1) \\ 6x - 4z = 0 & (2) \\ -2x + z = 5 & (3) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι από τις (2) και (3) απαλείφθηκε ο άγνωστος y κι έτσι έχουμε καταλήξει σε ένα σύστημα 2x2, το οποίο λύνεται πολύ εύκολα:

$$\begin{cases} 6x - 4z = 0 \\ -2x + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4z = 0 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4(5 + 2x) = 0 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 20 - 8x = 0 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 20 \\ z = 5 + 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ z = 5 + 2(-10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ z = -15 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε τις λύσεις x = –10 και z = –15 στην εξίσωση (1) :

$\mathbf{y = -2x + z + 2 \Leftrightarrow y = -2(-10) + (-15) + 2 \Leftrightarrow y = 20 - 15 + 2 \Leftrightarrow y = 7}$

Τελικά, η λύση του συστήματος είναι η **διατεταγμένη τριάδα** αριθμών :

$$\mathbf{(x, y, z) = (-10, 7, -15)}$$

Β. Μεθοδολογία και εφαρμογές-παραδείγματά της

M_1: Για να αποδείξουμε ότι ένα ζεύγος αριθμών (κ, λ) είναι λύση μιας γραμμικής εξίσωσης αx+βψ =γ (1) αρκεί να δείξουμε ότι για x=κ και ψ =λ η εξίσωση (1) επαληθεύεται.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_2: Για να επιλύσουμε γραφικά ένα σύστημα 2x2 κάνουμε τα παρακάτω:

α) Στο ίδιο καρτεσιανό σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων $ε_1$, $ε_2$ του συστήματος.

β) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$1^η$ Αν οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται, τότε οι συντεταγμένες του σημείου τομής είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

$2^η$ Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

$3^η$ Αν οι γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_3: Για να επιλύσουμε ένα σύστημα 2x2 με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως, κάνουμε τα παρακάτω:

α) Ονομάζουμε (1), (2) τις δύο εξισώσεις του συστήματος

β) Επιλύουμε την (1) ή την (2) ως προς έναν άγνωστο και την ονομάζουμε (3).

γ) Αντικαθιστούμε την (3) στην (2) ή την (1) και υπολογίζουμε την τιμή του $1^{ου}$ αγνώστου.

δ) Αντικαθιστούμε την τιμή του $1^{ου}$ αγνώστου στην (3) και βρίσκουμε την τιμή του $2^{ου}$ αγνώστου.

ε) Το ζεύγος των τιμών του γ) και δ) είναι η λύση του συστήματος.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_4: Για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα με δύο αγνώστους κάνουμε τα παρακάτω:

α) Ονομάζουμε x,ψ του αγνώστους και βάζουμε τους κατάλληλους περιορισμούς αν χρειάζονται.
β) Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος σχηματίζουμε συστήματα.
γ) Επιλύουμε τα συστήματα.
δ) Επαληθεύουμε τη λύση του συστήματος.
ε) Εξετάζουμε αν επαληθεύονται οι περιορισμοί.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_5: Για να επιλύσουμε ένα σύστημα 2x2 με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών ή μέθοδο της απαλοιφής , κάνουμε τα παρακάτω:

α) Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλο αριθμό, ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι.
β) Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις οπότε προκύπτει εξίσωση με ένα άγνωστο την οποία επιλύουμε.
γ) Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στο β) σε μία από τις αρχικές εξισώσεις και υπολογίζουμε την τιμή του $2^{ου}$ αγνώστου.
δ) Το ζεύγος των τιμών του β) και γ) είναι η λύση του συστήματος.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_6: Για να υπολογίσουμε μια ορίζουσα της μορφής $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ πολλαπλασιάζουμε το α με το δ και από το αποτέλεσμα αφαιρούμε το γινόμενο του γ με το β.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_7: Για να επιλύσουμε ένα σύστημα 2x2 κάνουμε τα παρακάτω:

α) Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, Dx, Dψ.

β) Ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου ελέγχουμε τις περιπτώσεις:

$1^η$: Αν $D \neq 0$, τότε $x=\frac{Dx}{D}$, $ψ=\frac{Dψ}{D}$

$2^η$: Αν D=0 και ($Dx \neq 0$ ή $Dψ \neq 0$), τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

$3^η$: Αν D=Dx=Dψ=0 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις τις οποίες βρίσκουμε αφού αντικαταστήσουμε την τιμή της παραμέτρου που μηδενίζουμε της D, Dx, Dψ στο αρχικό σύστημα και επιλύσουμε τη μία από αυτές ως προς ένα άγνωστο σε συνάρτηση ως προς τον άλλον.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_8: Για να επιλύσουμε ένα παραμετρικό σύστημα 2x2 κάνουμε τα παρακάτω:

α) Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, Dx, Dψ και τις αναλύουμε σε γινόμενο παραγόντων..

β) Βρίσκουμε τις τιμές την παραμέτρου για τις οποίες είναι D=0.

γ) Ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου ελέγχουμε τις περιπτώσεις:

$1^η$: Αν $D \neq 0$, τότε $x=\frac{Dx}{D}$, $ψ=\frac{Dψ}{D}$

$2^η$: Αν D=0 και ($Dx \neq 0$ ή $Dψ \neq 0$), τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

$3^η$: Αν D=Dx=Dψ=0 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις τις οποίες βρίσκουμε αφού αντικαταστήσουμε την τιμή της παραμέτρου που μηδενίζουμε της D, Dx, Dψ στο αρχικό σύστημα και επιλύσουμε τη μία από αυτές ως προς ένα άγνωστο σε συνάρτηση ως προς τον άλλον.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_9: Για να επιλύσουμε ένα σύστημα 2x2 που οι εξισώσεις του ταυτίζονται (σύστημα αόριστο) , κάνουμε τα παρακάτω:

α) Επιλύουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο σε συνάρτηση ως προς τον άλλον.

β) Η λύση του συστήματος έχει τη μορφή (κ,f(κ)) ή (f(κ),κ) όπου κ πραγματικός αριθμός.

M_6: Για να μετατρέψουμε ένα σύστημα σε ένα ισοδύναμό του ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:

$1^{ος}$ τρόπος:

Επιλύουμε τη μία εξίσωση του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση. (Μέθοδος της αντικατάστασης).

$2^{ος}$ τρόπος:

Αντικαθιστούμε μία από τις εξισώσεις (ε_1) ή (ε_2) του συστήματος π.χ. την (ε_1) με την «λ (ε_1)+λ΄ (ε_2)» που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της με λ=0, προσθέσουμε τα μέλη της (ε΄) και πολλαπλασιάσουμε με λ΄.

$3^{ος}$ τρόπος:

Εναλλάσσουμε τις δύο εξισώσεις.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_{10}: Για να αποδείξουμε ότι ένα σύστημα είναι συμβιβαστό, αρκεί να δείξουμε ότι έχει τουλάχιστον μία λύση .

Παράδειγμα

Επίλυση

M_{11}: Για να αποδείξουμε ότι ένα σύστημα είναι ασυμβίβαστο, αρκεί να δείξουμε ότι είναι αδύνατο.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_{12}: Για να υπολογίσουμε οποιαδήποτε αποδεικτική σχέση που περιέχει ορίζουσα ή ορίζουσες $2^{ης}$ τάξης εφαρμόζουμε τον ορισμό (χιαστί ιδιότητα) θεωρώντας την ορίζουσα ως πραγματικό αριθμό και ακολουθούμε τις γνωστές μεθόδους της ΄Αλγεβρας.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_{13}: Για να μετατρέψουμε ένα σύστημα 3x3 σε κλιμακωτό σύστημα κάνουμε τα παρακάτω με τη μέθοδο της απαλοιφής ή των αντίθετων συντελεστών.

α) Απαλείφουμε τον άγνωστο x μεταξύ της $1^{ης}$ και της $2^{ης}$ εξίσωσης, καθώς επίσης και μεταξύ της $2^{ης}$ και της $3^{ης}$. Προκύπτουν δύο ισοδύναμες εξισώσεις που συμβολίζονται ως $4^{η}$ και $5^{η}$ εξίσωση.

β) Το σύστημα παίρνει τη μορφή συστήματος στο τετράγωνο από την $1^{η}$, $4^{η}$ και $5^{η}$ εξίσωση στο οποίο απαλείφουμε το ψ μεταξύ της $4^{ης}$ και $5^{ης}$ εξίσωσης, για να προκύψει η $6^{η}$ εξίσωση.

γ) Το σύστημα $1^{η}$, $4^{η}$, $6^{η}$ εξίσωση είναι το κλιμακωτό σύστημα.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_{14}: Για να επιλύσουμε ένα σύστημα 3x3 χρησιμοποιούμε έναν από τους επόμενους τρόπους:

1ος τρόπος:

α) Μετατρέπουμε το σύστημα σε κλιμακωτό.
β) Αντικαθιστούμε την τελευταία εξίσωση στη δεύτερη και στη συνέχεια στην πρώτη.
γ) Συμπεραίνουμε για τη λύση του συστήματος.

2ος τρόπος: Μέθοδος της αντικατάστασης

α) Επιλύουμε την μία εξίσωση ως προς έναν άγνωστο και τη συμβολίζουμε (1).
β) Αντικαθιστούμε την (1) στις άλλες δύο και προκύπτει σύστημα (Σ_1) 2x2 το οποίο επιλύουμε.
γ) Αντικαθιστούμε τη λύση του Σ_1 στην (1) και βρίσκουμε τον τρίτο άγνωστο.
δ) Συμπεραίνουμε για τη λύση του συστήματος.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_{15}: Για να επιλύσουμε ένα σύστημα ομογενές 3x3 ακολουθούμε την ίδια διαδικασία επίλυσης όπως και στα μη ομογενή. Η προσπάθειά μας είναι να βρούμε αν το σύστημα δέχεται και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής (οι παραμετρικές λύσεις του συστήματος). Επειδή υπάρχει πάντοτε η μηδενική λύση συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι πάντοτε συμβιβαστό.

Παράδειγμα

Επίλυση

M_{16}: Για να επιλύσουμε ένα συμμετρικό σύστημα υπάρχουν πολλοί μέθοδοι επίλυσής του. Χαρακτηριστική είναι η παρακάτω:

α) Προσθέτουμε όλες τις εξισώσεις του συστήματος κατά μέλη.

β) Αφαιρούμε διαδοχικά τις εξισώσεις του συστήματος από αυτή που προέκυψε από το βήμα α).

γ) Συμπεραίνουμε για τη λύση του συστήματος.

Επίλυση

M_{17}: Για να επιλύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία επίλυσης χρησιμοποιώντας κάποιο τέχνασμα, ώστε να μετατραπεί σε γραμμικό σύστημα.

α) Αντικαθιστούμε μέρη του μη γραμμικού συστήματος με βοηθητικούς αγνώστους.

β) Το γραμμικό σύστημα που προκύπτει επιλύεται με μία από τις μεθόδους επίλυσης συστημάτων.

γ) Με γνωστές τις λύσεις του γραμμικού συστήματος υπολογίζουμε τα μέρη που αντικαταστάθηκαν ως εξισώσεις και βρίσκουμε τις τιμές των αρχικών αγνώστων.

δ) Συμπεραίνουμε για τις λύσεις του συστήματος.

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
Το (Σ) $\begin{cases} \chi+\psi=1 \\ 3\chi+3\psi=2 \end{cases}$ είναι	αδύνατο
Το (Σ) $\begin{cases} \chi-\psi=0 \\ 5\chi=6\psi-\chi \end{cases}$ είναι	παράλληλη στον άξονα χ΄χ
Ένα σύστημα είναι αδύνατο όταν	$\lvert D-2 \rvert = 0$
Ένα σύστημα έχει μοναδική λύση	$\lvert D \rvert = \lvert D_x \rvert = \lvert D_\psi \rvert = 0$
Η ευθεία $\psi = 5$ είναι	αόριστο
Η ευθεία $\chi = -3$ είναι	παράλληλη στον άξονα ψ΄ψ

Μετατρέψτε τις παρακάτω προτάσεις σε μαθηματικές εκφράσεις.

Δεδομένου ότι $\chi,\psi \in \Re^*_+$	Μαθηματική έκφραση
1. Εχουν άθροισμα 7 και λόγο 3	
2.Διαφέρουν κατά 12 και το χ είναι τριπλάσιο του ψ	
3. Είναι πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 24 και εμβαδό 32	
4. Ανήκουν στην διχοτόμο της γωνίας χοψ και έχουν άθροισμα 4	

Διατάξτε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τα εξαγόμενα των οριζουσών..

α) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha-1 \\ \alpha+1 & \alpha \end{vmatrix}$ γ) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ δ) $\begin{vmatrix} 0 & 2000 \\ 1999 & 2004 \end{vmatrix}$

2. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Σε ποια σχέση βρίσκονται οι συντελεστές των αγνώστων ενός (Σ) όταν το σύστημα έχει μία λύση;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Σε ποια σχέση βρίσκονται οι συντελεστές των αγνώστων και οι σταθεροί όροι ενός (Σ) όταν το σύστημα είναι αδύνατο;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Σε ποια σχέση βρίσκονται οι συντελεστές των αγνώστων και οι σταθεροί όροι ενός (Σ) όταν το σύστημα είναι αόριστο;

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Ποια είναι η διαδικασία επίλυσης ενός συστήματος με τη γραφική μέθοδο;

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η

Ποια είναι η διαδικασία επίλυσης ενός συστήματος με τη μέθοδο της αντικατάστασης;

ΕΡΩΤΗΣΗ 6η

Ποια είναι η διαδικασία επίλυσης ενός συστήματος με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών;

ΕΡΩΤΗΣΗ 7η

Ποια είναι η διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος με 2 αγνώστους;

ΕΡΩΤΗΣΗ 8η

Πως μετατρέπουμε ένα σύστημα $Σ_1$ σε ένα ισοδύναμό του $Σ_2$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 9η

Πως βρίσκουμε τις άπειρες λύσεις ενός συστήματος 2χ2;

ΕΡΩΤΗΣΗ 10η
Τι παριστάνει γραφικά η εξίσωση $\chi = \alpha$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 11η
Τι παριστάνει γραφικά η εξίσωση $\psi = \beta$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 12η
Πως ερμηνεύεται γραφικά το αδύνατο σύστημα 2χ2 ;

ΕΡΩΤΗΣΗ 13η
Πως ερμηνεύεται γραφικά το αόριστο σύστημα 2χ2 ;

ΕΡΩΤΗΣΗ 14η
Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Το ομογενές σύστημα δεν είναι ποτέ αδύνατο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 15η
Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Το (Σ_1) $\begin{cases} \alpha\chi+\beta\psi=\gamma \\ \alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma' \end{cases}$ και
το (Σ_2) $\begin{cases} \alpha\chi+\beta\psi+0\omega=\gamma \\ \alpha'\chi+\beta'\psi+0\omega=\gamma' \end{cases}$
είναι ισοδύναμα;

ΕΡΩΤΗΣΗ 16η
Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Αν $D \neq 0$ το ομογενές σύστημα έχει λύση
μόνο τη μηδενική;

ΕΡΩΤΗΣΗ 17η
Τι συμβαίνει όταν σε ένα σύστημα είναι $D \neq 0$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 18η
Τι συμβαίνει όταν σε ένα σύστημα είναι $D = 0$
και ($D_x \neq 0$ ή $D_\psi \neq 0$) ;

ΕΡΩΤΗΣΗ 19η
Τι συμβαίνει όταν σε ένα σύστημα είναι $D = D_x = D_\psi = 0$ και
($\gamma \neq 0$ ή $\gamma' \neq 0$) ;

ΕΡΩΤΗΣΗ 20η
Τι συμβαίνει όταν σε ένα σύστημα είναι $D = D_x = D_\psi = \gamma = \gamma' = 0$;

4. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Η γραφική παράσταση της αχ+βψ=γ , α $\neq$ 0 ή β $\neq$ 0 είναι

Α	παραβολή
Β	υπερβολή
Γ	ευθεία.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Οι λύσεις ενός συστήματος 2χ2 είναι

Α	δύο
Β	άπειρες ή μια ή καμμία.
Γ	πάντοτε άπειρες.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Η ευθεία ψ = κ είναι

Α	παράλληλη στον άξονα χ΄χ
Β	παράλληλη στον άξονα ψ΄ψ
Γ	τέμνουσα του χ΄χ και του ψ΄ψ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Η ευθεία χ = κ είναι

Α	παράλληλη στον άξονα χ΄χ
Β	παράλληλη στον άξονα ψ΄ψ
Γ	τέμνουσα του χ΄χ και του ψ΄ψ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Η ορίζουσα D των συντελεστών ενός συστήματος

Α	έχει πάντοτε μηδενική τιμή
Β	είναι εξίσωση
Γ	είναι παράσταση.

ΕΡΩΤΗΣΗ 6Η

Αν η ορίζουσα D των συντελεστών ενός συστήματος είναι $\neq 0$ τότε το σύστημα

Α	είναι αδύνατο
Β	έχει μία λύση
Γ	είναι αόριστο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 7Η

Αν $D = 0$ και ($D_\chi \neq 0$ ή $D_\psi \neq 0$) τότε το σύστημα

Α	είναι αδύνατο
Β	έχει μία λύση
Γ	είναι αόριστο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 8Η

Αν $D = D_\chi = D_\psi = 0$ με $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ και ($\gamma \neq 0$ ή $\gamma' \neq 0$) τότε το σύστημα

Α	είναι αδύνατο
Β	είναι αόριστο
Γ	έχει μοναδική λύση.

ΕΡΩΤΗΣΗ 9Η

Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα όταν έχουν τις ίδιες λύσεις και

Α	είναι τελείως διαφορετικά συστήματα
Β	το ένα προέρχεται με μετατροπή από το άλλο.
Γ	το ένα είναι ομογενές και το άλλο μη ομογενές.

ΕΡΩΤΗΣΗ 10Η

Το ομογενές σύστημα

Α	έχει λύσεις ή είναι αδύνατο
Β	είναι πάντοτε αδύνατο
Γ	έχει πάντοτε λύση.

5. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: ΟΤΑΝ.....

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε.....	με όταν...
Ερώτηση α)	
..... ένα σύστημα με γραφική επίλυση έχει μία λύση;	
Ερώτηση β)	
..... ένα σύστημα με γραφική επίλυση είναι αδύνατο;	
Ερώτηση γ)	
..... ένα σύστημα με γραφική επίλυση είναι αόριστο;	
Ερώτηση δ)	
..... ένα σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης έχει μια λύση;	
Ερώτηση ε)	
..... ένα σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης δεν έχει λύση;	
Ερώτηση στ)	
..... ένα σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης έχει άπειρες λύσεις;	
Ερώτηση ζ)	
.....ένα ομογενές σύστημα είναι αδύνατο;	
Ερώτηση η)	

..... ένα σύστημα είναι γραμμικό;

Ερώτηση θ)

..... κάνουμε επαλήθευση ενός συστήματος;

Ερώτηση ι)

..... ένα σύστημα Σ_1 είναι ισοδύναμο με ένα άλλο σύστημα Σ_2;

Ερώτηση ια)

..... ένα σύστημα έχει μοναδική λύση επιλυόμενο με την μέθοδο των οριζουσών;

Ερώτηση ιβ)

..... ένα σύστημα δεν έχει λύση επιλυόμενο με την μέθοδο των οριζουσών;

Ερώτηση ιγ)

..... ένα σύστημα είναι αόριστο επιλυόμενο με την μέθοδο των οριζουσών;

Ερώτηση ιδ)

.....δύο συστήματα είναι ταυτόχρονα αδύνατα;

Ερώτηση ιε)

.....δύο συστήματα είναι ταυτόχρονα αόριστα;

6. ΑΝΑΠΤΥΓΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΕ ΒΟΗΘΟ ΤΟΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ

ΘΕΜΑΤΑ	ΠΛΗΚΤΡΟΛΟΓΗΣΗ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
Θέμα 1 Να επιλυθεί **το σύστημα** $\begin{cases} \chi+2\psi=1 \\ 2\chi-\psi=-3 \end{cases}$		
Θέμα 2 Να επιλυθεί **το σύστημα** $\begin{cases} \chi+2\psi=1 \\ 3\chi+6\psi=-3 \end{cases}$.		
Θέμα 3 Να επιλυθεί **το σύστημα** $\begin{cases} \chi+2\psi=1 \\ 2\chi+2\psi=2 \end{cases}$		
Θέμα 4 Να υπολογιστεί η ορίζουσα $\begin{vmatrix} \chi-\psi & \chi+2\psi \\ \chi+\psi & \chi-2\psi \end{vmatrix}$		
Θέμα 5 Να υπολογιστεί η ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha^2+\beta^2 \\ 2(\alpha+\beta) & 2(\alpha^2+\beta^2) \end{vmatrix}$		

Γ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΤΗ ΤΑΞΗ

1. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες με εξισώσεις $\chi-2\psi-6=0$, $-2\chi+\psi+9=0$ και $5\chi+11\psi-9=0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να γίνει η επαλήθευση γραφικά.

2. Να επιλυθεί το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{\chi}{\psi}=\dfrac{\chi+4}{\psi-2} \\ \chi+\psi=14 \end{cases}$

3. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 6. Αν προσθέσουμε 18 στον αριθμό προκύπτει αριθμός με αντιστραμμένα τα ψηφία του. Να βρεθεί ο αριθμός αυτός.

4. Να αποδείξετε ότι $\begin{vmatrix} \alpha_1\chi_1+\beta_1\psi_1 & \alpha_1\chi_2+\beta_1\psi_2 \\ \alpha_2\chi_1+\beta_2\psi_1 & \alpha_2\chi_2+\beta_2\psi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \chi_1 & \psi_1 \\ \chi_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$

5. Να επιλυθεί το σύστημα $\begin{cases} \begin{vmatrix} \chi+\psi & 0 \\ \psi-1 & 4 \end{vmatrix}=1 \\ \begin{vmatrix} 3\chi+2 & 1 \\ -\psi & 1 \end{vmatrix}=0 \end{cases}$

6. Να διερευνηθεί το σύστημα $\begin{cases} 2\lambda\chi+\lambda\psi=4 \\ \lambda\chi+(\lambda-1)\psi=2 \end{cases}$ λ πραγματικός αριθμός.

7. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΤΟ ΣΠΙΤΙ

7. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\kappa+\lambda)\chi+(\kappa-\lambda)\psi=0 \\ (2\kappa-\lambda)\chi+(5\lambda-3\kappa)\psi=-92 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\kappa,\lambda \in \Re$ αν μια λύση του συστήματος είναι η $(\chi,\psi)=(1,2)$.

8. Αν προσθέσουμε στους όπους ενός κλάσματος το 3 βρίσκουμε το $\frac{8}{9}$, ενώ αν αφαιρέσουμε από τον αριθμητή τον παρονομαστή τότε βρίσκουμε τον αριθμό $\frac{2}{3}$. Να βρείτε το κλάσμα .

9. Αν η μεγαλύτερη πλευρά ενός ορθογωνίου αυξηθεί κατά 5m , το εμβαδό αυξηθεί κατά 200 m^2 ,ενώ αν η μεγαλύτερη ελαττωθεί κατά 3m και η μικρότερη κατά 4m ελαττώνεται 136 m^2 . Να βρείτε τις πλευρές του ορθογωνίου.

10. Να επιλυθεί και να διερευνηθεί το (Σ) $\begin{cases} \lambda\chi+3\psi=9 \\ 3\chi+\lambda\psi=\lambda^2 \end{cases}$ $\lambda \in \Re$.

11. Για ποια τιμή του $\lambda \in \Re$ το (Σ) $\begin{cases} \chi \quad -3\lambda\psi=0 \\ 2\chi-(\lambda+5)\psi=0 \end{cases}$ έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής. Να βρεθούν οι άπειρες λύσεις.

12. Δίνεται το παραμετρικό σύστημα $\begin{cases} \alpha\chi-(\beta+1)\psi=-4 \\ (\beta+2)\chi+(\alpha-1)\psi=2, \end{cases}$ $\alpha,\beta \in \Re$.

Να βρεθούν οι α,β ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις και να βρεθούν οι λύσεις αυτές.

8.. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

13. Να προσδιοριστεί η τιμή του λ ώστε το σύστημα $\begin{cases} \chi-2\psi=\lambda+2 \\ \lambda\chi+\psi=1 \end{cases}$ να έχει μοναδική λύση που ικανοποιεί την εξίσωση $\chi+\psi+1=0$.

14. Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο ο αριθμός λ του συστήματος $\begin{cases} 2\chi-\psi=\lambda \\ 4\chi+\psi=3\lambda^2-10\lambda \end{cases}$ που έχει μοναδική λύση , ικανοποιεί την ανισότητα $\chi-\psi>3$.

15. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \chi+2\psi=\lambda \\ \chi-2\psi=\mu \end{cases}$ με λ,μ πραγματικοί αριθμοί.
Να βρεθεί η συνθήκη που ικανοποιούν οι λ,μ ώστε το (Σ) να έχει μοναδική λύση που ικανοποιεί την ευθεία $\psi=3\chi$

16. Να επιλυθεί το σύστημα $\begin{cases} \chi+\psi=2 \\ |3\chi+\psi|=2 \end{cases}$

17. Να βρεθεί διψήφιος αριθμός χψ που αν πολλαπλασιάσουμε τον χψ με το άθροισμα των ψηφίων του βρίσκουμε τον αριθμό 405 ενώ αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό ψχ με το άθροισμα των ψηφίων του βρίσκουμε τον αριθμό 486.

18. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\kappa+\lambda)\chi+(\kappa-\lambda)\psi=0 \\ (2\kappa-\lambda)\chi+(5\lambda-3\kappa)\psi=-92 \end{cases}$
Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\kappa,\lambda \in \Re$ αν μια λύση του συστήματος είναι η $(\chi,\psi)=(1,2)$.

19. Αν προσθέσουμε στους όπους ενός κλάσματος το 3 βρίσκουμε το $\frac{8}{9}$, ενώ αν αφαιρέσουμε από τον αριθμητή τον παρονομαστή τότε βρίσκουμε τον αριθμό $\frac{2}{3}$. Να βρείτε το κλάσμα .

20. Αν η μεγαλύτερη πλευρά ενός ορθογωνίου αυξηθεί κατά 5m , το εμβαδό αυξηθεί κατά 200 m^2 ,ενώ αν η μεγαλύτερη ελαττωθεί κατά 3m και η μικρότερη κατά 4m ελαττώνεται 136 m^2 . Να βρείτε τις πλευρές του ορθογωνίου.

21. Να επιλυθεί και να διερευνηθεί το (Σ) $\begin{cases} \lambda\chi+3\psi=9 \\ 3\chi+\lambda\psi=\lambda^2 \end{cases}$ $\lambda \in \Re$.

22. Για ποια τιμή του $\lambda \in \Re$ το (Σ) $\begin{cases} \chi \quad -3\lambda\psi=0 \\ 2\chi-(\lambda+5)\psi=0 \end{cases}$ έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής. Να βρεθούν οι άπειρες λύσεις.

23. Δίνεται το παραμετρικό σύστημα $\begin{cases} \alpha\chi-(\beta+1)\psi=-4 \\ (\beta+2)\chi+(\alpha-1)\psi=2, \end{cases}$ $\alpha,\beta \in \Re$.

Να βρεθούν οι α,β ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις και να βρεθούν οι λύσεις αυτές.

24. Να προσδιοριστεί η τιμή του λ ώστε το σύστημα $\begin{cases} \chi-2\psi=\lambda+2 \\ \lambda\chi+\psi=1 \end{cases}$ να έχει μοναδική λύση που ικανοποιεί την εξίσωση $\chi+\psi+1=0$.

25. Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο ο αριθμός λ του συστήματος $\begin{cases} 2\chi-\psi=\lambda \\ 4\chi+\psi=3\lambda^2-10\lambda \end{cases}$

που έχει μοναδική λύση , ικανοποιεί την ανισότητα $\chi-\psi > 3$.

26. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \chi+2\psi=\lambda \\ \chi-2\psi=\mu \end{cases}$ με λ,μ πραγματικοί αριθμοί.

Να βρεθεί η συνθήκη που ικανοποιούν οι λ,μ ώστε το (Σ) να έχει μοναδική λύση που ικανοποιεί την ευθεία $\psi = 3\chi$

27. Να επιλυθεί το σύστημα $\begin{cases} \chi+\psi=2 \\ |3\chi+\psi|=2 \end{cases}$

28. Να βρεθεί διψήφιος αριθμός χψ που αν πολλαπλασιάσουμε τον χψ με το άθροισμα των ψηφίων του βρίσκουμε τον αριθμό 405 ενώ αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό ψχ με το άθροισμα των ψηφίων του βρίσκουμε τον αριθμό 486.

9. Επιπλέον Συστήματα 2x2

1. Συμπληρώστε τα κενά με μια εξίσωση ή την κατάλληλη έκφραση:

α. Το σύστημα $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ είναι αδύνατο.

β. Το σύστημα $\begin{cases} x+2y=8 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος (2, 3).

γ. Το σύστημα $\begin{cases} x+2y=5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.

δ. Το σύστημα $\begin{cases} 2x-y=10 \\ 2x+y=12 \end{cases}$ είναι / έχει .....

ε. Το σύστημα $\begin{cases} 2x+y=12 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ έχει λύση, πάνω στη διχοτόμο της γωνίας του πρώτου τεταρτημορίου, ενός συστήματος αξόνων.

2. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x+y=5 \end{cases}$

β. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{3} \\ 3x+5y=59 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1 \\ x-\frac{y}{2}=3 \end{cases}$

3. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α. $\begin{cases} 3x-5=2(y+1)-8 \\ 2(x-1)=3(1-2y)+9 \end{cases}$

β. $\begin{cases} 3(2-x)-5(y+2)=3x-1 \\ 4(x-y)-5x=2x+3(x-y) \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \dfrac{1-2x}{3}+\dfrac{1+y}{2}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=x+2 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} \dfrac{2}{3}(2x+y)=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x+y}{3}=2-3y \end{cases}$

ε. $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}+\dfrac{x+1}{2}=1 \\ \dfrac{2-x}{3}-\dfrac{1-y}{3}=-2 \end{cases}$ **στ.** $\begin{cases} \dfrac{x-2}{4}+\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{3(y-3)}{2}+11-3x \\ \dfrac{4x-(2y-x)}{2}=\dfrac{1-y}{10}-\left(\dfrac{x}{5}-\dfrac{23}{4}\right) \end{cases}$

ζ. $\begin{cases} \dfrac{4x+15}{3}=x+\dfrac{3y-5}{5} \\ \dfrac{3x+2y}{4}+\dfrac{y+15}{5}=y \end{cases}$ **η.** $\begin{cases} \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{3y+4}{10}+x-y \\ \dfrac{2x-5}{5}=\dfrac{2y-4}{4}+x-12 \end{cases}$

4. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ |3x-5y|=1 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 3|x+1|-|y-2|=3 \\ |x+1|+2|y-2|=8 \end{cases}$

5. Ομοίως:

α. $\begin{cases} \dfrac{1}{3+x+2y}+\dfrac{3}{6+4x-5y}=0 \\ 3(6x-5y+4)=3x+2y+401 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=8 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=3 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{3}{x-y}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{2}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} \dfrac{-3}{x-7}+\dfrac{5}{y+3}=7 \\ \dfrac{5}{x-7}-\dfrac{4}{y+3}=-3 \end{cases}$

6. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2}=0 \\ \sqrt{(x-y)^2}=2 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} |x+1|=|x+y| \\ 3x+5y=9 \end{cases}$

10. Επιπλέον Παραμετρικά Συστήματα

7. Να λυθούν τα συστήματα για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ:

α. $\begin{cases} x+y=\lambda \\ \lambda x+y=1 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x+\lambda y=1 \\ \lambda x-3\lambda y=2\lambda+3 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} x+\lambda y=1 \\ \lambda x+y=\lambda^2 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} \lambda^2 x+y=2 \\ x+y=2\lambda \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} 2\lambda x+y=1 \\ 6x+3y=-3 \end{cases}$ **στ.** $\begin{cases} 2x+(5-\lambda)y=1 \\ x+2\lambda y=0 \end{cases}$

ζ. $\begin{cases} (1-\lambda)x+2y=3 \\ 2\lambda x+(\lambda-1)y=\lambda-4 \end{cases}$ **η.** $\begin{cases} x+y=3 \\ \lambda^2 x+y=3 \end{cases}$

θ. $\begin{cases} (\lambda+1)x-3\lambda^2 y=\lambda \\ x+(\lambda-1)y=-1 \end{cases}$ **ι.** $\begin{cases} (\lambda-1)x-y=4 \\ \lambda x-2y=4\lambda \end{cases}$

ια. $\begin{cases} (\lambda-2)x+\lambda y=2\lambda \\ 3x+(\lambda+2)y=12 \end{cases}$ **ιβ.** $\begin{cases} 2\lambda x+(\lambda-2)y=2 \\ \lambda x+\lambda y=1 \end{cases}$

ιγ. $\begin{cases} (\lambda-1)x+-2y=3\lambda \\ x+(\lambda-4)y=\lambda+4 \end{cases}$ **ιδ.** $\begin{cases} (\mu+1)x+8y=4\mu \\ \mu x+(\mu+3)y=3\mu-1 \end{cases}$

ιε. $\begin{cases} (2\lambda-1)x+\lambda y=1 \\ \lambda x+(2\lambda-1)y=\lambda \end{cases}$ **ιστ.** $\begin{cases} (\lambda-2)x+\lambda y=2\lambda \\ 3x+(\lambda+2)y=12 \end{cases}$

ιζ. $\begin{cases} (\lambda+1)x+2\lambda y=2 \\ 2\lambda x+(\lambda+1)y=\lambda+1 \end{cases}$ **ιη.** $\begin{cases} (\lambda^2-1)x-y=3\lambda \\ 3x-y=8-\lambda \end{cases}$

8. Να προσδιοριστούν οι τιμές του $\lambda\in P$, ώστε το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda+4)x+(2\lambda+1)y=3\lambda-1 \\ (3\lambda+7)x+(5\lambda+1)y=2\lambda+2 \end{cases}$$

α. να έχει μία λύση **β.** να είναι αόριστο **γ.** να είναι αδύνατο

9. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in P$, ώστε τα ακόλουθα συστήματα να είναι συγχρόνως αόριστα:

$$\begin{cases} (\alpha+3)x+4y=4 \\ \alpha x+\alpha y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\alpha-2)x+3y=2 \\ -x+(\alpha+2)y=\alpha+1 \end{cases}$$

10. Να βρεθούν οι τιμές των λ, μ για τις οποίες τα ακόλουθα συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα:

$$\begin{cases} (\mu+1)x+\lambda y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -(\mu+1)x+(\lambda+1)y=2 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

11. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\lambda+1)x+\lambda y=4\lambda+2 \\ x+y=4 \end{cases}$. Αν (x_0, y_0) είναι η μοναδική λύση του, τότε να λυθεί η εξίσωση: $x - 5x_0 \cdot x + y_0 = 0$.

12. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+\mu y=2 \\ -4\mu x+\lambda y=5 \end{cases}$ και η εξίσωση $x^2 - \lambda x - \mu^2 = 0$, με λ, μ $\in P$. Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μία μοναδική λύση, αν και μόνον αν, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

13. **α.** Να λυθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in P$:

$$\begin{cases} (\lambda-1)x+(\lambda+2)y=1 \\ -x+\lambda y=2-y \end{cases}$$

β. Για τη μοναδική λύση (x_0, y_0), που βρήκατε στο (α), να υπολογίσετε το λ, ώστε: $y_0 - 2x_0 > 1$.

11. Επιπλέον Ορίζουσες

14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\begin{vmatrix} 1+x & 1+x^2 \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x$

β. $\begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1+x \\ 1-x+x^2 & 1-x \end{vmatrix} = 16$

γ. $\begin{vmatrix} x & -2 \\ x & x \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5$

δ. $\begin{vmatrix} 10 & \sqrt{10x} \\ \sqrt{10x} & x \end{vmatrix} = 0$

ε. $\begin{vmatrix} 3^{10} & 3^{10} \\ 3^{10} & 3^{11} - 2x \end{vmatrix} = 0$

15. Να λυθεί η ανίσωση : $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} - 3x + 4$

16. Να λυθεί η ανίσωση : $\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x}} & \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+x}} \end{vmatrix} \le 0$

17. Αν η εξίσωση $\lambda^2 (x - 1) = x - 3\lambda + 2$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x, να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας: $D = \begin{vmatrix} \frac{\lambda-1}{\lambda+1} & \lambda+3 \\ 4\lambda & \lambda^2-1 \end{vmatrix}$

18. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^{-\nu} \cdot f(x)$ όπου ν φυσικός αριθμός. Αν υπάρχουν $\kappa, \lambda \in P$, τέτοιοι ώστε $g(\kappa) = g(\lambda)$, τότε να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας : $\begin{vmatrix} \kappa^\nu & f(\kappa) \\ \lambda^\nu & f(\lambda) \end{vmatrix}$

19. Δίνεται το γραμμικό 2x2 σύστημα με ορίζουσες D, Dx, Dy. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση και επιπλέον ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 = D\,(2Dx - 4Dy - 5D)$$

τότε να βρείτε την λύση αυτή.

20. Δίνεται το γραμμικό 2x2 σύστημα με ορίζουσες D, Dx, Dy. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση και επιπλέον ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 + D^2 = 4D(D_x - D_y) + 2DD_y$$

τότε να βρείτε την λύση αυτή.

21. Δίνεται το γραμμικό 2x2 σύστημα με ορίζουσες D, Dx, Dy. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση και επιπλέον ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 + 2D^2 = 2(D_x - D + DD_y + 1)$$

τότε να βρείτε την λύση αυτή.

22. Έστω γραμμικό σύστημα 2x2, με αγνώστους x, y, το οποίο έχει μοναδική λύση. Αν ισχύει ότι:

$$\begin{cases} 2D_x + D_y = 5D \\ 3D_x - 2D_y = 4D \end{cases}$$

να βρεθεί η λύση αυτή.

23. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$, με $\alpha, \beta \in P$, αν γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} + 4 = 0$$

12. Επιπλέον Συστήματα 3x3

24. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α. $\begin{cases} x-2y+2z=3 \\ x+y-2z=-1 \\ -x+2y+2z=1 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 2x-y-z=2 \\ 4x-y-3z=-2 \\ 2x+2y-\frac{2}{3}z=9 \end{cases}$

25. Να δείξετε ότι τα παρακάτω συστήματα είναι αδύνατα:

α. $\begin{cases} 20x+y=1 \\ y=1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x+z=2 \\ 2x+y-z=0 \\ 2x+z=0 \\ x+y+z=16 \end{cases}$

26. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x-y-z=0 \\ 4x+5y+6z=11 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x-2y+z=-3 \\ 2x+y+2z=4 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} -x+y-z=1 \\ 2x+4z=3 \\ 2y+2z=5 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} 3x+y-z=11 \\ 4y+3z=10 \\ 2z=4 \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} 2x+\frac{4}{5}y-3\omega=8 \\ x-y+2\omega=-3 \\ 0{,}6x+0{,}3y-0{,}5\omega=1{,}6 \end{cases}$

στ. $\begin{cases} x+2y+4\omega=1 \\ -x+3y+6\omega=2 \\ -2x+y+2\omega=3 \end{cases}$ **ζ.** $\begin{cases} x+y-z=3 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=-3 \end{cases}$

27. Να λύσετε τα παρακάτω ομογενή συστήματα:

α. $\begin{cases} x+2y+8z=0 \\ x+3y+7z=0 \\ x+5y+5z=0 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 4x-y-z=0 \\ 3x+y+z=0 \\ 4x+y+3z=0 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} 3x+3y+5\omega=0 \\ 3x+5y+9\omega=0 \\ 5x-9y+17\omega=0 \end{cases}$

28. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 3x-y-z=2 \\ x+2y+6z=-1 \\ 5x+2y+3z=-6 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x-z+4\omega+5\varphi=4 \\ y-2\omega-\varphi=1 \\ -x+5z-12\omega-17\varphi=-4 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} x+y+\varphi+\omega=12 \\ x+\varphi=1 \\ y+x=2 \\ y+\omega=3 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+x=3 \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2} \\ \frac{\beta+\gamma}{2}=3 \\ \frac{\gamma+\delta}{2}=4 \\ \frac{\delta+\varepsilon}{2}=3 \\ \frac{\varepsilon+\alpha}{2}=\frac{3}{2} \end{cases}$

στ. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=2 \\ \frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}=3 \end{cases}$ **ζ.** $\begin{cases} 2x-3y+2\omega=9 \\ 4x+y-3\omega=11 \end{cases}$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ

§1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2ο

1) ΑΣΚΗΣΗ 2-16950 §1.1

α) Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο (Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο. (Μονάδες 15)

2) ΑΣΚΗΣΗ 2-16954 §1.1

Δίνεται η εξίσωση: $8x + 2y = 7$ (1)

α) Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1). (Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο. (Μονάδες 15)

<u>3) ΑΣΚΗΣΗ 2-16957</u> §1.1

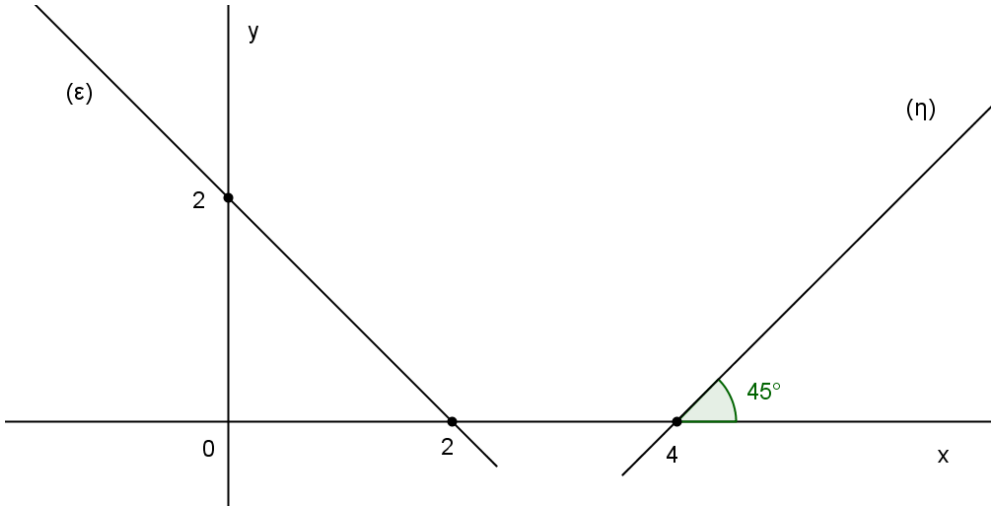
Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός. (Μονάδες 12

<u>4) ΑΣΚΗΣΗ 2-16960</u> §1.1

α) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών (*ε*) και (*η*).



(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους. (Μονάδες 13)

<u>5) ΑΣΚΗΣΗ 2-17647</u> §1.1

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος (2,–3). (Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο. (Μονάδες 12)

<u>6) ΑΣΚΗΣΗ 2-17651</u> §1.1

Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2.700.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων. (Μονάδες 12)

7) ΑΣΚΗΣΗ 2-17683 §1.1

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases}(\lambda+1)x+2y=3\\4x+(\lambda-1)y=-6\end{cases}$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Αν $\lambda=-3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση. (Μονάδες 8)

β) Αν $\lambda=3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο. (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda=0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 9)

8) ΑΣΚΗΣΗ 2-17703 §1.1

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $(\varepsilon_1): 2x-y=-1$ και $(\varepsilon_2): (\lambda-1)x-y=6$,με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες. (Μονάδες 8)

β) Να παραστήσετε γραφικά τις (ε_1) και (ε_2), για $\lambda=3$. (Μονάδες 8)

γ) Υπάρχει τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να ταυτίζονται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

9) ΑΣΚΗΣΗ 2-17709 §1.1

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2x+y=5$, $(\varepsilon_2): -2x+3y=-9$, $(\varepsilon_3): 3x+2y=7$

α) **i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_3)$ (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να δείξετε ότι το κοινό σημείο των (ε_2) και (ε_3) είναι σημείο της (ε_1) (Μονάδες 13)

10) ΑΣΚΗΣΗ 2-17717 §1.1

Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα. Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα.

α) Αν x ο αριθμός σειρών του κάτω και y ο αριθμός σειρών του πάνω διαζώματος, να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων. (Μονάδες 12)

β) Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διάζωμα; (Μονάδες 13)

11) ΑΣΚΗΣΗ 2-17734 §1.1

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): 2x+y=6$, $(\varepsilon_2): x-2y=-3$

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η ευθεία $3x+\alpha y=\alpha+5$ διέρχεται από το Μ.
(Μονάδες 12)

12) ΑΣΚΗΣΗ 2-18637 §1.1

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=9 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος (1,–4) (Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας. (Μονάδες 12)

13) ΑΣΚΗΣΗ 2-18638 §1.1

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x+y=3 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος (–1,5) (Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας. (Μονάδες 12)

14) ΑΣΚΗΣΗ 2-20328 §1.1

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x+y=2 \\ \lambda x+\lambda y=\lambda+1 \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος ισχύουν

$$D=\lambda(\lambda-1)\ ,\ D_x=\lambda-1 \text{ και } D_y=\lambda(\lambda-1)$$

(Μονάδες 15)

β) Αν είναι $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$, τότε να λύσετε το σύστημα. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο

15) ΑΣΚΗΣΗ 4-17834 §1.1

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:
Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας το πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός. (Μονάδες 12)

16) ΑΣΚΗΣΗ 4-17835 §1.1

Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $x+(\lambda+2)y=3$, $(\lambda-2)x+5y=3$ αντίστοιχα και $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών. (Μονάδες 13)

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των δύο ευθειών. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία το σημείο Α ανήκει στην ευθεία με εξίσωση: $x+2y=3$ (Μονάδες 5)

<u>17) ΑΣΚΗΣΗ 4-17839</u> §1.1

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases}(\alpha-1)x+3y=3\\ x+(\alpha+1)y=3\end{cases}$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0,y_0), τότε $x_0=y_0$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:

i. έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε τη μορφή τους. (Μονάδες 6)

ii. δεν έχει λύση. (Μονάδες 4)

γ) Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για $\alpha=3$, $\alpha=2$, $\alpha=-2$ (Μονάδες 5)

<u>18) ΑΣΚΗΣΗ 4-20336</u> §1.1

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases}2x-4y=1-\lambda\\ x+6y=\lambda+2\end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα x και y συναρτήσει του λ. (Μονάδες 8)

γ) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, για την οποία οι ευθείες: $2x-4y=1-\lambda$, $x+6y=\lambda+2$ και $16x+16y=19$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 10)

<u>19) ΑΣΚΗΣΗ 4-20925</u> §1.1

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1:\ \lambda x+y=1$ και $\varepsilon_2:\ x+\lambda y=\lambda^2$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι δύο ευθείες τέμνονται και να γράψετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 13)

β) Για ποια τιμή του λ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες; (Μονάδες 6)

γ) Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x+\lambda^2y=\lambda^3$ και $2x+2\lambda y=\lambda^2-1$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 6)